JANY SANTOS SOUZA GOULART

Desenhos e Gráficos: Produção de Significados Pelos Participantes de Um Curso de Geometria Analítica

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Desenho, Cultura e Interatividade da Universidade Estadual de Feira de Santana, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Desenho, Cultura e Interatividade sob a orientação do Prof. Dr. André Luís Mattedi Dias.

UEFS
Feira de Santana
2008

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
DEPARTAMENTO DE LETRAS E ARTES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM DESENHO, CULTURA E INTERATIVIDADE

JANY SANTOS SOUZA GOULART

Desenhos e Gráficos: Produção de Significados Pelos Participantes de Um Curso de Geometria Analítica

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dra. Cláudia Regina Flores
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Wilson Pereira de Jesus
Universidade Estadual de Feira de Santana

Prof. Dr. André Luis Mattedi Dias
Universidade Estadual de Feira de Santana
Orientador

AGRADECIMENTOS

Ao meu maravilhoso DEUS, invisível, mas real, por me dar forças e sabedoria, não permitindo que eu desanimasse ou recuasse diante dos obstáculos e adversidades.

Assim, gostaria de trazer para dentro do meu texto aqueles que já o percorreu nas entrelinhas.

Em especial, a minha família, a minha querida e amada mãe Jury, pelo incentivo constante, ao meu admirável irmão Wilton por ter mergulhado conjuntamente comigo nesta caminhada, a minha querida irmã Eliane por ter me substituído exemplarmente, nos momentos em que não pude assumir por completo o meu papel de mãe, aos meus queridos: Birinha e meu pai Bira pela torcida silenciosa.

Ao meu amor e amigo Claudiano pela assessoria técnica e por acreditar que tudo isso seria possível.

Ao meu mais novo amor, minha linda filha Ana Clara (Clarinha) por ser meu calmante nos momentos de tensão, por me fazer respirar fundo e seguir em frente.

Ao Prof. Doutor André Luis Mattedi Dias, professor, orientador e amigo, por abrir esta porta que me encaminharia para o tema tratado nesta dissertação, por ser compreensivo, humano, preocupando-se primeiro com Jany e num segundo momento com a mestranda Jany.

Aos professores Acácia, Afonso Henriques e Cláudia Flores pelas considerações que me mostraram novos caminhos a serem seguidos.

Ao professor Cristiano Mascarenhas e aos alunos que permitiram que eu adentrasse no seu mundo.

A todos os professores, funcionários e alunos do Mestrado em Desenho Cultura e Interatividade, e todos aqueles que, direta ou indiretamente contribuíram para a realização desta dissertação.

RESUMO

Esta investigação busca analisar a forma como alunos e professor, que respectivamente cursam e ministram aulas de geometria analítica, em uma turma do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Feira de Santana / BA, concebem aspectos relativos à aquisição, construção e interpretação dos sentidos ou significados, produzidos ou expostos em sala. Para tanto, se empreende uma pesquisa com suporte na prática etnográfica, partindo-se da proposta e argumentação de que tal ambiente se constitui em um universo cognitivo multicultural ou ainda em uma micro-sociedade, rica em produção de significados. Utiliza-se, deste modo, de observações, em que o pesquisador coloca-se em uma posição de estranhamento e de busca pela imparcialidade. Neste contexto, admite-se que as representações gráficas transportam consigo fatores psicológicos, sociológicos, esquemas perceptivos, cognitivos e afetivos específicos ou ainda que os fatores sociais e culturais estão diretamente relacionados às múltiplas interpretações acerca de um ente geométrico, matemático e simbólico. As experiências são trazidas, por meio do destaque ou seleção de episódios característicos do modo de significação dos atores envolvidos (professor-alunos). Objetiva-se, assim, apresentar respostas quanto ao nível de importância ou papel dos desenhos, gráficos, figuras nas inter-relações significativas construídas. Em igual dimensão, se busca compreender o alcance das influências e concepções individuais previamente construídas no meio social, assim como montar um panorama de funcionamento de uma sala de aula, levando-se em consideração as especificidades no estudo de figuras geométricas, usualmente consideradas como portadoras de ambigüidades e significados implícitos. A combinação entre a linguagem algébrica e gráfica e estudos semióticos se mostram presentes em toda a construção do estudo, como meio para a obtenção de soluções válidas e descrição dos processos de significação.

PALAVRAS-CHAVE: Geometria Analítica, desenhos, semiótica, produção de significados, cultura, prática etnográfica.

ABSTRACT

This investigation aims to analyze the way how students and professor, who study and teachers classes of analytic geometry, respectively, in a group of Mathematics Undergraduate students at the State University of Feira de Santana / BA, conceive aspects related acquisition, construction and interpretation of senses or meanings, produced or exposed in the classroom. To this, a research is carried out supported on the ethnographical practice from the proposal and argument that an environment is constituted in a multicultural cognitive universe or even in a micro-society, rich in production of meanings. This way, it is used observations in which the researcher places herself in a strangement position and quest for impartiality. In this context, it is admitted that graphical representations carry along psychological and sociological factors, perceptive, cognitive and affective specifics schemes or that social and cultural factors are directly related to multiple interpretations concerning a geometrical, mathematical and symbolical element. The experiences are brought, through the emphasis or selection of characteristic episodes of involved performers' (professor-students) way of meaning. This investigation objective is to present answers as for drawings, graphics, pictures role or level of importance in the built meaningful inter-relationships. In equal dimension, it aims to understand the influences and individual conceptions reach in the social environment as well as to build a classroom operation prospect, taking in consideration the particular matters on the geometrical picture study, usually considered as carriers of ambiguities and implicit meanings. The combination between algebraic and graphic language and semiotic studies are presented in all study construction as a method to obtain valid solutions and description of meaning processes.

KEYWORDS: Analytical Geometry, drawings, semiotics, production of meanings, culture, ethnographic practice.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Porque tenho sido professora de geometria analítica e de álgebra linear da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS) e da Universidade do Estado da Bahia (UNEB), escolhi como tema desta pesquisa as interpretações e produções de significado de alunos e professor sobre as representações gráficas utilizadas nas aulas de geometria analítica.

Considero a sala de aula como um espaço onde se processa uma dinâmica comunicativa entre um emissor (professor), que envia mensagens para um receptor (aluno), ou vice-versa, entre um emissor (aluno) que envia mensagens para um receptor (professor), ou ainda entre um emissor (aluno) que envia mensagens para um receptor (aluno). Conforme salienta Peruzzolo (2004):

> A comunicação é uma relação de ser a ser que quer passar uma mensagem a outro. Logo, veja bem, a relação é estabelecida por um meio-mensagem que se torna, então, o meio de entrar em relação (...). Esse meio é aquilo que organizamos para nos relacionarmos com o outro e significa-lhe algo, sem o que ele não se exporá a nós (...) (PERUZZOLO, 2004, p.21-22).

Portanto, lidaremos com o processo comunicativo na sala de aula de geometria analítica, com as interações entre os seus atores, que envolvem representações, interpretações e significações. O signo é o conceito teórico que utilizaremos para designar o elemento mediador no processo de interpretação / significação, ou seja, ele pode representar um objeto para um intérprete refletindo na sua mente algo que está relacionado com este objeto representado.

O signo e o processo de significação desencadeiam uma movimentação, um processo de interpretação circunstanciado, aberto, dinâmico e ilimitado, denominado por Charles S. Peirce como semiose ilimitada. Ele explicita o caráter social do signo, assim como, também nos permite conjecturar sobre o movimento que rege as relações dos signos matemáticos:

> (...) Peirce sempre defendeu a natureza social do signo, não opondo, como o faz Saussurre, língua/fala, mas eliminando simplesmente o sujeito do discurso. O eu que fala é o lugar de comunicação dos interpretantes em situação, e toda situação é social. (SOUZA, 2006, p.157).

Pensar o signo como elemento social e em constante transformação a cada nova interpretação permite-nos admitir que este elemento, dependendo do contexto, adquire inúmeras concepções e formas, tendo como âncora as estreitas relações entre objeto e seu intérprete. Tal afirmação é ratificada pela declaração de Souza:

> (...) o signo é uma coisa que representa outra coisa, seu objeto. Ele representa seu objeto para um intérprete, e produz na mente deste intérprete alguma outra coisa que está relacionada ao objeto, mas pela mediação do signo (SOUZA, 2006, p.160).

Agora, depois destas premissas inicialmente apresentadas, é preciso pensar sobre as relações entre matemática e semiótica, razão pela qual buscamos em Elisabeth Walter-Bense algumas contribuições importantes:

> Naturalmente, desde o princípio, a matemática pertence indiretamente a temática da semiótica, tendo-se em vista que números, algarismos, figuras equações, estruturas aritméticas, algébricas, geométricas e topológicas representam precisamente signos e sistemas de signos. (BENSE, 2000, p.95).

Portanto, reitero, o signo é o elemento que media os processos de significação na sala de aula, que é transformado, remanejado e ampliado no processo de comunicação que ocorre entre alunos e professor. Além disto, é relevante destacar que os signos não são apenas componentes da língua que falamos ou grafamos, indispensável na produção de conhecimento, pois também há emissão de mensagens com gestos, sons ou imagens, dentre outros. Martine Joly (2005) explica o duplo sentido do termo "imagem" em matemática:

> Na matemática, o termo “imagem” pode ter um sentido específico e um sentido mais comum: uma imagem matemática é uma representação diferente de um mesmo objeto ao qual ela é equivalente e não idêntica. É o objeto visto sob outro ângulo: uma anamorfose e uma projeção geométrica podem ser exemplos desta “teoria das representações”. Mas a matemática também usa “imagens” como gráficos, figuras ou a imagem numérica, para representar visualmente equações e fazer as formas evoluírem, observar suas deformações e procurar as leis que as regem. Leis que podem referir a fenômenos físicos e, por sua vez, explicá-los. (JOLY, 2005, p.25).

As imagens (gráficos / desenhos) são, portanto, representações visuais muito importantes no processo comunicativo de ensino e aprendizagem de geometria analítica. Para aprofundar e sistematizar uma série de aspectos relacionados com esta temática, procurei estudar, por um lado, as relações entre semiótica e matemática tal como abordados por Michael Otte, Raymond Duval, Luis Radford e Juan Godino, por outro lado, além do próprio Peirce, a teoria geral da semiótica como abordadas por Ferdinand de Saussure, Lev Vygotski ou Jean Piaget.

Além disto, também considero que a produção de significado é também produção de cultura. Deste modo, admitimos que o aporte cultural está entrelaçado, mesmo que sutilmente, nesta troca mútua que se processa na sala de aula, sendo mais um dos fios condutores que conectam as diferentes visões desta pesquisa. Portanto, o cenário da pesquisa, a sala de aula, é considerado por nós como uma micro-sociedade privilegiando sua diversidade cultural. Assim, destacamos a opinião de Geertz (1989), defendendo que o conceito de cultura é essencialmente semiótico compactuando também com Max Weber ao declarar que:

> O homem é um animal amarrado a teias de significados que ele mesmo teceu, assumo a cultura como sendo essas teias e a sua análise; portanto, não como uma ciência experimental em busca de leis, mas como uma ciência interpretativa, à procura do significado. (GEERTZ, 1989, p.15).

Em suma, comunicação e interação, semiótica e cultura, permitem-nos fazer algumas aproximações acerca do nosso foco de pesquisa, pois ao indagar sobre a matemática, particularmente geometria analítica circunstanciada, transmitida, exposta e representada numa sala de aula é possível conjecturar que as imagens (desenhos e gráficos) são essências e soma-se à aquisição do conhecimento, o qual emerge com um relevante papel na etapa significativa. Isto se consolida, quando reconhecemos que toda imagem, desenho/gráfico traz em si sentido, seja através de códigos convencionais, ou experiências prévias, ou na maneira de captá-la e reconhecê-la.

Assim, forma-se o esboço da nossa pesquisa, que se configura a partir da disciplina geometria analítica imersa num contexto de sala de aula do curso de Licenciatura em Matemática (UEFS, primeiro semestre de 2007), analisando a produção de sentido e significado neste espaço partindo da construção, interpretação e relevância dos símbolos e gráficos geométricos, particularmente retas e planos, neste processo de ensino-aprendizagem.

1.1 Objetivos

Neste trabalho investigativo, estamos interessados em examinar: **Como o professor e os alunos dão significado(s) a um objeto matemático, em um determinado ambiente, cercado por várias influências e concepções?** A partir desta questão central, surgem ramificações e desdobramentos que vão nos acompanhando e surgindo no decorrer da pesquisa.

Em consonância com o nosso foco de pesquisa, indagamos também: **O que acontece numa sala de aula onde o foco de estudo é a Geometria Analítica?** Responderíamos: professores e alunos interagindo num processo comunicativo no qual a geometria analítica é supostamente o tema principal e cujo objetivo precípuo é o ensino-aprendizagem de conhecimentos relativos ou correlacionados a este tema. Notemos então que, implícita ou explicitamente existem outros fatores imbricados neste processo, dentre eles destacamos: **Quais papéis cumprem as imagens – desenhos, gráficos, figuras etc. nestas inter-relações significativas construídas neste ambiente?**

Ora, o que dizer então da utilização de desenhos, figuras e gráficos no ensino-aprendizagem da matemática, especificamente Geometria Analítica, uma vez que esses elementos são reconhecidos usualmente na matemática como portadores de ambigüidades, como constituintes de significados implícitos, como causadores de arbitrariedades e distorções nos processos de aprendizagem matemática?

Em suma, significa dizer que a nossa investigação **pretende compreender como as representações gráficas, nas aulas de Geometria Analítica, servem de espaço de mediação entre a comunicação e o processo de interpretações, ou seja, como e quais associações são feitas ao observar e inter-relacionar determinada imagem, e de que forma ocorrem os processos de comunicações, significações e interações nas aulas de Geometria.**

A proposta deste trabalho é justamente buscar respostas para as perguntas acima, seja por meio do estudo teórico das obras dos especialistas que se têm dedicado à questão nos últimos anos, seja por meio de uma investigação empírica conduzida num ambiente de sala de aula, onde procuramos observar os processos comunicativos e interativos ocorridos, para posterior análise interpretativa.

1.2 Metodologia

Para realizar este trabalho investigativo, buscamos suporte na prática etnográfica, não no sentido específico, desenvolvida pelos antropólogos, mas fazendo uma adaptação desta prática à educação, visto que um dos nossos focos de pesquisa centra-se na análise da produção de significados pelos protagonistas de uma sala de aula de Geometria Analítica. Partimos então da caracterização inicial do que é uma sala de aula, seguindo uma trilha de análise e interpretação das situações encontradas neste ambiente, descrevendo a rotina que se estabelece, reconstruindo o cotidiano que se configura, identificando ações e práticas destes sujeitos sociais.

A descrição das ações, comportamentos e representações desses sujeitos sociais (professor e alunos), assim como a reconstrução da linguagem matemática e não matemática e as variadas formas de intercâmbios comunicacionais como gestos, posturas, silêncios etc. são também elementos constituintes de significados e conseqüentes interpretações. Sendo relevante destacar que o contato do pesquisador com a situação pesquisada são fatores que podem influenciar direta ou indiretamente no resultado final da pesquisa.

Conjeturando que a sala de aula é um ambiente cultural complexo, significando dizer que no lugar de supor que a comunicação em sala de aula ocorre de maneira não problemática, desde que certas condições mínimas de comunicabilidade sejam garantidas, a suposição fundamental é justamente outra: o processo comunicativo e interativo é essencialmente problemático na medida em que a produção de significados é variável de acordo com uma série de fatores que condicionam a forma de inserção cultural dos sujeitos na sociedade em que vivem. A mais simples palavra pronunciada pelo professor, que associa consciente ou inconscientemente um certo significado para a mesma, pode ser significada pelo aluno de uma maneira própria e essencialmente diferente.

A nossa investigação é caracterizada como uma pesquisa qualitativa, trabalhando com enfoque etnográfico. A relevância deste aspecto é ressaltada por Marli André (1995), ao recorrer à etimologia da palavra etnografia que significa "descrição cultural", relatando também que: "O que se tem feito, pois, é uma adaptação da etnografia à educação, o que me leva a concluir que fazemos estudos do tipo etnográfico e não etnografia no seu sentido estrito."(ANDRÉ, 1995, p.28).

A escolha pela abordagem etnográfica deve-se também por nos dar possibilidades de suspeitar sobre a multiplicidade de significados envolvidos numa dada situação e esse diálogo que se estabelece entre a fundamentação teórica e os dados obtidos culminam num movimento envolvendo arranjos, rearranjos na tentativa de uma nova estruturação do real.

Assim, podemos afirmar que tomamos da etnografia recortes específicos para montar as estratégias e perfis da pesquisa, fazendo uso de técnicas associadas, mapeando e tentando interligar as informações coletadas, percebidas e interpretadas pelos alunos e pelo professor, que compõem uma sala de aula de Geometria Analítica e Álgebra Linear I no semestre de 2007.1 do curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS) objetivando fundamentar de forma concisa esta pesquisa.

Em um primeiro momento, resolvemos examinar, observar e analisar como estavam estruturados os aspectos organizacionais e culturais que emergiam naquele ambiente, uma espécie de prévio conhecimento dos atores que compunham aquele espaço. E na segunda parte do curso, já conhecendo as características dos elementos envolvidos neste processo, focalizando as representações gráficas na abordagem dos assuntos retas e planos, interligando a uma análise que se constitui numa rede de intercâmbios entre as informações colhidas e fornecidas direta ou indiretamente pelos protagonistas deste estudo.

2 DESENHOS, GRÁFICOS, FIGURAS: PROCESSOS SEMIÓTICOS NUMA ABORDAGEM SÓCIO – CULTURAL.

No período compreendido entre a Idade Antiga e a Idade Média há predominância do aspecto geométrico (desenhos e gráficos) a se combinar com a retórica. De modo que, possivelmente neste período, os símbolos ainda não eram considerados como um elemento agregado à tentativa de transmissão do conhecimento matemático.

Entre os séculos XVII e XIX, se inicia uma mudança de paradigma, a linguagem geométrica (desenhos, gráficos e figuras) vai gradualmente perdendo espaço para o formalismo da álgebra e análise. Da explícita valorização das figuras em obras como Os Elementos de Euclides, nas quais definições, axiomas e postulados tinham como recorrência o elemento figural às abstratas demonstrações. Este é um período onde o caráter formal se instaura na matemática, tendo seus alicerces fincados no formalismo dedutivo. Em outras palavras, desde então as demonstrações matemáticas, inclusive geométricas, deveriam ser fundamentadas a partir do enfoque analítico – algébrico, de modo que desenhos, figuras e gráficos passariam a assumir uma função auxiliar, complementar ou meramente ilustrativa.

A geometria analítica de René Descartes (1596-1650) parecia percorrer uma trilha de equilíbrio entre as linguagens algébricas e geométricas, visto que o método cartesiano de Descartes consistia em associar equações aos entes geométricos ou associar aos entes geométricos as suas equações, possibilitando assim, tirar conclusões acerca destes elementos.

Numa abordagem cronológica, destacamos algumas concepções a respeito da relevância ou irrelevância do elemento figural em geometria analítica:

> *A obra de Descartes é com demasiada freqüência descrita simplesmente como aplicação da álgebra à geometria, ao passo que na verdade poderia ser bem caracterizada como sendo a tradução de operações algébricas em linguagem geométrica. (...) Descartes tinha discutido os méritos relativos da álgebra e da geometria, sem mostrar parcialidade por nenhuma delas. Acusava a segunda de usar, demasiado pesadamente, diagramas que fatigam desnecessariamente, e a primeira de ser uma arte confusa e obscura que embaraça a mente. (*BOYER, 1998, p.232)

A tradução da linguagem algébrica em linguagem geométrica é uma característica da geometria analítica. O duplo objetivo do método de Descartes era estabelecer trocas entre a geometria e a álgebra, ou seja, através de processos algébricos libertar a geometria de diagramas e dar significados às operações da álgebra por meio de interpretações geométricas.

Passamos então ao século XIX com Pliicker (1801-1868), que se tornou o primeiro especialista em geometria analítica, destacando que: "Os métodos algébricos eram muito preferíveis aos puramente geométricos (...)" (*Op.cit.* p.373.) Neste ponto, há uma menor valoração da linguagem geométrica.

O caráter dedutivo e formal da geometria culminou com a obra *Grundlagen* de Hilbert (1862-1943) *(Ibid.* p.424*)* onde a geometria tomava emprestado da álgebra e análise um caráter puramente formal.

Período também em que se realizou criteriosa análise da obra de Euclides culminando com a conclusão de que apesar de apresentar uma estrutura dedutiva, seus Elementos estavam eivados de hipóteses ocultas, definições sem sentido e falhas lógicas.

Enfim, o que queremos trazer à reflexão é precisamente o fato análogo, similar àquele que motivou tal norma: a participação construtiva, essencial dos desenhos, gráficos e figuras nos processos comunicativos e interpretativos que envolvem uma produção de conhecimento matemático em um ambiente de ensino-aprendizagem.

Tal consideração é discutida na seguinte afirmação:

> "Mathematicians have been aware of the value of diagrams and other visual tools both for teaching and as heuristics for mathematical Discovery. … But despite the obvious importance of visual images in human cognitive activities, visual representation remains a second-class citizen in both the theory and practice of mathematics. In particular, we are all taught to look askance at proofs that make crucial use of diagrams, graphs, or other non-linguistic forms

> of representation, and we pass on this disdain to students." However, "visual forms of representation can be important … as legitimate elements of mathematical proofs." (BARWISE and ETCHEMENDY, 1991 *apud* ARCAVI, 2003, p.226).[1]

No entanto, existem controvérsias acerca de que o elemento figural seja apenas um termo auxiliar; conforme declara Bkouche (1982):

> Foi dito freqüentemente que as figuras serviam de apoio ao raciocínio geométrico. Não penso assim, o raciocínio geométrico se constrói para estudar objetos que são as figuras, assim como o raciocínio mecânico se constrói para estudar objetos que são os corpos em movimento; não se poderia pretender considerar o movimento como simples suposta do raciocínio mecânico ou os fenômenos calóricos como suposta do raciocínio termodinâmico. (BKOUCHE, 1982, p.61-62).

Com que olhar professor e alunos concebem, valorizam o elemento imagético nas aulas de geometria analítica? É principal ou secundário? É um protagonista ou um coadjuvante? É auxiliar ou fundamental? É um apoio ou sustentáculo? Nesta perspectiva antagônica, tentaremos entender como se constitui essa "engrenagem" composta por representações (entes algébricos e geométricos) e significados.

Em outras palavras: Como o professor e os alunos dão significado(s) a um objeto matemático, em um determinado ambiente, cercado por inúmeras influências e concepções?

Traçamos um caminho a seguir recompondo e retomando opiniões, conceitos, concepções de teóricos que contribuíram direta ou indiretamente na composição da nossa investigação.

Num primeiro momento desejamos fomentar alguns aspectos comparativos na tentativa de estabelecer analogias e destacar pontos de contatos entre a linguagem matemática e a teoria semiótica, visto que na composição da linguagem matemática estão os signos. Do perfil dos signos como imitação do real à sua relação binária entre o abstrato e o real. Nesta perspectiva Cláudia Flores (2006) parafraseando Foucault destaca:

---

[1] "Os Matemáticos têm sido conscientes do valor de diagramas e outras ferramentas visuais para ensinar e como hipóteses para a descoberta matemática... Mas apesar da óbvia importância das imagens visuais nas atividades cognitivas humanas, a representação visual ganha um *status* de segunda classe, em ambas, a teoria e a prática da matemática. Em particular, nós somos todos ensinados a ter um olhar questionante a ensinamentos que fazem um uso crucial de diagramas, gráficos, ou outras formas não lingüísticas de representação, e nós examinamos este desdém nos estudantes. "Entretanto, formas visuais de representação podem ser importantes.... como elementos legítimos de provas matemática."

> Nessa concepção epistemológica, as coisas trazem consigo sua própria marca e, além disso, cada uma se aparelha com a outra na medida em que se relacionam. Daí, o número, por exemplo, pode ser uma grandeza quadrada, ou um segmento de reta, ou ainda, uma grandeza não conhecida, cada qual trazendo consigo sua própria marca, em analogia ao mundo natural – as formas geométricas estão na natureza assim como os números. Tudo tem sua finalidade na natureza. Logo tudo se aproxima e si enrola sobre si mesmo. (FLORES, 2006, p.82-83).

> (...) Enfim, a invenção do simbolismo matemático de Viète, e mais particularmente de Descartes, uma primeira versão de escritura simbólica em matemática é apresentada, dando ordem à matemática e ao pensamento matemático. Daí o surgimento da duplicação dos objetos matemáticos enquanto objetos do pensamento e objetos representados. (*Ibid*. p.86).

A estreita relação que se estabelece entre representação, pensamento e o mundo real integram o processo sígnico; o qual é propagado em variadas áreas de conhecimento, dentre elas a matemática, caracterizada pela formalização da linguagem algébrica imbricada ao aspecto visual da linguagem geométrica constituindo uma significação; como assevera Jean Ladrière (1977):

> A significação é uma relação entre o signo e uma entidade pertencente ao mundo real ou ao mundo ideal (indivíduo, classe, propriedade ou relação). (O mundo ideal é aquele das entidades não empiricamente captáveis, tais como os objetos matemáticos ou as realidades lógicas). (LADRIÈRE, 1977, p.20)

O elo que se estabelece entre o que é real e o que é representação do real alarga-se na esclarecedora afirmação de Peirce (1972) ao definir representação como:

> Estar no lugar de, ou seja, estar em relação tal com outro que, para certos propósitos, algum espírito o trará como se fosse aquele outro. Assim, um porta-voz, um deputado, advogado, agente, um diagrama, um sintoma, uma descrição, um conceito, uma premissa, um testemunho, todos representam algo diverso, sob variadas formas, para espíritos que os considerem sob esse prisma. (PEIRCE,1972, p.114).

O termo “espírito” na visão peirceana é equivalente ao intérprete, indivíduo que ao observar ou estabelecer algum tipo de relação com o objeto, situação ou imagem atribui significados, gerando interpretações, as quais são circunstanciadas, dinâmicas, promovendo um movimento intersubjetivo, consubstanciando-se num processo em que um termo, expressão ou situação é sempre explicado a partir da recorrência a outros termos, expressões ou situações, alimentando e delineando o movimento no processo comunicativo. No entanto, a distinção entre aquilo que representa algo, os atos e relações de representar e o elemento que garante a validade do signo, ainda que na ausência do intérprete, recebe as denominações ‘Representamen’ e ‘Representação’ e ‘Interpretante’ *(Ibid.,* p.94*)*, nesta ordem.

Na argumentação de Umberto Eco (1974), o interpretante é definido e exemplificado, podendo assumir diversas formas, possibilitando maior clareza no nosso discurso:

> (a) pode ser o signo equivalente (ou aparentemente equivalente) em outro sistema comunicacional. P. ex., à palavra / cão / faço corresponder o desenho de um cão;
> (b) pode ser o indicador apontado para o objeto isolado, talvez subentendendo um elemento de quantificação universal (“todos os objetos como este’);
> (c) pode ser uma definição científica (ou ingênua) nos termos do próprio sistema de comunicação. Ex.: / sal / significa “cloreto de sódio”;
> (d) pode ser uma associação emotiva que adquire valor de conotação fixa: / cão / significa “fidelidade” (e vice-versa);
> (e) pode ser a simples tradução do termo em outra língua. (ECO, 1974, p.18).

Perceber que o interpretante traz intrinsecamente em suas variadas formas de interpretação, indicadores que são contextualizados culturalmente, nos coloca diante de vasto e profícuo percurso investigativo, mostrando-nos que a comunicação através das contínuas permutações remetendo-nos de signo para signo e no nosso caso específico, transitando entre representações algébricas e geométricas permitindo comparativos entre o vasto sistema comunicacional na produção de significados na sala de aula de Geometria Analítica.

2.1 Educação Matemática Sob o Prisma Semiótico (Fundamentos Teóricos)

Neste capítulo objetiva-se descrever alguns dos aspectos mais relevantes das teorias que embasarão este estudo, permitindo descrever ou interpretar os episódios observados em uma sala de aula de Geometria Analítica.

O crescente interesse entre o binômio semiótica e educação matemática nos últimos anos vem sendo fundamentado a partir de varias razões com diferentes enfoques. A principal delas é a argumentação de que a atividade matemática é, aprioristicamente, uma atividade simbólica devido principalmente a generalidade dos seus objetos. Em um outro ângulo a atenção dada à língua e ao discurso matemático, já não visto somente como uma ferramenta mais ou menos útil para expressar o pensamento, ressaltando a investigação do processo comunicativo em salas de aulas; interligando-se a uma outra vertente, onde a relação entre os signos e a produção de significados imersa em um contexto cultural também situa o campo semiótico como apto a esclarecer as profícuas discussões acerca destas relações.

Partindo destas considerações sentimos a necessidade de pesquisarmos as teorias e os perfis de alguns teóricos que dedicaram suas atenções, direta ou indiretamente, às relações semióticas.

Num primeiro momento, destacaremos as idéias dos precursores da semiologia (Ferdinand de Saussure) ou da semiótica (Charles Sanders Peirce); agregando-se a algumas concepções de Vygotski e Piaget.

Em um segundo momento, ressaltamos os estudos dos teóricos que efetivamente estabelecem intercâmbios entre a semiótica e a matemática como Michael Otte, Raymond Duval, Luis Radford e Godino, fazendo interseções entre os estudos de Fainguelent por ressaltar o aspecto representacional em geometria, assim como Barufi, que discutem questões que abordam a construção de significados.

2.1.1 – Ferdinand de Saussure (1857 – 1913)

Lingüista suíço e contemporâneo de Peirce, Saussurre também pode ser considerado um dos pioneiros nos estudos semiológicos e suas concepções ganham repercussão através do Curso de Lingüística Geral, publicado somente três anos após o seu falecimento. Curiosamente, esta obra foi elaborada a partir das anotações de seus alunos em aulas que ministrou na Universidade de Genebra entre 1907 e 1911. Já que ele costumava destruir seus rascunhos e notas de aulas, restando apenas os apontamentos de alguns de seus discípulos. Desta forma, esta composição é construída pelos reflexos da sua exposição oral nestes cursos.

É relevante efetuarmos algumas aproximações entre a teoria sussureana e a produção de significados. No entanto, destacamos primeiro algumas particularidades do programa semiológico de Saussure. Para ele o signo possui duas faces (bifacial), mesmo sendo constituído por três termos (signo, significante e significado), pois, neste caso, o objeto de referência é excluído. Assim, nesta abordagem, o signo é o todo, sendo constituído pela união do significante (imagem acústica) e o significado (conceito).

O signo saussureano é comparado às duas faces de um papel onde:

> O pensamento é o anverso e o som o verso; não se pode cortar um sem cortar, ao mesmo tempo, o outro; assim tampouco, na língua, se poderia isolar o som do pensamento, ou pensamento do som; (...).(SAUSSURE, 2006, p.131).

Ainda sobre a unidade sígnica:

> O signo lingüístico é, portanto, o que F. de Saussure denomina uma entidade psíquica de duas faces, a combinação indissolúvel, interior do cérebro humano, do significado e do significante. São realidades que têm sua rede (seu traço) no cérebro; elas são tangíveis, e a escrita pode fixá-los em imagens convencionais .(DUBOIS, 2004, p. 542).

Se para Saussure tanto o significado como o significante são entidades mentais inseparáveis, então interpretando um signo estamos projetando sobre ele nossas impressões e concepções. Assim, depreende-se que as influências sócio-culturais são propagadas no objeto sígnico.

Então se nos indagarmos: Quando ouvirmos as palavras “reta” ou “plano”, o que surge imediatamente em sua mente? Bem, como os protagonistas da nossa investigação são alunos e professor de matemática; possivelmente, variadas retas e diversos planos aparecem em suas mentes como significantes do que eles conceituam como reta e plano.

Outro aspecto também relevante que distingue a visão peirceana da saussureana é abordado por Souza (2006) ao afirmar que:

> (...) dentro da semiologia, um papel dominante foi associado à lingüística e o signo saussureano se inclinou muito mais para uma semiótica da cultura, deixando de lado a investigação de fenômenos naturais, como foi fortemente recomendado por Peirce, (...) (SOUZA, 2006, p.15)

Falar em semiótica da cultura é abordar o fator arbitrário e convencional do signo. Conforme se depreende das idéias de Whitney (1875):

> Cada palavra transmitida a nós em cada língua humana é um signo arbitrário e convencional: arbitrário porque qualquer das milhares de outras palavras correntes entre os homens, ou das dezenas de palavras que poderiam ter sido fabricadas, poderiam igualmente ter sido aprendidas e usadas para o mesmo fim; convencional, porque a razão do uso desta palavra em vez de outra está somente no fato de que esta palavra já está sendo usada na comunidade à qual o falante pertence. (WHITNEY, 1875, apud. NÖTH, 1996, p.24).

No nosso estudo, a comunidade é uma sala de aula de Geometria Analítica, cujos falantes são os alunos e professor circundado por signos matemáticos (convencionais), repercutindo conceitos e imagens acústicas individuais e coletivas, percebe-se desta forma que a linguagem matemática, mesmo sendo constituída de símbolos não lingüísticos transporta em si características da teoria sígnica de Saussure.

2.1.2 – Charles Sanders Peirce (1839 – 1914)

O interesse do pensador norte-americano Charles Peirce, circundava entre a filosofia, a lógica e a matemática, com ênfase para o pragmatismo, que segundo ele seria um método para determinação de significados.

Em 1878, Peirce formula sua máxima pragmática, reformulada em 1905, adquirindo a seguinte forma:

> "Todo propósito intelectual de qualquer símbolo consiste na totalidade dos modos gerais de conduta racional que, na dependência de todas as possíveis e diversas circunstâncias e desejos asseguram a aceitação do símbolo." (PEIRCE, op.cit. p.18).

Interpretaremos então que o termo conduta racional assimila-se ao aspecto social do significado do símbolo. Pois para ele*,* "o significado não é uma "idéia" que o símbolo evoca na mente, mas conseqüência da conduta que gera nos homens (racionas)." (*Ibid*., p.18). Em resumo, o significado do símbolo está vinculado às concepções culturais e sociais do indivíduo interpretante.

Peirce também busca elucidar o significado de termos gerais como utilizando exemplos substantivos e adjetivos a partir de condicionantes, ou seja, em enunciados, onde o predicado se aplica diretamente ao sujeito (como em "Isto é leve", por exemplo), devem ser entendidos como: <u>Se</u> o algodão flutua, <u>então</u> o algodão é leve. Para ele um condicional (sob certas condições) bastaria para esclarecer o significado de um termo.

Outro aspecto relevante e um tanto contraditório nas concepções deste estudioso fazem referência à transformação ou tradução de um termo em outro. Pois segundo ele:

> Um termo que não se transforma da maneira prevista é destituído de significado. Se o experimentador é incapaz de traduzir o enunciado, dando-lhe a forma indicada, o termo não tem sentido. Pode, é claro, evocar imagens ou estimular emoções, mas não tem sentido para a ciência. (*Ibid*., p.25).

Esta necessidade de mobilização entre os significados dos termos tem como conseqüência a equiparação entre eles, com características sinônimas. No entanto, Peirce encara como irrelevantes as imagens evocadas por estes termos, o que consideramos, um tanto contraditório, já que a movimentação ou tradução entre termos e expressões passa por elementos imagéticos, sendo sinônimos destes elementos equivalentes entre si no processo comunicacional.

O signo na concepção peirceana "é (...) algo que representa algo para alguém sob determinado prisma," (*Ibid.,* p.26) adquirindo um significado amplo; pois pode ser uma palavra, uma ação, um pensamento, enfim, qualquer coisa que permita um interpretante.

Ressaltamos também que ele distinguia símbolo de signo, devido ao aspecto convencional do primeiro. No sentido peirceano, o convencionalismo é acolhido em termos de "Regras", admitidas pela comunidade que se vale dos símbolos. A linguagem seria algo que caberia nesta categoria.

Trazendo à baila as concepções peirceanas acerca da matemática, primeiro como "a ciência que tira as conclusões necessárias" e segundo como "o estudo do que é verdadeiro ao estado das coisas hipotético", (PEIRCE, 1932, *apud.* CAMPOS, 2007, p.1) reconhecer a matemática como a ciência das hipóteses e conclusões necessárias, aponta para os aspectos dedutivos fincados nas hipóteses objetivando uma conclusão ou tese.

Campos (2007) também ressalta a opinião de Peirce acerca da utilização de diagramas e ícones na ação da imaginação matemática:

> Para Peirce, trazer uma pura hipótese 'ao campo da imaginação' ou 'ao olho da mente' não é uma mera metáfora. Isso significa que nós somos capazes de representar este mundo puramente hipotético, através de um 'signo'. Mais forte e preciso, devemos representar um mundo matemático puramente hipotético por meio daquilo que Peirce chama de diagrama. (*Ibid.* p.5).

O fator abstrato característico do mundo hipotético matemático adquire um contorno concreto quando representado por desenhos, modelos e gráficos, sendo um suporte no ato imaginativo. Assim, inferimos que a imaginação gráfica é uma espécie de corporificação dos elementos abstratos matemáticos.

Campos (2007) complementa, que:

> Um diagrama, assim é um signo que representa em nossas mentes os objetos e as relações que estão de acordo com nossas hipóteses. (...), mas o diagrama é

> um signo que conduz um significado ao nosso 'olho da mente' – sendo o 'significado' a forma das relações que se sustentam de acordo com nossa hipótese simples. De acordo com Peirce, existem dois tipos de diagramas matemáticos, (a) o geométrico, "que é composto por retas" e (b) o algébrico, "que são agrupamentos de letras e outros caracteres as quais suas inter-relações estão representadas parcialmente por sua própria disposição e parcialmente por suas repetições." (*Ibid*. p.5).

Em nossa discussão, reconhecemos semelhanças e pontos de interseção, visto que a produção de significado em uma sala de aula se processa na passagem, tradução ou transformação entre os objetos matemáticos. Assim, um termo matemático passa a ter sentido para o aluno (intérprete) quando ele consegue encontrar outro elemento sinônimo deste termo. Como, por exemplo:

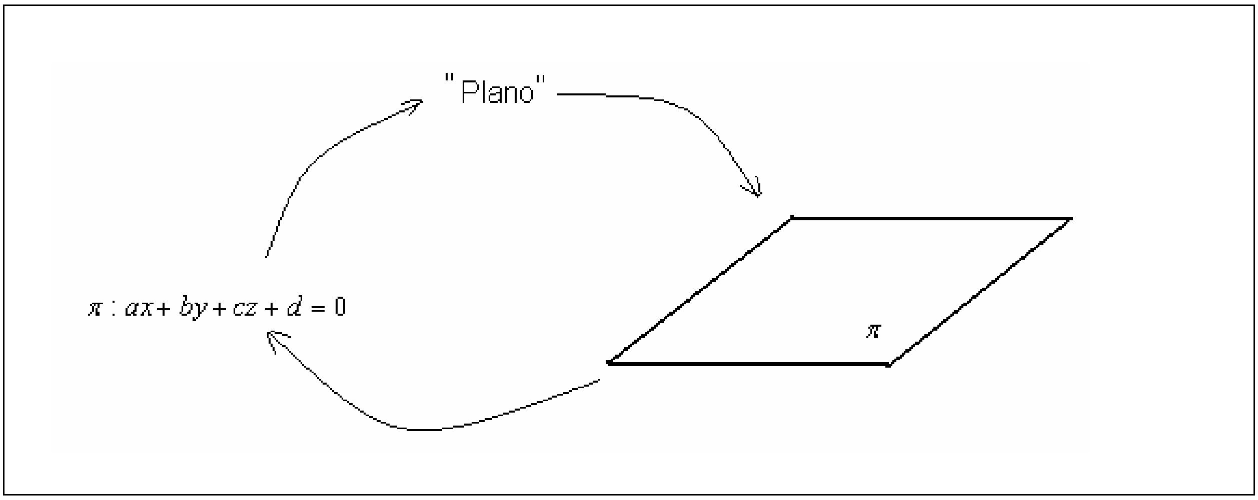


Figura 1: Algumas representações de um plano

2.1.3 – Lev Semenovich Vygotski (1896 - 1934)

A nossa abordagem vygotskiana, destaca influências sobre o desenvolvimento cognitivo, ressaltando a função do signo como elemento mediador. Conforme destaca Radford (2006):

> El signo desempeña una función medidora entre el indivíduo y su contexto, y permite, además, esse paseje entre lo interpsicológico y lo

> intrapsicológico que asegura la reconstrucción interna de la acción, esto es, su internalización. (RADFORD, 2006, p.11)[2]

Pensar o signo com a característica de mediação presente em toda atividade humana é admitir que o sistema de signos interliga os seres humanos com o mundo e entre si. Ainda neste sentido, Vygotski (1984) estabelece uma interessante analogia entre a criação e a utilização de instrumentos como auxílios nas ações concretas e o signo é um destes, recebendo a denominação de "instrumentos psicológicos", tendo como função auxiliar os homens em suas atividades psíquicas. Conforme depreende: "O signo age como um instrumento da atividade psicológica de maneira análoga ao papel de um instrumento no trabalho." (VYGOTSKI, 1984, p.59-60).

A idéia do signo como objeto cognitivo, inspirado na idéia de um instrumento de trabalho, um elemento que auxilia o pensamento. Nesta perspectiva, Radford (2006) destaca o enfraquecimento das idéias de Saussure e Peirce:

> Con ella, Vygotski rompió el esquema tradicional del idealismo e del racionalismo. El signo no es simplesmente pieza diferencial de um sistema de estructuras (Saussure) ni mero medio de pensamiento y de formación de ideias (Peirce), sino, sobre todo, medio de transformación de las funciones psíquicas del indivíduo. (op.cit. RADFORD, p.11)[3]

No entanto, surgiram críticas acerca da concepção de signo de Vygotsky enfatizando o demasiado aspecto técnico, sendo denominada como uma "psicotecnologia".

Vygotski também dedica particular atenção à questão da linguagem, entendida como um sistema simbólico fundamental em todos os grupos humanos, visto que através da linguagem é possível designar os objetos do mundo exterior mesmo quando eles estão ausentes. Em outras palavras, através da linguagem é possível analisar, abstrair e generalizar as características dos objetos, eventos, situações presentes na realidade. Nota-se também proximidades com a linguagem matemática, cujo intuito formal dedutivo é analisar, abstrair e generalizar os entes matemáticos.

---

[2] O signo desempenha uma função mediadora entre o indivíduo e seu contexto, permitindo, além disso, a passagem entre o interpsicológio e o intrapsicológico, assegurando a reconstrução interna da ação, isto é, a sua internalização.

[3] Com ela, Vygotski rompeu com o esquema tradicional do idealismo e do racionalismo. O signo não é simplesmente peça diferencial de um sistema de estruturas (Saussure) nem mera medida de pensamento e de formação de idéias (Peirce), sendo, sobretudo, medida de transformações psíquicas do individuo.

2.1.4 – Jean Piaget (1896 – 1980)

A semiótica piagetiana, caracterizada pelo papel do símbolo no desenvolvimento cognitivo, apoiando algumas de suas idéias no jogo simbólico entre significante e significado influências da teoria saussureana. Já que segundo ele:

> A representação começa quando há, simultaneamente, diferenciação e coordenação entre “significantes” e “significados”, ou significações. Ora, os primeiros significantes diferenciados são fornecidos pela imitação e o seu derivado, a imagem mental, as quais prolongam a acomodação aos objetos exteriores. (PIAGET,1975, p.12)

Piaget introduz o conceito de função semiótica, estruturado a partir do seguinte questionamento: É possível que o pensamento seja um resultado exclusivo da linguagem?

Tal inferência ressaltava a sua insatisfação em relação a concepção positivista do século XX, “que tudo é linguagem e que o acesso à verdade lógica é assegurado por um exercício sadio da língua.” (PIAGET, 1973, p.104). Neste ponto ele argumentou que:

> Sem dúvida a linguagem não permanece como condição necessária do acabamento das estruturas lógicas, em todo o caso no nível dessas estruturas proposicionais, mas ela não constitui entretanto uma condição suficiente de formação e isso ainda menos no que concerne às estruturas lógico-matemáticas mais elementares. (PIAGET, 1973, p.100).

Nesta abordagem, Piaget traça um percurso através das etapas do desenvolvimento humano, refletindo e analisando se existe um nível deste ciclo, em que a linguagem passa a constituir uma condição necessária e suficiente no desenrolar deste processo.

Ele destaca também, que a formação do pensamento como “representação” é correlata à aquisição da linguagem na criança, sendo solidárias entre si (linguagem e representação) constituindo assim a função simbólica também denominada de função semiótica. Esta consideração é ressaltada com a seguinte afirmação: “(...) a linguagem aparece no mesmo nível de desenvolvimento que o jogo simbólico, a imitação diferenciada e sem dúvida a imagem mental enquanto imitação interiorizada.” (PIAGET, 1973, p.108).

Em suma, com a linguagem, o jogo simbólico e a imagem mental; surge o processo conceitual. No entanto, é relevante destacar que a linguagem é um elemento constituinte e complementar desse processo; sendo desenvolvida paralelamente ao plano das representações. Em outras palavras, a linguagem é uma das partes que compõe o todo no desenvolvimento psicológico do sujeito cognoscente. Visto que:

> é a função semiótica, resultante do progresso da imitação (a conduta sensoriomotora mais próxima da representação, mas em atos), e não é à linguagem somente, que devemos atribuir essa mudança fundamental e decisiva de direção na elaboração dos instrumentos de conhecimento. Em outras palavras, a passagem das condutas sensoriomotoras para as ações conceitualizadas deve-se não apenas à vida social mas também aos progressos da inteligência pré-verbal em conjunto à interiorização da imitação em representações. (PIAGET, 1990, p.19).

Implica dizer que sem esses determinantes prévios, tanto a aquisição da linguagem quanto as transmissões e interações sociais seriam impedidos de existirem, já que são considerados como condições necessárias destas.

A função semiótica, o advento da representação ou do pensamento são elementos que reluzem nos estudos piagetianos sobre o desenvolvimento humano, também denominado de epistemologia genética.

2.2 Os vários olhares.

2.2.1 – Epistemologia Matemática e Semiótica

São vários os estudos desenvolvidos atualmente que entrelaçam a semiótica e a educação matemática. São analisadas e discutidas questões que envolvem desde os signos matemáticos à formação da linguagem algébrica tendo como argumentação e fundamentação os aspectos semióticos. Seguimos a nossa trajetória destacando concepções e inferências que venham agregar e ajudar a esclarecer alguns dos nossos questionamentos.

Michael Otte[4] (2001) aborda, em um dos seus artigos, o tema epistemologia matemática em um ponto de vista semiótico, depreendendo que: “Um signo pode ter diferentes tipos de significados, dependendo do código e do contexto, ou seja, signos, além de fazerem parte de um sistema formal, têm significado objetivo.” (OTTE, 2001, p.11).

Neste sentido, ressaltando uma das abordagens que surgem em nossa pesquisa. Refere-se ao tráfego da linguagem matemática e não-matemática constituintes do processo comunicativo e interativo em sala de aula; dando margem para interpretações diversas. Ou seja, uma simples palavra pronunciada pelo professor, que associa consciente ou inconsciente em certo significado para a mesma, pode ser significada pelo aluno de uma maneira própria e essencialmente diferente. Isto é ratificado pela seguinte declaração;

> Cuando la gente se habla no comparte la misma cultura, conocimientos, valores y presuposiciones, la comprensión mutua puede ser especialmente difícil. Esta comprensión es possible através de la negociación del significado. Para cegociar el significado com alguien, uno tiene que darse cuenta de lãs diferencias de fondo, y respetarlas, así como saber cuando son importantes. Es necesaria una diversidad suficiente de experiencias personales y culturales para darse cuenta de que existen visiones del mundo distintas, divergetnes, y, darse cuenta de como pueden ser. También se requiere paciencia, una certa flexibilidad em la visón del mundo y una tolerancia generosa para los errores, así como cierto talento para dar com la metáfora correcta que comunique las partes relevantes de lãs experiencias comunes mientras se quita énfasis a lãs otras. La imaginación metafórica es una habilidad crucial para crear relaciones y comunicar la naturaleza de lãs experiencias que no son comunes. (LAKOFF y JOHNSON, 1986, *apud*. BARUFI, 1999, p.44).[5]

No tocante às observações de Otte (2001), destacamos também que:

---

[4] Michael Otte é professor e diretor do Institut der Didaktik da Universidade de Bielefeld, da Alemanha, e tem colaborado no Programa de Educação Matemática da UNESP de Rio Claro.

[5] Quando as pessoas que falam não compartilham da mesma cultura, conhecimentos, valores e pressupostos, a compreensão mútua pode ser particularmente difícil. Esta compreensão é possível através da negociação do significado. Para negociar o significado com alguém é preciso dar-se conta das diferenças de fundo, e respeitá-las, como também saber quando são importantes. É necessária uma diversidade suficiente de experiências pessoais e culturais para dar-se conta de que existem visões de mundo distintas, divergentes, e para perceber como podem ser. Requer-se também paciência, uma certa flexibilidade na visão de mundo e uma generosa tolerância para com os erros, assim como certo talento para encontrar a metáfora correta que comunique as partes relevantes das experiências que são comuns, tirando a ênfase das outras. A imaginação metafórica é uma habilidade crucial para criar relações e comunicar a natureza das experiências que não são comuns.

> A epistemologia semiótica, conseqüentemente, começa da suposição de que as características essenciais de um ato de criação imaginativa consistem em ver um A como um B: A = B, bem como em que uma igualdade não é estabelecida por lógica apenas. Em matemática, verificam-se sempre novas representações do mesmo. Um objeto matemático, tal como "número" ou "função", não existe independentemente da totalidade de suas possíveis representações, mas também não deve ser confundido com qualquer representação particular. A objetividade matemática depende da "superdeterminação" (*overdetermination*), que simplesmente significa que existe mais de um modo de chegar lá.(*Ibid*., p.15).

Exemplificaremos com algumas representações do número 2, (1 + 1); $\frac{4}{2}$; 6 – 4; significando dizer que existem mais de uma maneira de chegar lá.

Ele prossegue suas considerações; deixando transparecer influências da teoria Peirciana ao sintetizar as concepções acerca do significado, declarando que:

> (...) essa noção de significado é inseparavelmente associada à idéia de possibilidade, porque a possibilidade expressa um relacionamento entre o geral e o particular, entre lei e aplicação ou hábito e regra, ou ainda entre limitantes e limitados. Uma disposição de comportamento nada é senão uma tal relação. Um possível, em contraste com algo real, é alguma coisa que pode ter um efeito objetivo no futuro. Um signo determina seu intérprete, produzindo nessa pessoa um interpretante, que representa o objeto no mesmo tipo de relação que aquela que o próprio signo representa. (*Ibid*., p.20).

No processo argumentativo matemático é freqüente a relação que se estabelece entre as expressões do particular para o geral (generalizações), ou de uma lei à sua aplicação; ou seja, o discurso matemático é caracterizado por suas relações entre os elementos. Observa-se um discurso semelhante num processo interpretativo de um signo.

Otte (2001) destaca também o que é necessário para compreender um desenho geométrico ou um diagrama matemático em termos semióticos, pois segundo ele temos que "levar em conta não só sua aparência concreta, mas também a sua funcionalidade." (*Ibid*., p.14). Neste sentido é transformar os diagramas até que algum fato perceptual se torne transparente para nossa interpretação.

2.2.2 – Registros de Representação Semiótica

Raymond Duval[6] discute o problema da heterogeneidade de registros semióticos na matemática, destacando que isto constitui uma das maiores dificuldades no aprendizado matemático, devido à diversidade de registro e a necessidade de transitar entre os elementos significativos matemáticos (gráficos, equações, conceitos, proposições, etc.). Ele defende também que a produção de conhecimentos matemáticos exige ferramentas semióticas adaptadas aos processos cognitivos, ou seja, o visual (imagens) entrelaça-se aos aspectos de ensino / aprendizagem. Isto significa dizer que não existe compreensão sem a recorrência mental às representações semióticas.

Desta forma podemos dizer que os estudos de Duval (1995) versam principalmente sobre Psicologia Cognitiva, com ênfase para a obra "Sémiosis et Penseé Humaine", servindo de inspiração para proveitosos estudos em Educação Matemática.

Sua abordagem envolve, sobretudo, problemas de aprendizagem em matemática destacando os registros de representações semióticas, pois segundo ele os obstáculos encontrados pelos alunos na aprendizagem de matemática está na dificuldade de transformação simultânea entre os elementos matemáticos, ou seja, "(...) a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica". (DUVAL,2003, p.15).referindo-se a um mesmo objeto matemático.

Apesar de não estarmos imbuídos nas questões específicas de ensino e aprendizagem, reconhecemos que os estudos de Duval ganham especial relevo na valorização das facetas semióticas na matemática. Flores (2006) destaca esta questão tomando como base este autor:

> (...) as representações no domínio da matemática são consideráveis, já que os objetos matemáticos, não sendo acessíves pela percepção, só podem sê-lo por

---

[6] Filósofo e psicólogo, desenvolveu estudos em Psicologia Cognitiva no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática (Irem) de Estrasburgo, na França(1970 -1999). Atualmente é professor emérito na Université du Littoral Cote d' Opale, França.Duval trata principalmente do funcionamento cognitivo, implicando sobretudo na atividade matemática e nos problemas de tal aprendizagem.

> representação, lembrando que um mesmo objeto matemático poderá ter representações diferentes dependendo da necessidade e do uso. (...) a função, por exemplo, pode se ter um registro de representação lingüística (função linear), um registro de representação simbólica (y = x ou f(x) =x), ou ainda, um registro de representação gráfica (o desenho do gráfico da função). (FLORES, 2006, p. 79-80).

A possibilidade de representação de um mesmo elemento matemático em variados sistemas nos conduz a reconhecer que no processo de produção de significados armamos uma rede de relações e intercambiamos as matérias significantes; estabelecendo uma leitura como destaca Peruzzolo (2004): "Ler quer dizer colher os sinais, isto é, captar os traços nas suas relações significantes de tal modo que se possa ver neles o que eles pretendem em termos de significação." (PERUZZOLO, 2004, p. 95)

Nesta perspectiva o discurso matemático se propaga em diversos sentidos, capturando as variáveis: figurais, escalares ou lingüísticas, estando intrinsecamente ligadas neste processo interpretativo. Pois ao interpolarmos as informações ou referências que podem ser extraídas desta diversidade de registros de representações, o intérprete passa a ter um leque de possibilidades na construção de suas concepções e interpretações.

Duval (2003) destaca a grande variedade de representações semióticas utilizadas em matemática, sendo elucidativo a seguinte afirmação:

> Além dos sistemas de numeração, existem as figuras e formas geométricas, as escritas algébricas e formais, as representações gráficas e a língua natural, mesmo se ela é utilizada de outra maneira que não a da linguagem corrente. (DUVAL, *op.cit.*, p.14).

Ele ressalta também a classificação dos diferentes tipos de registros empregados na atividade matemática, conforme tabela:

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO-DICURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural Associações verbais (conceituais); Forma de raciocinar: • argumentação a partir de observações, de crenças ...; • dedução válida a partir de definição ou de teorema.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). • apreensão operatória e não somente perceptiva; • construção com instrumentos.

REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: • numéricas (binária, decimal, fracionária); • algébricas; • simbólicas (línguas formais). Cálculo	Gráficos cartesianos. • mudanças de sistema de coordenadas; • interpolação, extrapolação.

Quadro 1: Classificação de diferentes registros empregados na atividade matemática

Fonte: Duval (2003), p. 14.

Nessa concepção o processo interpretativo matemático requer a ordenação de variados registros que podem ser simbólico, figural ou língua natural. Esta última, segundo Duval (1995), constitui:

> (...) um registro diferenciado, não somente pelo fato de sua grande complexidade e do número considerável de variações que oferece, mas por ela permitir o discurso. Como registros discursivos, termos além da língua natural, os sistemas numéricos, as línguas formais e as notações algébricas. São registros não discursivos, as figuras geométricas e os gráficos cartesianos. (DUVAL, 1995, *apud.* KARRER, 2006, p.25).

Esta distinção deve-se às variadas formas de emprego da língua natural, seja através das funções comum, social, literária ou especializada. No nosso caso específico percebe-se a aplicação da língua natural numa junção entre o comum e o especializado, este último relacionado ao uso da língua natural no âmbito do discurso de uma sala de aula de geometria analítica. Já a abordagem discursiva deve ser valorizada e interpretada neste contexto, pois através da língua torna-se possível o estabelecimento de articulações e relações cujo entrelaçamento possivelmente promoverá produção de significado entre agentes (professor e alunos). Machado (1990) destaca a relação existente entre matemática e língua natural ou materna:

> Entre a matemática e a língua materna existe uma relação de impregnação mútua. Ao considerarem-se estes dois termos enquanto componentes curriculares, tal impregnação se revela através de um paralelismo nas funções que desempenham, uma complementariedade nas metas que perseguem, uma imbricação nas questões básicas relativa ao ensino de ambas. (MACHADO, 1990, p.10).

Cada tipo de registro traz consigo uma característica específica estabelecida pelo sistema ao qual foi desenvolvido. Neste momento, daremos destaque ao elemento figural, uma das essências do nosso estudo. Para Duval (1995):

> Il est couramment admis les figures forment un support intuitif important dans lês démarches en géométrie: elles donnent à voir beaucoup plus que ce les énoncés ne dissent, ells permettent d'explorer, d'anticiper…elles permettent, dans la resolution d'un problème ou dans la recherche d'une demonstration (…).[7] (DUVAL,1995, p.181)

As unidades figurais são elementos que atraem e muitas vezes conduzem a caminhos que possivelmente levarão à solução. No entanto, é relevante destacar que nem sempre o desenho é suficiente para afirmar as propriedades do objeto matemático, visto que a interpretação de algumas figuras depende das relações fixadas inicialmente. Nesta ótica, podemos exemplificar:

Considere a equação $y = a \cdot x + b$ (onde a e b são constantes reais). Se admitirmos como ambiente de representação o plano cartesiano (R^2), o seu gráfico será uma reta. E se tomarmos como base para a construção do desenho o espaço euclidiano (R^3), teremos a representação de um plano paralelo ao eixo coordenado z, conforme ilustrado pela figura abaixo.

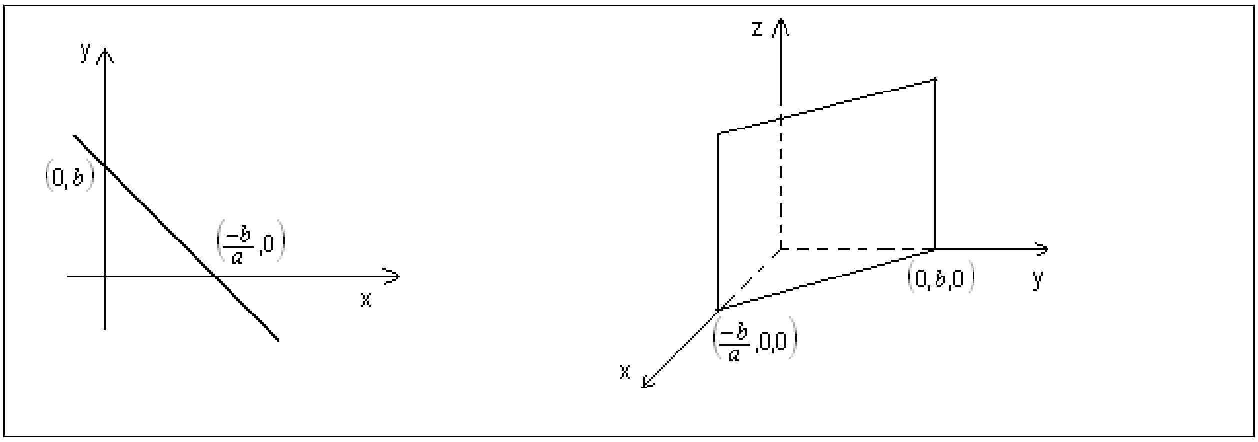


Figura 2: Representação geométrica da equação $y = a \cdot x + b$ no plano e no espaço.

[7] É freqüentemente admitido que as figuras formam um suporte intuitivo importante nas operações geométricas: elas mostram muito mais que esses enunciados que nada dizem, elas permitem explorar, antecipar... Elas permitem a resolução de um problema ou a busca de uma demonstração (...)

Percebemos então que, se não definirmos bem o conjunto universo com o qual estamos trabalhando então esta equação pode permitir uma dupla interpretação geométrica e analítica (dualidade plano / reta).

As dificuldades ou confusões possíveis, suscitadas por estes objetos (reta e plano) são de certa forma ligados ao fato de que os dois objetos possuem a mesma expressão algébrica, mas com representações gráficas e analíticas diferentes, ou seja, deve-se determinar em que sistema a representação é produzida, tendo em vista que o conteúdo da representação altera de acordo com o sistema de representação utilizado.

Nesta perspectiva Duval (1995) afirmar que:

> En géométrie, il n'y a pas de dessin qui représente par lui-même, c'est-à-dire il n'y a pas de dessin <<sans légende>>. Car um même dessin représenter dês situations mathématiques três différentes, et donc servir de support intuitif à dês raisonnements différents. Il fault donc une indication verbale pour ancrer la figure comme représentation de tel ou tel objet mathématique. (Ibid, p. 188)[8]

As conversões entre discursos e figuras guiam as operações sobre os objetos representativos em determinada figura e conseqüentemente possibilitará uma mobilização entre as definições e teoremas, sendo um fator de fundamental importância neste processo exploratório interpretativo.

2.2.3 – Onto-Semiótica e a Educação Matemática

Os estudos de Juan D. Godino [9]e seus colaboradores destacam um aspecto inovador ao relacionar semiótica, educação matemática e ontologia *(A ciência do ser enquanto ser,..., do ser e*

---

[8] Em geometria, não há desenho que represente ele mesmo, diz-se que não há desenho "sem legenda". Pois um mesmo desenho pode representar situações matemáticas muito diferentes e por isso, servir de suporte intuitivo à raciocínios diferentes. É necessária uma indicação verbal para ancorar a figura como representação de determinado objeto matemático.

[9] Professor- Investigador e coordenador do "Programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática" da Universidade de Granada.

suas variadas manifestações)[10]. Estas articulações nos colocam diante de um enfoque, onde a educação matemática é vista como um sistema interativo correlacionando pesquisa, desenvolvimento e a prática.

Apresentamos uma síntese dos pressupostos, noções teóricas e posicionamentos dos pragmatistas do EOS (Enfoque Onto-Semiótico). Num primeiro momento é relevante esclarecer o que é considerado como *prática matemática* como depreende Godino, Batanero[11] e Font[12] (2006) :

> (...) toda atuação ou expressão (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguém para resolver problemas matemáticos, comunicar a outros a solução obtida, validá-la ou generalizá-la a outros contextos e problemas. (GODINO, BATANERO e FONT, 1994 *apud.* GODINO, 2006, p.5).

É importante destacarmos parafraseando Godino que no estudo da matemática, o mais interessante não é uma prática destinada à resolução de problemas, mas a atuação das pessoas inseridas em situações problemáticas; dispondo desta forma de um sistema de práticas (operativas e discursivas).

O discurso matemático e seus objetivos também compõem as práticas matemáticas; configurando a seguinte afirmação:

> Nas práticas matemáticas intervêm objetos ostensivos (símbolos, gráficos, etc.) e não ostensivos (conceitos, proposições, etc., que evocam ao fazer matemática) e que são representados em forma textual, oral, gráfica e, inclusive, gestual. Dos sistemas de práticas matemáticas operativas e discursivas emergem novos objetos provenientes das mesmas e revelam sua organização e estrutura. Quando os sistemas de práticas são compartilhadas no âmbito de uma instituição, os objetos emergentes são considerados “objetos institucionais” e se os referidos sistemas de práticas correspondem a uma pessoa, consideramos que emergem “objetos pessoais.” (GODINO, BATANERO e FONT., 2006, p.7).

A emergência dos objetos ostensivos e não-ostensivos somados à variedade representacional e aos aspectos operatórios e discursivos; compartilhados conjuntamente em um

---

[10] Para maiores esclarecimentos, consultar GILES, Thomas Ranson. Dicionário de Filosofia, 1993.

[11] Professor- Investigadora do “Programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática” da Universidade de Granada.

[12] Professor- Investigador e coordenador do “Programa de Doctorado en Didáctica de lãs Ciências Experimentales y la Matemática” da Universidade de Barcelona.

âmbito (sala de aula) deixa transparecer, evidenciando os vínculos históricos, sociais e culturais da prática matemática.

Dispondo dos estudos de Godino, Batanero e Font, interligando as novas concepções acerca da sala de aula, achamos pertinente destacarmos os aspectos que devem contemplar a cognição matemática:

> A cognição matemática deve contemplar as facetas pessoal e institucional, entre as quais se estabelecem as relações dialéticas complexas e cujo estudo é essencial para a educação matemática. A "cognição pessoal" é o resultado do pensamento e a ação do sujeito individual diante de uma certa classe de problemas, enquanto a "cognição institucional" é o resultado do diálogo, o convênio e a regulação de um grupo de indivíduos que formam uma comunidade de práticas. (GODINO, BATANERO e FONT, 2006, p.10).

Diante disto inferimos que em uma sala de aula se faz presente ambos os aspectos; sendo desenvolvida a cognição pessoal, assim como a existência do processo cognitivo institucional. A produção de significados individuais e coletivos soma-se neste contexto.

Outro aspecto relevante é uma inovadora definição para função semiótica direcionada à matemática, a qual toma como base uma visão epistemológica pragmática e antropológica, onde significante e significado são concebidos a partir de um objeto matemático conforme adota Godino, Batanero e Font (2006):

> Uma função semiótica, cujo antecedente (significante) é o objeto matemático – ou a expressão que o designa – e o conseqüente (significado) é um novo construto que descreveremos como "sistemas de práticas matemáticas realizadas por uma pessoa (ou compartilhada no âmbito de uma instituição) diante de uma certa classe de situações problemas". (GODINO, BATANERO e FONT, 2006, p.12).

Desta forma, retoma-se a concepção de Frege, ocorrendo um rompimento, uma espécie de superação com a perspectiva formalista, na qual os objetos matemáticos se reduziam apenas às suas definições e relações lógicas com outros objetos.

Destacamos também a designação que adquirem os termos: sentido e significado e sua decomposição na perspectiva onto-semiótica.

> (...) sentido como um significado parcial. O significado de um objeto matemático, entendido como um conjunto de práticas, podendo ser decomposto em diferentes classes de práticas mais específicas que são utilizadas num determinado contexto (que ativará uma determinada configuração). Cada contexto ajuda a produzir sentido (permite gerar um subconjunto de práticas), entretanto não gera todos os sentidos. (GODINO, BATANERO e FONT, 2006, p.18).

Resumidamente, o enfoque onto-semiótico trata da formulação de uma ontologia dos objetos matemáticos contemplando o triplo aspecto da matemática como atividade de resolução de problemas, socialmente compartilhada entre linguagem simbólica e sistema conceitual, além de considerar a dimensão cognitiva individual.

2.2.4 – Semiótica Cultural e Matemática

Luis Radford[13] apresenta certos elementos de uma teoria cultural, consubstanciando uma semiótica cultural dos aprendizados matemáticos, inspirados em escolas antropológicas e histórico-culturais do conhecimento, dando espaço para uma concepção essencialmente social do aprendizado. Neste sentido, a semiótica cultural parte do pontos de vista em que cada indivíduo é visto como um sujeito que vive, pensa e atua culturalmente, tendo como premissa que a base da cognição se encontra na prática cultural. Complementando esta abordagem ele discute também propondo a questão cognitiva como reflexo de uma prática social. É nesse estágio que a dimensão semiótica adquire sua relevância, visto que:

> (...) signos y artefatos cobram vigência como mediatizadores de la actividad y elementos claves de los procesos de reflexión. En este contexto, la actividad cognitiva es considerada como uma actividad social, mediatizada, de interiorización reflexiva de prácticas sociales historicamente constituídas. (RADFORD, 2004, p.1)[14]

---

[13] Professor da École des sciences de l' éducation . Université Laurentienne, Canada.

[14] (...) signos e artefatos adquirem vigência como mediadores da atividade e são elementos chaves do processo de reflexão. É neste contexto, que a atividade cognitiva é considerada como uma atividade social, mediadora, de interiorização de práticas sociais historicamente construídas.

Numa retrospectiva histórica Radford, estuda desde as raízes etimológicas da palavra cognição, baseando-se nas idéias de Platão que segundo ele:

> El saber, argumenta Platón, no puede ser el reultado de esse acto cognitivo entendido como percepción del mundo que nos rodea, pues lo percibimos através de los sentidos no es estable, sino que está sujeito a cambio. En la epistemologia platônica, solo aquello que es permanente puede ser objeto de saber. (RADFORD, 2004, p.2).[15]

O estudo prossegue intercambiando as discussões de pensadores dos séculos XVII ao XIX interessados no estudo do conhecimento, refletindo sobre a percepção e a formação das idéias. Destacando a teoria do conhecimento elaborada por Kant no Século XVIII, sendo a epistemologia um prolongamento desta teoria.

A relação entre o individual e o social se estabelece como uma relação de reciprocidade; onde o foco de atenção está nas atividades individuais vista como uma efetiva participação no plano social. Esta nova forma de olhar acredita que o conveniente é elaborar o sujeito cognitivo em seu contexto social. Fazendo referência ao sócio-construtivismo, Cobb (1997):

> Esta perspectiva reconoce que tanto el processo de aprendizaje de las matemáticas e sus produtos... son sociales de principio a fin. Sin embargo, ésta tambiém enfatiza que los niños construyen activamente sus comprensiones matemáticas en el curso de su participación en los processos sociales de la clase... Esta discusión sobre la reflexión coletiva cuestiona la vista que los niños son meramente acarreados por um discurso que determina su pensamento individual. (COBB et al. 1997 apud RADFORD, 2004, p.4).[16]

Radford apresenta um esboço da perspectiva semiótica cultural; destacando os elementos chave que constituem este enfoque; os quais têm embasamento numa reconceitualização do saber e uma definição cultural do pensamento. Ele ressalta também a teoria da atividade de Leontiev, a

---

[15] O saber, argumenta Platão, não pode se resultado desse ato cognitivo entendido como percepção do mundo que nos rodeia, pois o que percebemos através dos nosso sentido não é estável, porém está sujeito a mudanças. Na epistemologia platônica, somente aquilo que é permanente pode ser objeto do saber.

[16] Esta perspectiva reconhece que tanto o processo de aprendizagem das matemáticas e seus produtos... são sociais do início ao fim. Todavia, esta também enfatiza que as crianças constroem ativamente suas compreensões matemáticas no percurso de sua participação nos processos sociais de seu grupo... Esta discussão sobre a reflexão coletiva questiona que a visão das crianças é meramente carregada por um discurso que determina seu pensamento individual.

qual apresenta um aspecto harmônico com a idéia central da psicologia de Vygotski (o interacionismo). A proposta de Leontiev (2004) é que:

> (...) el funcionamiento intelectual puramente humano es um funcionamiento mediatizado. (...) la actividad humana se caracteriza, entre otras cosas, por (1) el objetivo que se persigue y (2) los médios para alcanzar dicho objeto. (RADFORD, 2004, p.9).[17]

O conceito de atividade de Leontiev ganha especial relevo nos estudos de Radford, devido principalmente ao fato de que se apresenta como potencial importante de teorização da relação entre saber, pensamento e cultura. Pois, uma atividade no sentido de Leiontiev (2004) é definida como:

> (...) um processo social cuyo propósito es alcanzar un objetivo impregnado de entradas con significados culturales y conceptuales, objetivo que se alcanza a través de acciones mediatizadas por sistemas semióticos (...). Una actividad es una secuencia dialecticamente interconectada de acciones mediatizadas a través de cuales individuos se relacionam no solamente con el mundo de los objetos sino que también con otors individuos, adquiriendo, en el curso de esse proceso, la experiencia humana. (LEONTIEV, 1978/1993, *apud*. RADFORD, 2004, p.10).[18]

Em suma, a perspectiva semiótica cultural esboçada sucintamente aqui se constitui num processo em que os sujeitos atuam culturalmente, numa relação entre o social e o individual mediados a partir de sistemas semióticos culturais de significação com metas definidas a serem alcançadas. Os indivíduos que compõem uma sala de aula analogamente são sujeitos que interagem entre si, sendo mediatizados por elementos semióticos.

---

[17] O funcionamento intelectual autenticamente humano é um funcionamento mediatizado. (...) a atividade humana se caracteriza, dentre outras coisas, por (1) o objetivo que se persegue e (2) os meios para alcançar estes objetivos.

[18] (...) um processo social cujo propósito conceitual é alcançar um objetivo impregnado de entradas culturais e conceituais, objetivo que se alcança através de ações mediadas por sistemas semióticos (...). Uma atividade é uma seqüência dialeticamente interconectada (interligada de ações mediada através dos quais os indivíduos se relacionam não somente com o mundo dos objetos, mas também com os outros indivíduos, adquirindo, no decorrer deste processo a experiência humana).

2.2.5 – Construção de Significados e Representação Geométrica

Diante da variação do pensamento e concepções dos teóricos apresentados anteriormente faz-se necessário uma abordagem cada vez mais próxima, particular das nossas investigações. É evidente que a abordagem teórica exposta anteriormente possui elementos que concedem consistência aos nossos estudos, pois nos apoiamos em alguns de seus fundamentos. No entanto, achamos necessário estreitarmos estas relações. Assim, os trabalhos desenvolvidos por Maria Cristina B Barufi (1999), assim como os de Estela K Fainguelernt (1999), demonstram que é possível pesquisar num terreno um tanto instável, subjetivo e complexo; visto que a nossa abordagem estabelece vínculos entre imagens, os processos interativos em uma sala de aula e a geometria analítica.

A construção e negociação de significados em um curso de cálculo constituem o foco da pesquisa de Barufi (1999), examinando o conhecimento matemático que é trabalhado em sala de aula, especialmente no curso introdutório de cálculo.

Esta pesquisadora busca estabelecer uma análise e observação de como é que os novos significados são construídos, como as novas relações são estabelecidas ou como o cálculo é articulado à rede de conhecimentos dos estudantes que ingressam na universidade. Assim, o estudo se desenvolve na busca por descobertas, por vínculos, uma espécie de "ponte" entre conhecimento matemático abordado no ensino médio e aquele desenvolvido no curso de cálculo.

Um ponto de intersecção entre a nossa pesquisa e a de Barufi refere-se à negociação didática que se desenrola na sala de aula, apoiando suas concepções nos fundamentos de Hariki (1992), ao destacar que;

> The negotiation teacher-learners is a face-to-face interaction: they negotiate meanings, behavior and values in the classroom. Negotiation does not mean that there is equilibrium of forces between participants. The imbalance of forces between teacher and learners is indeed on of the principal characteristic of the pedagogic process. The mutual interaction between learns is nowadays very important for this process; it can be done in cooperation or in competition. (HARIKI, 1992, *apud*. BARUFI, 1999, p.6).[19]

---

[19] A negociação professor – alunos é uma interação face a face: eles negociam significados, comportamentos e valores na sala de aula. Negociação não significa que haja um equilíbrio de forças entre os participantes. O desequilíbrio de forças entre professor aluno é uma das características

Nesse contexto, é inevitável a inferência de que a produção de significados está intrinsecamente ligada ao processo de negociação, no nosso caso, específico o processo comunicacional que ocorre em uma sala de aula de geometria analítica.

Outro ponto de contato entre nossas abordagens refere-se ao aspecto discursivo na sala de aula, conforme depreende Hariki (1992):

> - Discourse means social interaction through messages.
> - Discourse is a negotiation of messages between speaker and hearer. (HARIKI, 1992, *apu.d* BARUFI, 1999, p.40)[20]

O aspecto ampliado do conceito de discurso, admitindo não apenas em relação ao seu enfoque lingüístico, mas num alcance muito maior, destacando a tudo aquilo que ocorre numa atividade interativa, interpessoal, como é a de uma aula.

Já os estudos de Estela Fainguelernt (1999) destacam os variados aspectos da representação e construções geométricas, levantando questões acerca das representações mentais implícitas na construção dos conceitos geométricos de alunos, professores e pesquisadores. Seguindo esta abordagem a autora ressalta o por que de um estudo sobre geometria, enfocando fatores, os quais têm íntima ligação com a nossa investigação. Como por exemplo:

> A geometria é considerada uma ferramenta para a compreensão, descrição e inter-relação com o espaço em que vivemos. Por um lado, é talvez, a parte da matemática mais intuitiva, concreta e ligada com a realidade. (FAINGUELERNT, 1999, p.20).

Outro ponto de destaque neste estudo é elo que se forma entre intuitivo e concreto; também podendo ser compreendido como as articulações que se processam na passagem do estágio das operações concretas para o estágio das observações abstratas, evidenciando traços da epistemologia genética de Jean Piaget. Conforme afirma Fainguelernt (1999):

---

principais do processo pedagógico. A interação mútua entre os alunos é, hoje em dia, muito importante para este processo; ela pode ocorrer em situações de cooperação ou de competição.

[20] Discurso significa interação social através de mensagens.
Discurso é a negociação de mensagens entre orador e ouvinte.

> (...) o ambiente geométrico possibilita ao aprendiz desenvolver suas impressões sobre a estrutura matemática, necessitando basear-se em um ambiente real para interagir. Já em um estágio mais avançado, esse ambiente geométrico adquire um significado mais amplo, não necessitando de um ambiente real (concreto) que o fundamente. O aprendiz já compreendeu e produziu um significado que, partindo de um número reduzido de axiomas, postulados e definições, pode construir, por via dedutiva, um conjunto de proposições geométricas. (FAINGUELERNT, 1999, p.51).

Neste sentido, podemos inferir que a progressão do pensamento geométrico de um indivíduo exige uma forma específica de raciocinar, uma maneira de explorar e descobrir. Assim, tanto o fator representacional como a visualização merece um enfoque mais direcionado. Pois segundo Fainguelernt (1999):

> O estudo da geometria é de fundamental importância para se desenvolver o pensamento espacial e o raciocínio ativado pela visualização, necessitando recorrer à intuição, à percepção e à representação, que são habilidades essenciais para a leitura do mundo e para que a visão matemática não fique distorcida. (FAINGUELERNT, 1999, p.53).

No entanto a idéia de Rodolph Bkouche (1982) segue um percurso contrário destacando o saber geométrico e a geometria como:

> A geometria, antes de ser a construção racional que se sabe, é um meio de apreensão de nossa relação com o espaço, ou sobretudo, o que eu chamaria de fenômenos espaciais, e são os problemas colocados por esta apreensão que levam a construir (quer seja através da história coletiva da humanidade, quer seja através da história individual) o saber geométrico. (BKOUCHE, 1982, p.57).

Partindo do geométrico ao espacial ou do espacial ao geométrico, ambas as concepções tem como ponto de interseção a relevância empreendida à visualização, não apenas pelo seu valor em geometria, mas também pelas articulações dos processos mentais envolvidos; significa dizer que o aspecto visual é um estágio inicial, um primeiro contato ou uma espécie de reconhecimento do espaço, do objeto ou do ente com o qual estamos envolvidos. Fainguelernt (1999) complementa afirmando que: “Toda atividade de Geometria envolve, no mínimo implicitamente, uma comunicação entre esse três tipos de processos: a visualização, a construção e a prova.” (FAINGUELERNT, 1999, p.54).

Os aspectos visuais, intuitivos, perceptivo e o representativo, aparecem entre as principais dimensões da geometria, conforme afirma resumidamente Zilman Usiskin (1994):

> (...) há quatro dimensões principais da geometria: a geometria como visualização, construção e medida de figuras (a dimensão medida-visualização); a geometria como estudo do mundo real físico (a dimensão mundo real-físico); a geometria como veículo para representar outros conceitos matemáticos (a dimensão representação); e a geometria como um exemplo de sistema matemático (a dimensão suporte matemático). (USISKIN, 1994, p.35).

O aspecto representativo em matemática tem também em seu espaço; como um dos processos que solidifica a compreensão dos conceitos matemáticos; pois a capacidade de trabalhar com diferentes representações de uma mesma idéia, significa mudar de perspectiva, ver sob outro ângulo, realizando conexões e associações entre diferentes tipos de representação. Isto é ressaltado também por Fainguelernt (1985) ao declarar que:

> (...) é fundamental, na construção de um conceito, partir da percepção e da intuição de dados concretos e explorar as representações e as aplicações e desenvolver o raciocínio lógico para, só então, chegar aos processos de abstração e de generalização. (FAINGUELERNT, 1985, *apud.* FAINGUELERNT, 1999, p.59).

Cabe ressaltar que os nossos estudos discutem também a influência dos aspectos culturais neste processo de construção de significados geométricos ancorados em uma certa sala de aula; os quais aparecerão no próximo capítulo fundamentando as nossas observações.

3 A SALA DE AULA COMO ESPAÇO CULTURAL: COMUNICAÇÃO E INTERAÇÃO.

Nas últimas décadas a temática cultural tem sido objeto de estudo, destacada sob os mais variados ângulos na pesquisa em educação, que tem se utilizado das contribuições de vários domínios do conhecimento, como a pedagogia, a lingüística, a psicologia e a sociologia. Essas múltiplas formas de concepções e articulações somam-se aos pontos de contatos que se formam entre os valores do professor e dos alunos constituindo assim um processo transformativo e interativo nesta amostra social (sala de aula). Sendo que grande parte destas transformações deve-se ao fato de que o processo educacional está imerso numa diversidade cultural.

A valorização dos processos de comunicação e interação envolvendo professor e alunos no interior da sala de aula tem redirecionado novas possibilidades de entendimento dos processos de ensino-aprendizagem, sendo também analisados sob o prisma semiótico, afetivo, político, comunicativo e interativo.

A vertente semiótica nos fornece subsídios e aparece como um fator estrutural, uma espécie de suprimento dos conceitos teóricos e não teóricos explorados no âmbito educacional. Desta forma, geram-se teias de significados, os quais são construídos e reconstruídos adquirindo contornos particulares neste grupo social. Já que o cenário que se forma está consubstanciado por uma multiplicidade de estruturas sobrepostas como: o educacional, o emocional, o pessoal, o social dentre outros.

Em outras palavras, parece voltar-se à concentração dos diferentes aspectos que integram as interações, ou o que elas provocam, engendram, afloram, denunciam e revelam; num ambiente onde atuam uma grande variedade de fatores de diversas naturezas e ordens.

A mais simples palavra pronunciada pelo professor, que associa consciente ou inconscientemente um certo significado para a mesma, pode ser significada pelo aluno de uma maneira própria e essencialmente diferente, a depender da forma como utiliza os diversos recursos culturais disponíveis e das identidades e raízes culturais que o caracterizam como um sujeito com formas próprias de inserção social.

Parafraseando Hodge e Kress (1988): a produção de significados pode, em alguns momentos, ser particular para cada indivíduo:

> cada significação construída é, de alguma forma, uma nova significação, isto é, aqueles que buscam compreender algo têm que, necessariamente, recriar significações para si próprios." (HODGE e KRESS, 1998, *apud*. MARTINS, OGBORN e KRESS, 1999, p.4).

O destaque empreendido ao grupo num processo comunicacional é ressaltado também num conjunto de indivíduos reunidos em uma sala de aula; pois cada sujeito traz consigo traços particulares, que têm seus encadeamentos sociais, afetivos e culturais: a família, a cidade, a religião, etc. Cumpre ressaltar, que não queremos dizer com isto que o ambiente sala de aula é constituído apenas por fatores externos a ele, mas que os traços individuais de cada sujeito são elementos característicos e constituem em implicações, as quais fazem parte dos intercâmbios que se estabelecem neste local, possibilitando diálogos entre os variados "mundos", permitindo perceber os diversos pontos de convergência ou divergência, compondo desta forma uma cultura específica de sala de aula.

Esse processo comunicativo que se forma a partir das múltiplas intermediações e difusão de idéias, opiniões e concepções é protagonizado por este grupo de sujeitos (professor e alunos). Desta forma compreendemos que a comunicação é essencialmente uma relação. Peruzzolo (2004) enfatiza esta questão afirmando que:

> (...) o que faz com que uma relação seja comunicação é a representação como meio de comunicar, por cujo movimento se encontra o outro. Por isso, o indivíduo é até pensável, mas sozinho é seguramente impraticável,

> principalmente sob o ponto de vista da sua comunicação e da sua sobrevivência. É só depois do grupo que vem o indivíduo. A unidade de vida humana não é o indivíduo, é o grupo. (PERUZZOLO, 2004, p.28).

Nesse ponto, eis que entram no cenário da sala de aula os elementos lingüísticos e não lingüísticos, verbais e não verbais (expressões, gestos, silêncios, posturas, dentre outros) têm um papel fundamental nas interações face a face, ao situarem os interlocutores (professor e alunos) no contexto geral do processo comunicativo. Tal fator é destacado por Steinberg (1988):

> É impossível não comunicar, o corpo é uma mensagem e o comportamento não verbal é extremamente dialógico. As expressões do rosto, as atitudes, os gestos e o movimento corporal podem atuar como emblemas, ilustradores, demonstradores de afeto ou como reguladores e adaptadores da interação. (STEINBERG, 1988, p.9) .

Somando-se ao que considera Kress *et al*.(1997):

> Em uma sala de aula, isso é feito através de estratégias que necessariamente empregam uma pluralidade de meios de comunicação de forma coordenada. Nessa perspectiva, a construção de novas significações não é vista como exclusivamente dependente da linguagem (escrita e falada), mas como de interação entre diversos sistemas de representação que incluem imagens, gráficos e diagramas, passando pelo uso de gestos e atividade física como, por exemplo, observação e manipulação de objetos o que, hoje em dia acontece presencialmente ou mediado por novas tecnologias em comunicação eletrônica. (KRESS *et. al*., 1997, *apud.* MARTINS, OGBORN e KRESS, 1999, p.4).

Nesta perspectiva, a produção de significados que resulta dos processos interativos - comunicativos ocorridos na sala de aula, está intrinsecamente ligada aos variados sistemas de representação utilizados nesses processos, bem como aos fatores que caracterizam as formas de inserção cultural dos sujeitos envolvidos na sociedade em que vivem.

Esta soma de interações, tem como conseqüência a negociação de significados. Como argumenta Maria Cristina Barufi (1999):

> A aula constitui um sistema de comunicação formado por uma rede de emissores, receptores e canais pelos quais flui todo tipo de informação, através de mensagens e ruídos, utilizando diferentes códigos da interação e da organização completa da aula. (BARUFI, 1999, p.38).

Percebemos então que a transmissão de mensagens se processa também através dos diversos códigos; permitindo interação entre a linguagem verbal e não-verbal. Como destaca Bakhtin (1986):

> A comunicação verbal entrelaça-se inextricavelmente aos outros tipos de comunicação e cresce com eles sobre o terreno comum da situação de produção. Não se pode, evidentemente, isolar a comunicação verbal dessa comunicação global em pérpetua evolução. Graças a esse vínculo concreto com a situação, a comunicação verbal é sempre acompanhada por atos sociais de caráter não verbal (gestos do trabalho, atos simbólicos de um ritual, cerimônias, etc.) dos quais ela é muitas vezes apenas o complemento, desempenhando um papel meramente auxiliar. (BAKHTIN / VOLOCHINOV, 1986, p.124).

Os gestos, silêncios e as posturas físicas adotadas pelos alunos e professor são elementos constituintes das práticas interpretativas produzidas no âmbito de uma sala de aula, assim como a diversidade de conhecimentos, de comportamentos, de atitudes, de formas de interpretar.

Em suma, alunos e professor como apropriadores culturais, nos direcionam para uma nova dinâmica para o entendimento das relações inter e intraculturais que começa a se configurar. Assim, toma-se a idéia de que a sala de aula é um espaço que acolhe, que reúne vários traços de culturas sendo encarada como uma micro-sociedade, rica em produção de significados.

Admitiremos que este espaço está imerso em um contexto próprio, permitindo um diálogo entre culturas, caracterizando uma cultura específica resultante de diferentes crenças, etnias, idéias, gostos, formas de expressão, pluralidade de visões de mundo, produção de conhecimento, dentre outros.

Diante de todas estas considerações torna-se interessante interpretar como alunos e professores que, respectivamente, cursam e ministram aulas de geometria analítica, (curso de Licenciatura em Matemática – UEFS), concebem aspectos relativos à aquisição, construção e interpretação dos sentidos / significados produzidos, percebidos ou expostos nas aulas desta disciplina, tomando como base, primordialmente a identificação da produção de significados de gráficos geométricos.

Supondo então, que as interpretações das representações gráficas sofrem influências de fatores psicológicos, sociológicos, esquemas perceptivos, cognitivos e afetivos, ou seja, o fator social e cultural está diretamente relacionado às múltiplas traduções acerca de um ente geométrico, matemático, desta forma não podemos desvinculá-los, pois uma imagem sempre envolve um discurso de emoção. Esta concepção é reforçada pela declaração de John Berger (2007): "Lo que sabemos o lo que creemos afecta el modo en que vemos las cosas"(...)[21] (BERGER, 2007,p.13)

Isto significa dizer que afeta os significados e interpretações produzidas por determinado sujeito em interação com o mundo circundante. Deste modo, quando pensamos numa sala de aula constituída por vários indivíduos, cada um com suas particularidades, saberes, crenças e conhecimentos percebemos quão rico é este âmbito. Neste enfoque, observamos que existem múltiplas interpretações e analogias para os mesmos elementos. A partir das considerações feitas por Rudolf Arnheim (2000), torna-se mais simples entender por que isto ocorre:

> "Quanto maior for a influência biológica que um objeto tem para nós, mais estaremos capacitados a reconhecê-lo – e mais tolerante será portanto nosso padrão de correspondência formal." Um homem que espera sua namorada na esquina vê-la-á em quase todas as mulheres que se aproximam , e esta tirania do traço da memória tornar-se-á mais forte à medida que os minutos passam. (ARNHEIM, 2000, p.43).

Intercambiamos a afirmação acima com o que postula Gottlob Frege (1978):

> Se a referência de um sinal é um objeto sensorialmente perceptível, minha representação é uma imagem interna, emersa das lembranças de impressões sensíveis, internas e externas, que realizei (...). A representação é subjetiva: a representação de um homem não é a mesma de outro (...). A representação por tal razão, difere essencialmente do sentido de um sinal, o qual pode ser a propriedade comum de muitos e, portanto, não é uma parte ou modo da mente individual (...) (FREGE, 1978, p.64-65).

Consideraremos que o sinal é uma imagem apreendida coletivamente e a representação, em sentido oposto, assume um caráter individual e subjetivo. Isto pode ser clarificado ao admitirmos que o sentido transporta em si impressões e emoções particulares, próprias de cada indivíduo, conforme expõe Frege: "Quando dois homens representam a mesma coisa, ainda assim cada um tem sua própria representação."(*Ibid.* p.65).

Num enfoque contemporâneo ratificamos e compartilhamos com a análise de Flores (2003):

---

[21] O que sabemos e o que acreditamos afeta o modo em que vemos as coisas (...)

> (...) uma imagem é a representação de um modo de olhar. Ou seja, uma representação que se dá a partir de uma experiência visual e é regida por concepções filosóficas e epistemológicas, atada à idéia da cópia do mundo real, fazendo tornar presente aquilo que está ausente para os olhos. (FLORES, 2003, p.24).

Esse cenário que se desenha composto de diferentes maneiras de olhar, interpretar ou conceber se constitui em um "palco" para os nossos estudos, inferências, questionamentos e indagações. Assim, retomemos então, a caracterização deste "palco" (sala de aula), tendo neste contexto, como um dos principais pontos de referência fatores educacionais. No entanto, o aspecto que mais se aproxima da nossa concepção é o que caracteriza a sala de aula como um espaço destinado à reunião de pessoas, proporcionando multiplicidade de relações entre os atores sociais (professor e alunos). Desta forma, um dos fatores que viabiliza a propagação destas relações é a comunicação seja ela verbal ou não verbal. Daí recolocamos a nossa primeira inferência considerando que a sala de aula é um espaço de comunicação e que a circulação de discursos orientam as relações entre esses indivíduos, processando uma pluralidade de mensagens que são capitadas de forma consciente ou inconsciente. No entanto, o que acham os protagonistas que integram este ambiente e como eles definiriam a sala de aula? Assim, buscamos encontrar respostas para este questionamento, através de uma ficha investigativa (anexo), onde solicitamos uma definição para sala de aula. Ressaltamos algumas delas:

Aluno A: "Espaço fechado onde podemos construir/socializar conhecimentos."

Aluno B: "Ambiente social, de aprendizado e busca por conhecimentos".

Aluno C: "Local onde conhecimentos são formulados ou compartilhados. Não necessariamente precisa ser entre quatro paredes"

Aluno D: "Local de aprendizagem onde construímos saberes, orientado por um professor (indivíduo)".

Aluno E: “Um espaço direcionado ao saber;Troca de conhecimentos (quem aprende ensina e quem ensina aprende); Local onde aumentamos nossa prática de convívio social.”

Aluno F: “Espaço de partilha do conhecimento, de aprendizado tanto para o discente quanto para o docente.”

Aluno G: “Local de contato com o professor e colegas com o principal objetivo de compartilhar informações”.

Aluno H: “Ambiente de aprendizagem, discussões e interação professor - aluno.”

A sala de aula caracterizada pelos alunos partindo das múltiplas variáveis: ambiente social destinado à troca e ao compartilhamento de informações e de conhecimentos, local de contato e interações; interligando as variadas concepções acerca deste ambiente, desenha uma nova maneira de perceber a sala de aula como uma micro-sociedade, vinculada aos diversos traços de cultura constituintes deste âmbito.

Desta forma temos como hipótese que a sala de aula além de ser um espaço que acolhe inúmeros traços de cultura, tendo uma dimensão interativa e conseqüentemente social, características estas que se interligam entre si, mediadas através da comunicação entre os atores envolvidos no processo. Observemos também que este processo é pluridirecional, que se propaga do professor para o aluno, entre alunos e dos alunos para o professor, conforme o perfil esquemático que segue:

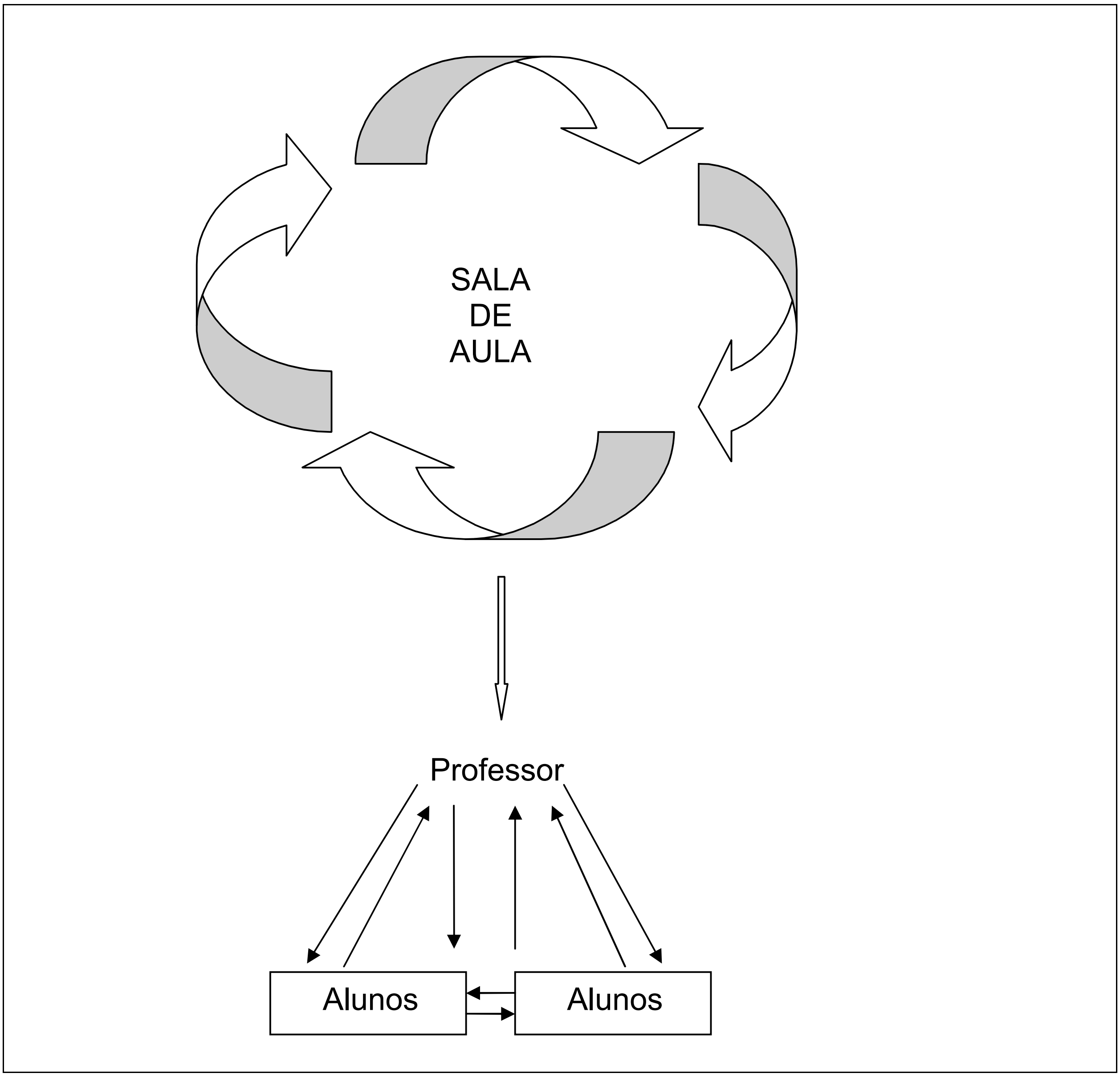


Figura 3: Esquema da sala de aula

Focalizamos então o contexto de uma sala de aula de Geometria Analítica, direcionando para um dos nossos interesses que é o de examinar o papel que assumem as figuras, gráficos ou desenhos apresentados, seja como elementos centrais, elementos mediadores ou elementos sem grande relevância, uma vez que esses objetos são reconhecidos usualmente na matemática como condutores de ambigüidades, como portadores de significados implícitos, como causadores de arbitrariedades e distorções nos processos de demonstração matemática.

3.1 A Adaptação do Método Etnográfico para a Observação e Interpretações das Práticas Culturais em Sala de Aula.

Como declarado anteriormente, o delinear da sala de aula é como uma micro-sociedade enraizada aos diversos traços de culturas, constituindo uma cultura própria de uma sala de aula. Assim, o cenário que se forma e tem como campo de ação este ambiente, se estrutura e é constituído por atores, em interação entre si, capazes de elaborar suas interpretações e produzirem significados, gerando uma forma individual de produção de conhecimento, ou seja, a partir destes intercâmbios afloram fatores representativos culturais que são incorporados tanto na figura do professor quanto nos papéis assumidos pelos alunos. Desta forma se revelam perfis culturais que nascem neste ambiente, caracterizados como em algumas situações: O posicionamento dos atores envolvidos no processo de ensino e aprendizagem, adquirindo contornos amenos nas trocas de informações e idéias desprendendo uma aproximação entre os protagonistas (alunos e professor).

O professor que transcreve incessantemente, colocando-se frente ao quadro numa postura de destaque e os alunos que comodamente copiam o apontamento nos conduzem a inferir que existe uma cultura específica da sala de aula, talvez resquícios de um ensino tradicional, ressaltada pelo aparente vínculo de dependência dos alunos para com o professor, fator evidenciado em aulas de matemática pura, onde a preocupação está na forma e beleza das demonstrações. No entanto não entraremos no mérito educacional neste momento.

Em outras palavras, a nossa investigação se estrutura em um meio onde as variações interculturais se interligam apoiando-se nos variados intercâmbios que se processam através dos múltiplos referenciais. Daí, perceber como ocorre a dinâmica de uma sala de aula de geometria analítica torna-se essencial no nosso estudo, tentando transpor de uma forma densa, porém incompleta, as informações obtidas. Pois, segundo Geertz (1989):

> A análise cultural é intrinsecamente incompleta e, o que é pior, quanto mais profunda, menos completa. É uma ciência estranha, cujas afirmativas mais marcantes são as que têm a base mais trêmula, na qual chegar a qualquer lugar

> com um assunto enfocado é intensificar a suspeita, a sua própria e a dos outros, de que você não está encarando de maneira correta (...) (GEERTZ, 1989, p.39).

Passemos então, ao perfil desta sala de aula transposta na figura do mestre que direciona, desenha, transmite conceitos, definições, demonstrações, e os discentes que “interpretam as interpretações” as que lhes são veiculadas.

Aqui se faz necessário um sucinto esclarecimento sobre a expressão: “interpretam as interpretações”, pois pode parecer um tanto redundante ou imprecisa, porém buscamos esclarecimentos em princípios antropológicos, os quais elucidam, ressaltam e servem de sustentação teórica, já que parte da pesquisa é desenvolvida dentro de uma sala de aula (âmbito cultural), partindo das observações realizadas no interior deste ambiente. A declaração de Geertz (1989) evidencia esta questão: “os nossos dados são realmente nossa própria construção das construções de outras pessoas.”(*Ibid.* p.19). Ele se refere ao trabalho desenvolvido pelo etnógrafo que garimpa as informações para lapidá-las a partir das entrelinhas para só então encontrar o tesouro.

Neste sentido, podemos admitir que tratam-se de interpretações antropológicas, ou seja como declara Geertz (1989):

> Refere-se a nossas formulações dos sistemas simbólicos de outros povos, os quais devem ser orientados pelos atos. (...) Todavia, como no estudo da cultura a análise penetra no próprio corpo do objeto – Isto é, **começamos com as nossas próprias interpretações do que pretendem nossos informantes, ou o que achamos que eles pretendem, e depois passamos a sistematizá-las.** (*Ibid.* p.24-25)

Este trabalho exploratório e investigativo nos coloca diante de um processo comunicacional particular de uma sala de aula, abrangendo um vasto conjunto constituído por elementos interativos, desencadeados nos contornos das aulas de matemática, caracterizados pela diversidade dos elementos constituintes e influenciados por conhecimentos absorvidos liminarmente. Inferimos então que, tanto os alunos quanto o professor estão constantemente gerando interpretações a partir de outras interpretações e explicações produzidas anteriormente.

Desta forma, é relevante destacar que a presença do observador/ pesquisador no ambiente, estabelecem diferenciais em relação ao mesmo, visto que os acontecimentos ocorridos, informações abordadas em sala de aula são relatados, interpretados ou percebidos do ponto de vista do pesquisador, recebendo influências de sua formação pessoal/ profissional, da sua localização espacial no ambiente físico e suas visões de mundo. Isto proporciona inevitável interação entre referências subjetivas do observador e os sujeitos do ambiente pesquisado. Em síntese, o observador afeta a pesquisa e é por ela afetado. A influência subjetiva do pesquisador é ratificada por Boaventura (2001), nos seguintes termos:

> Hoje sabemos ou suspeitamos que as nossas trajetórias de vida pessoais e coletivas (enquanto comunidades científicas) e os valores, as crenças e os prejuízos que transportam são a prova íntima do nosso conhecimento, sem o qual as nossas investigações laboratoriais ou de arquivo, os nossos cálculos ou os nossos trabalhos de campo constituiriam um emaranhado de diligências absurdas sem fio nem pavio. No entanto, este saber, suspeitado ou insuspeitado, corre hoje subterraneamente, clandestinamente, nos não-ditos dos nossos trabalhos científicos. (SANTOS, 2001, p.53).

O pesquisador, em busca da obtenção de resultados condizentes com a realidade estudada, deve flexibilizar suas idéias e pontos de vistas, mostrando-se, contudo, receptivo a novas concepções e interpretações.

Na companhia do diário de campo, com um olhar atento e uma atitude de estranhamento, tentando analisar uma situação familiar como se fosse estranha, buscando pescar as informações necessárias e registrando as linhas e entrelinhas que se formavam diante de nós, servindo como sustentáculos para as nossas inferências. Os questionários, as entrevistas e a filmagem de aulas específicas, cujo assunto estudado era “reta e planos” serviram de subsídios para o registro de detalhes, indícios e minúcias, ancorando o nosso interesse nas interpretações a partir do leque de significações contidas nos encontros cotidianos que ocorreram neste espaço servindo também como suporte para as nossas interpretações e suposições.

A nossa investigação é caracterizada como uma pesquisa qualitativa, trabalhando com enfoque etnográfico. A relevância deste aspecto é ressaltada por Marli André (1995), ao recorrer à etimologia da palavra etnografia que significa “descrição cultural”, relatando também que: ”O que se tem feito, pois, é uma adaptação da etnografia à educação, o que me leva a concluir que fazemos estudos do tipo etnográfico e não etnografia no seu sentido estrito.”(ANDRÉ, 1995, p.28).

A abordagem etnográfica nos permite suspeitar sobre a multiplicidade de significados envolvidos numa dada situação e esse diálogo que se estabelece entre a fundamentação teórica e os dados obtidos culminam num movimento envolvendo arranjos, rearranjos na tentativa de uma nova estruturação do real (o cotidiano numa sala de aula de geometria analítica).

Assim, podemos afirmar que o nosso estudo toma da etnografia recortes específicos para montar as estratégias e perfis da pesquisa, fazendo uso de técnicas associadas.

Os indivíduos observados são alunos do terceiro semestre do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Feira de Santana, na disciplina Geometria Analítica e Álgebra Linear II. É importante destacar que nem todos os alunos concordaram em participar da pesquisa, assim, conseguimos vinte participantes, sendo que dentre estes um desistiu da disciplina, ficando dezenove. No entanto, a presença efetiva e constante era de aproximadamente dez a quatorze alunos.

3.2 O Livro, Notas de aulas do professor, anotações dos alunos: instrumentos geradores de significados.

Nesse sentido, além do nosso olhar atento em busca de respostas para os nossos questionamentos resolvemos estudar o que havia como suporte teórico, acerca do conteúdo, nas aulas de Geometria Analítica; senti essa necessidade de falar um pouco sobre isso quando percebi que as notas de aulas do professor era uma cópia, quase fiel, com sucintas modificações do livro didático. Ressaltamos que estamos nos referindo especificamente aos assuntos retas e planos. Destacamos também que a nossa observação está direcionada para as figuras e representações gráficas que aparecem neste referencial teórico, seja como elemento principal ou auxiliar.

Iniciamos com a seguinte metáfora: Como os nativos (alunos e professor) desta ilha (sala de aula) lidavam com esse instrumento(livro), na produção de significados?

Seguindo essa linha de raciocínio, consideramos que a escolha do título revela uma certa identificação, compatibilidade e concordância entre a proposta do autor e a proposta do professor. Escolha esta que em algum estágio pode ser ampliada ou modificada. Assim o curso não se desenvolve necessariamente de modo idêntico ao livro, fornecendo indícios das intenções do professor baseado em suas crenças e concepções de como deverá transcorrer o curso.

Examinando, mesmo que superficialmente, os livros selecionados. Enfocamos o livro utilizado preferencialmente pelo professor nos mostrando diferenciação na abordagem realizada. Por exemplo, se ocorreu uma preponderância ou privilégio de um caráter mais algébrico ou geométrico. Desta forma, surgem indícios significativos de como o aspecto figural vem sendo tratado nas aulas de Geometria Analítica. Compactuando com Cristina Barufi (1999), na seleção dos critérios para análise dos livros, destacando o aspecto visual:

> – O texto é rico em figuras, gráficos, utilizando, às vezes, argumentos geométricos ou gráficos para fazer cálculos algébricos.
> – O texto apresenta figuras e gráficos, mas os argumentos são algébricos.
> – O texto quase não tem figuras ou não tem figura alguma. (BARUFFI, *Op. cit.* p.55)

A autora apresenta uma tipologia dos livros didáticos em função de como aparecem as figuras, isto não compõe o nosso foco de pesquisa. No entanto, ao olharmos o livro que o professor adota e quais termos o autor (Armando Righetto) utiliza. Se ele faz ou não referência às figuras ou as figuras não são mencionadas. Em outras palavras, se elas existem, estão diante do leitor, mas o autor não faz referência a elas, não interliga as demonstrações, conceitos e definições com um olhar técnico que pudesse nos fornecer pistas, indícios de como são tratados estes elementos imagéticos, podendo constituir numa fonte de influência para os protagonistas desta história.

Não existia um livro específico para todo o curso de Geometria Analítica; porém para o assunto abordado nesta pesquisa (retas e planos) existiu a predominância do título: Vetores e Geometria Analítica, de Armando Righetto. No entanto, os alunos tinham à sua disposição livros como: Geometria Analítica: Um Tratamento Vetorial (Paulo Boulos e Ivan Camargo); Geometria Analítica (Charles Lehman) e Geometria Analítica (Alfredo Steinbruch e Paulo Winterle). Tais obras podem ser encontradas facilmente na Biblioteca Central Julieta Carteado (UEFS); sendo também indicadas no conteúdo programático da disciplina, como leituras complementares.

Num primeiro contato com o livro Vetores e Geometria Analítica, em um trecho do prefácio, o autor evidencia que: “Destinamos este livro aos alunos e, na busca de maior clareza, às vezes nos tornamos elementares, porém sem prejudicar o rigor da ciência.” (RIGHETTO, 1988, p.7).

Será que está projetado de modo implícito nesta expressão "rigor da ciência", uma certa omissão quanto à forma de utilização das representações gráficas, já que se fazem presentes em grande parte das definições, exemplos e exercícios resolvidos, porém com a ausência de expressões do tipo: "observe a figura"; "a representação gráfica é" ou "veja o gráfico"; isto é, percebe-se a recorrência ao elemento imagético, entretanto com ressalvas em destacá-lo com maior veemência. Ou será que fazer referência ao rigor cientifico não implica em uma maior valoração do aspecto algébrico? . Daí ressaltaríamos, o segundo critério da pesquisa de Barufi (1999): "O texto apresenta figuras e gráficos, mas os argumentos são algébricos."

Vejamos alguns exemplos. Primeiro a definição de equação vetorial da reta e a figura que acompanha tal definição, assim como a definição de equação vetorial do plano e seu esboço gráfico. Estabelecemos um comparativo entre as notas de aulas do professor, as anotações de alguns alunos e as figuras apresentadas pelo livro adotado pelo professor. O nosso objetivo é perceber como estas imagens enquanto "ferramentas" ou "instrumentos" são utilizadas pelos protagonistas num processo de produção de significados numa sala de aula de geometria analítica. O que ele evidencia nas suas representações gráficas e o que não merece um efetivo destaque. Se o professor segue o livro ou mescla suas notas de aulas com informações de outros livros. São questionamentos que se esclarecidos nos fornecem fios para tecer nossa teia de considerações. Nesta seqüência apresentamos este comparativo entre as notas de aula do professor e as anotações de alguns alunos e o livro.

> Consideremos em R^3 um sistema ortonormal de coordenadas $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Seja o ponto $P_1(x_1, y_1, z_1) \in R^3$. Ele é o centro de um feixe (Figura 1).
>
> Para definirmos certa reta r deste feixe temos que considerar um ponto P de R^3 e pertencente à reta (r).

Quadro 2: Definição de Equação Vetorial da Reta .

Fonte: RIGHETTO, 1988, p.131

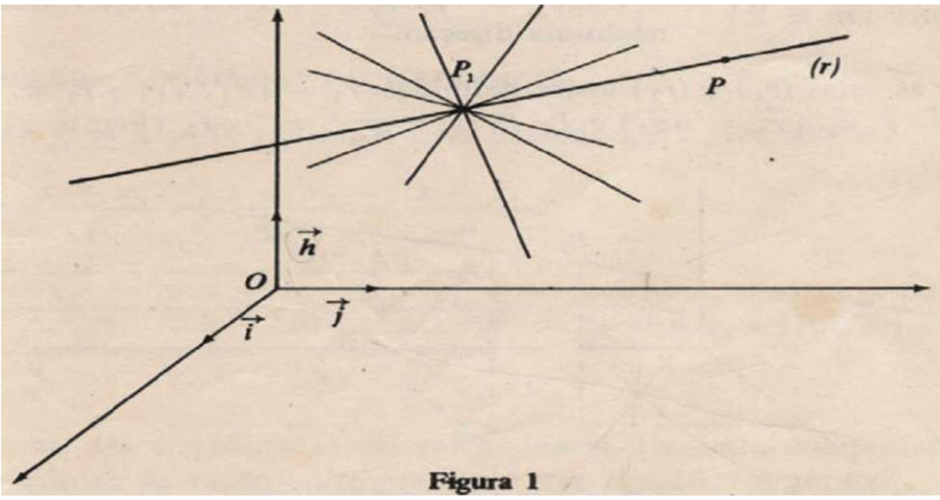
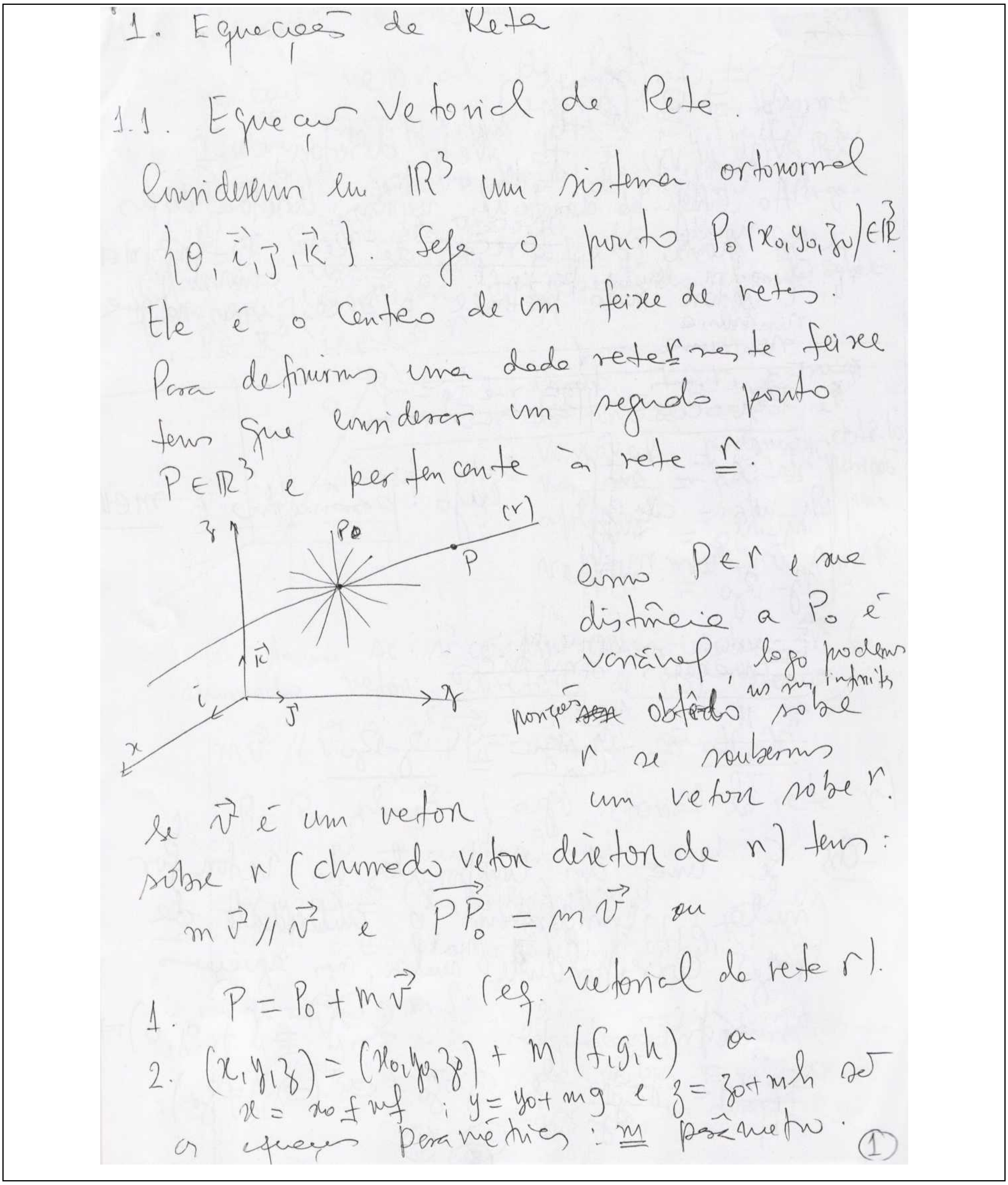


Figura 4: Representação gráfica da reta (r) em R^3.

Fonte: RIGHETTO, 1988, p.131.

O professor segue, a mesma definição apresentada no livro com a sucinta mudança do ponto P_1 para P_0. Em seguida temos a reprodução gráfica apresentada nas notas de aula do professor.



1. Equações de Reta

1.1. Equação Vetorial de Reta.

Consideremos em $\mathbb{R}^3$ um sistema ortonormal $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Seja o ponto $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Ele é o centro de um feixe de retas. Para definirmos uma dada reta r neste feixe temos que considerar um segundo ponto $P \in \mathbb{R}^3$ e pertencente à reta r.

Como $P \in r$ e sua distância a P_0 é variável, logo podemos obter os infinitos pontos sobre r se soubermos um vetor sobre r.

Se $\vec{v}$ é um vetor sobre r (chamado vetor diretor de r) temos:

$m\vec{v} \parallel \vec{v}$ e $\overrightarrow{PP_0} = m\vec{v}$ ou

1. $P = P_0 + m\vec{v}$ (eq. vetorial da reta r).
2. $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + m(f, g, h)$ ou

$x = x_0 \pm mf$; $y = y_0 + mg$ e $z = z_0 + mh$ são as equações paramétricas: m parâmetro.

1

Figura 5: Nota de aula do professor, definição de reta e determinação de sua equação vetorial, representação gráfica de uma reta no espaço.

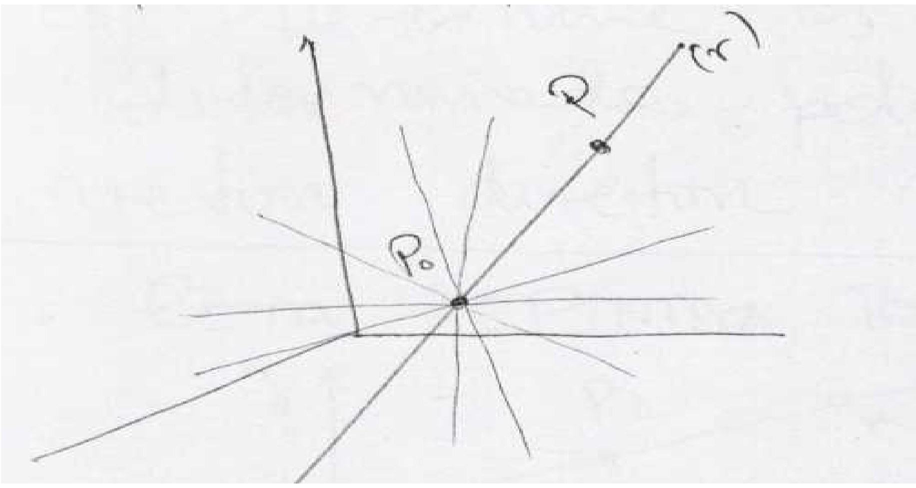


Figura 6: Reprodução do professor para a representação gráfica da reta (r) em R^3.

Apresentamos também, a representação gráfica da reta em R^3, no apontamento de três alunos.

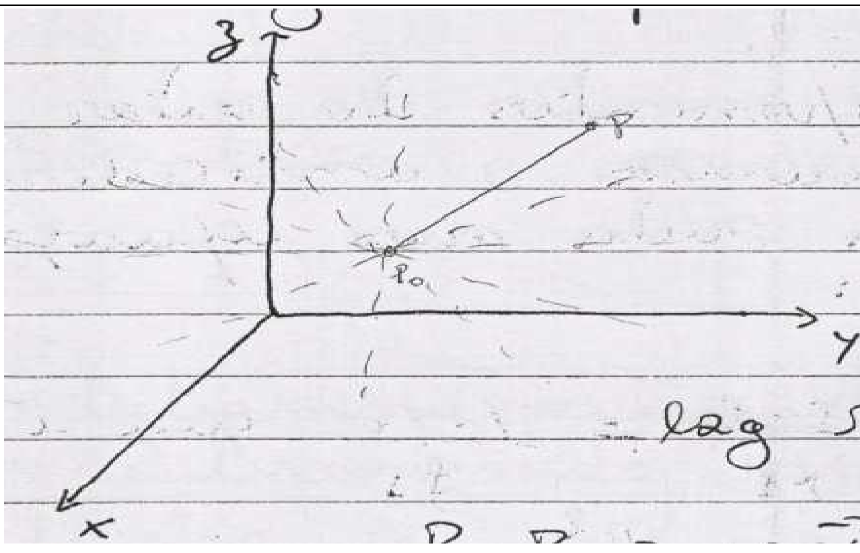


Figura 7: Aluno 1

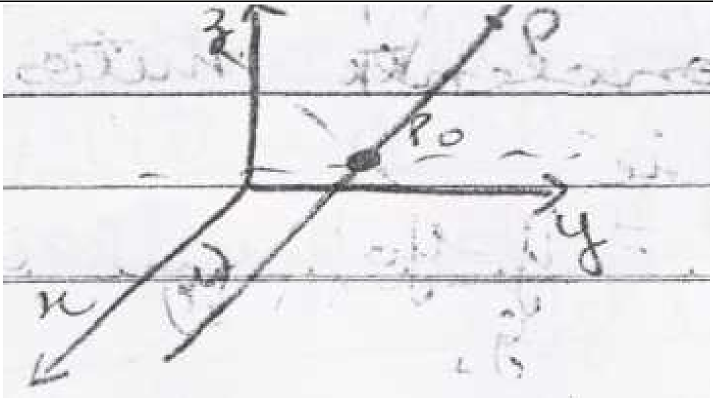


Figura 8: Aluno 2.

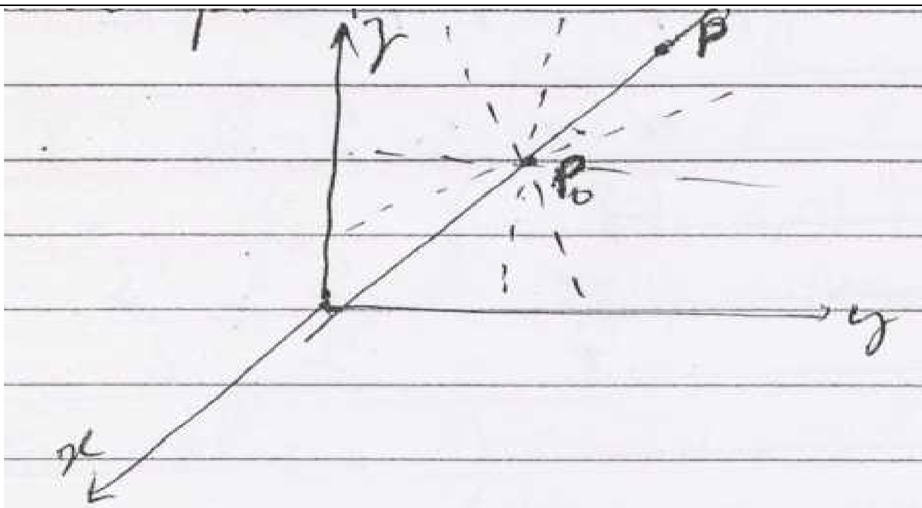


Figura 9: Aluno 3.

Num rápido comparativo, observamos alguns pontos distintos, quanto à representação gráfica apresentada nas notas de aula do professor e a figura mostrada no livro. Primeiro, o sistema ortonormal de coordenadas $\{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ que compõe a figura do livro não é percebida no desenho apresentado pelo professor, ou seja, estes elementos não aparecem. Outra questão é a função idêntica que assume o ponto P_1 (do livro) e o ponto P_0 (notas de aula do professor); assim como a direção da reta exibida no livro e exposta pelo professor.

Conjecturamos que os alunos por não terem claros os códigos e as convenções, fator este que dificulta a leitura de uma imagem matemática. Pensamos também que, esse possa ser um dos fatores que pode interferir nas interpretações dos alunos seja o não aparecimento do sistema ortonormal de coordenadas, mesmo admitindo que tal consideração esteja subentendida, indicada na definição, preestabelecida, e que deveria ser de conhecimento de todos os alunos que cursam geometria analítica.

Nas representações gráficas apresentadas pelos três alunos, percebe-se a indicação do sistema de coordenadas x, y, z, além de particularidades específicas no traço de cada um deles, assim como a ênfase dada a cada elemento. Como constatam Do e Gross (1997) sobre intenções subentendidas nas ações gráficas e acrescentando elementos de análise, observando que:

> (...) atenção e foco, em geral, são marcadas por títulos e legendas e, também, por superposição de traços (...). A superposição de traços parece ser um ato de seleção, de atenção, de refinamento do contorno, ou de adição de detalhe (especificação ou generalização da forma). (DO e GROSS, 1997, *apud*, MEDEIROS, 2004, p.83-84).

Dentro desta ótica, façamos uma análise. O aluno 1 parece traçar timidamente a reta (r), o aluno 2, empreende mais firmeza ao traçar a reta (r) e o aluno 3, expõe a reta de forma aparentemente mais equilibrada. Quanto à direção da reta (r) não percebemos uma expressiva diferenciação entre os desenhos.

Passemos agora à definição de equação vetorial de um plano em R^3.

Um plano fica determinado por três pontos não colineares. Tomemos os pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ e $P_3(x_3, y_3, z_3)$, não colineares, referidos em um sistema ortonormal canônico $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. O plano determinado por estes três pontos é o mesmo plano definido pelo ponto P_1 e pelos vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_1P_3}$, L.I. Os vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$, não são paralelos porque os pontos P_1, P_2 e P_3 não estão alinhados, são os *vetores-base* do plano.

Quadro 3: Definição de Equação Vetorial do plano.

Fonte: RIGHETTO, 1988, p.207.

Em seguida, a figura é apresentada no livro, porém em nenhum momento é destacada a sua existência.

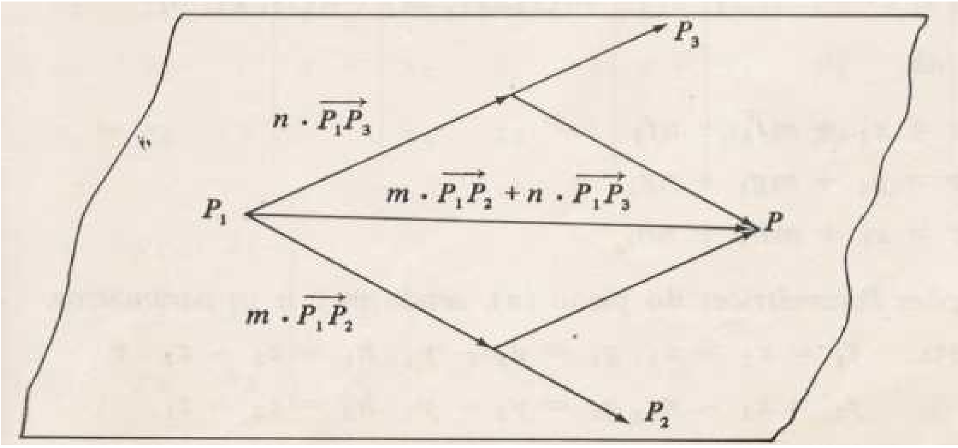
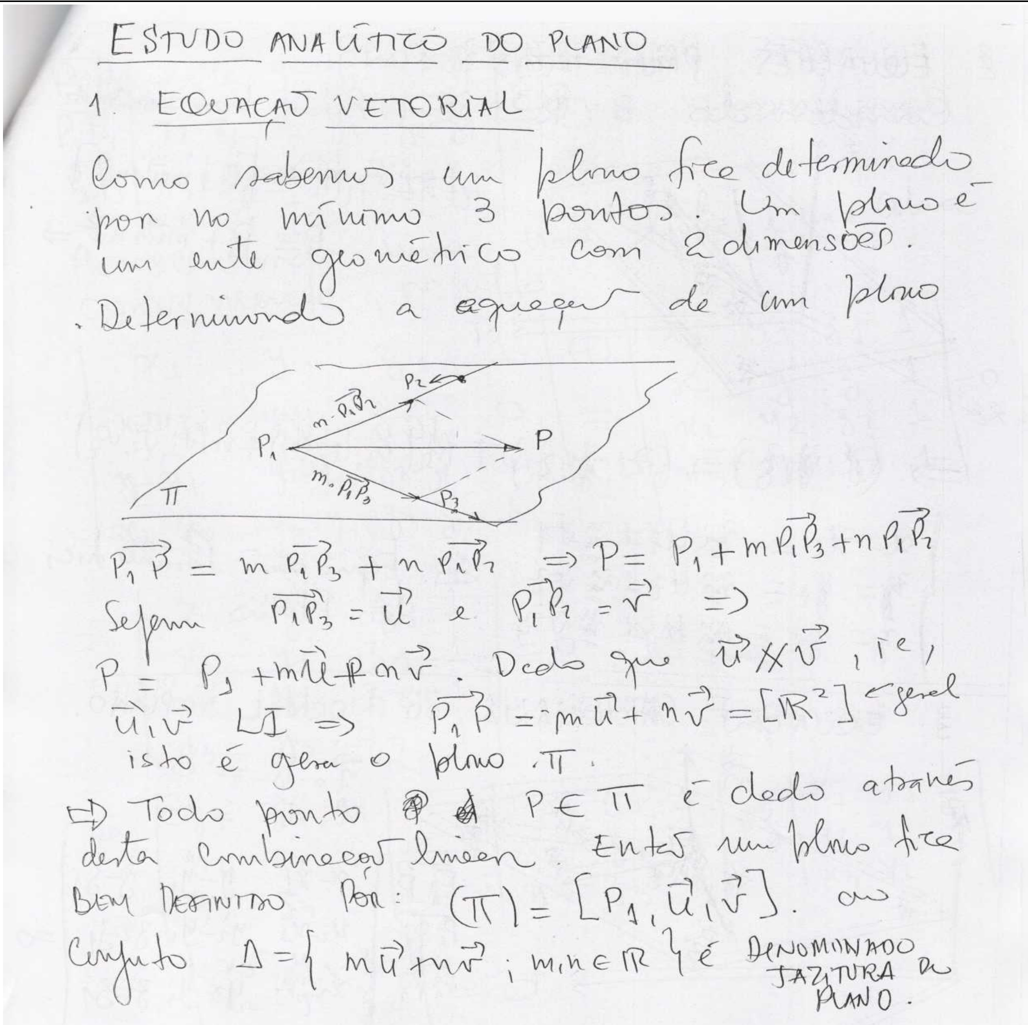


Figura 10: Representação gráfica do plano em R^3, apresentando os elementos que definem a sua equação vetorial.

Fonte: RIGHETTO, 1988, p.207.

Na definição apresentada pelo professor, observam-se sucintas diferenças ao definir plano apresentando a figura representativa do plano, prosseguindo imediatamente para a definição da equação vetorial, como base em elementos apresentados na figura.



ESTUDO ANALÍTICO DO PLANO

1. EQUAÇÃO VETORIAL

Como sabemos um plano fica determinado por no mínimo 3 pontos. Um plano é um ente geométrico com 2 dimensões.

. Determinando a equação de um plano

$\overrightarrow{P_1P} = m\,\overrightarrow{P_1P_3} + n\,\overrightarrow{P_1P_2} \Rightarrow P = P_1 + m\overrightarrow{P_1P_3} + n\overrightarrow{P_1P_2}$

Sejam $\overrightarrow{P_1P_3} = \vec{u}$ e $\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{v} \Rightarrow$

$P = P_1 + m\vec{u} + n\vec{v}$. Dado que $\vec{u} \not\parallel \vec{v}$, i.e., $\vec{u}, \vec{v}$ LI $\Rightarrow$ $\overrightarrow{P_1P} = m\vec{u} + n\vec{v} = [\mathbb{R}^2]$ é geral isto é gera o plano π.

⇨ Todo ponto $P \in \pi$ é dado através desta combinação linear. Então um plano fica BEM DEFINIDO POR: $(\pi) = [P_1, \vec{u}, \vec{v}]$. ou Conjunto $\Delta = \{ m\vec{u} + n\vec{v}\ ;\ m,n \in \mathbb{R} \}$ é DENOMINADO JAZITURA DO PLANO.

Figura 11: Nota de aula do professor, definição de plano e determinação de sua equação vetorial.

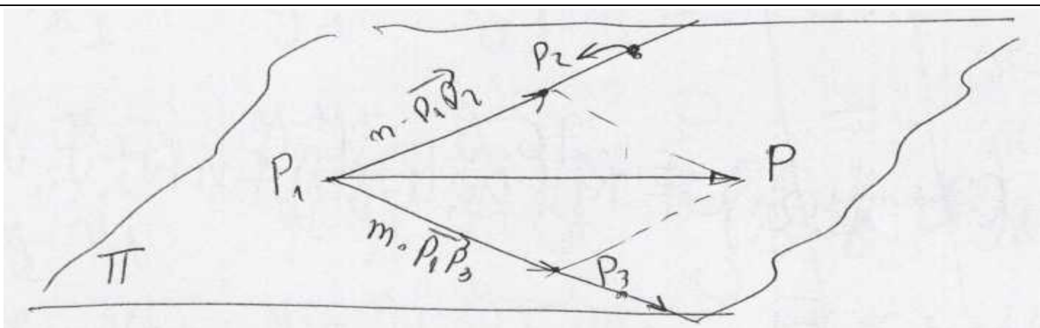


Figura 12: Representação do plano (professor).

A representação do plano, na interpretação de dois alunos.

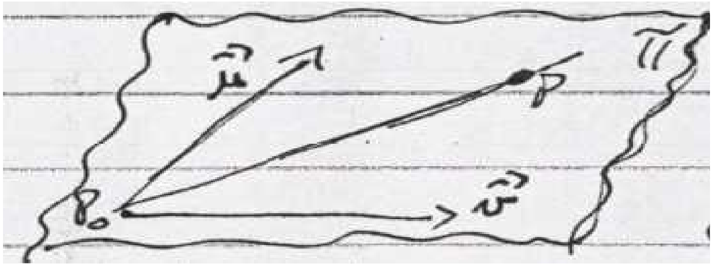


Figura 13: Aluno 1.

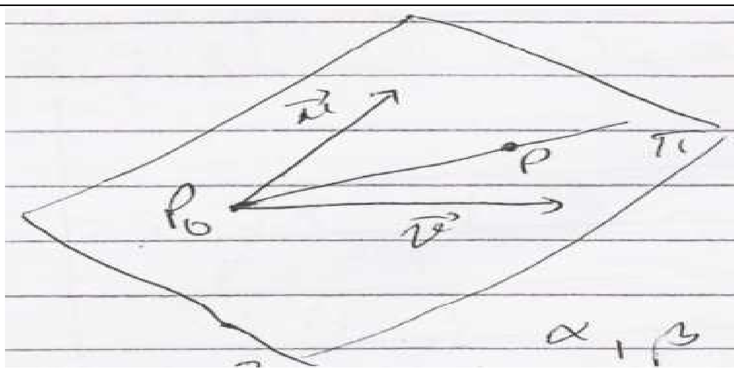


Figura 14: Aluno 2.

Neste comparativo, destacamos a diferença existente entre a nota de aula do professor e o que é efetivamente apresentado no quadro pelos alunos. Os vetores $m \cdot \overrightarrow{P_1P_2}$ e $n \cdot \overrightarrow{P_1P_3}$ exibidos na figura não são evidenciados nos desenhos dos alunos, assim como a soma dos vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$, tendo como resultante o vetor $\overrightarrow{P_1P}$ (nota de aula do professor), o mesmo não foi ressaltado no esboço do plano (alunos). O elemento P_1 é também substituído por P_0.

Nesta rápida abordagem percebem-se novos direcionamentos, os quais foram inicialmente planejados pelo professor e na apresentação destes conteúdos em sala de aula sofrem pequenas modificações, uma espécie de "mudança de rota" nas interligações que se processam neste ambiente.

4 OBSERVAÇÃO PARTICIPATIVA NUMA SALA DE AULA DE GEOMETRIA ANALÍTICA.

4.1 O Nosso Olhar: Relato / narrativa / descrição da observação participante.

Antes de começarmos o nosso relato, destacamos que os nomes dos personagens que compuseram nossa história terão um caráter meramente fictício tendo como intuito a garantia de maior privacidade e menor constrangimento aos reais autores destes episódios. Sempre que possível estaremos caracterizando estes personagens, partindo de traços particulares e específicos de cada sujeito.

Outra distinção dos demais capítulos será a utilização da personificação do verbo na primeira pessoa do singular. Neste momento, assumi uma posição mais intimista e relatei minhas interpretações, impressões, suposições e especulações, buscando um "mergulho profundo" na cultura de uma sala de aula de geometria analítica e álgebra linear, onde os sujeitos sociais produzem significados, interagem e tentam decifrar o que o professor deseja transmitir.

A minha postura é de estranhamento, desconfiança e questionamento constante. Indagamos sempre se tudo o que acontece naquele ambiente é realmente tão comum e tão evidente assim, "um professor ensinando aos alunos", em outras palavras, tentando transmitir ou traduzir seus conhecimentos acerca da geometria analítica e álgebra linear. Nesta perspectiva, complementamos também, que papel – possivelmente diferenciado – professores e alunos atribuem aos gráficos, desenhos e figuras nesta tentativa de ensino-aprendizagem?

Neste momento, o meu ponto de partida se configura em retratar, de forma sucinta, o nosso primeiro contato com a composição do espaço físico de uma sala de aula de geometria analítica, caracterizada pelos objetos comumente encontrados em salas de aula: carteiras, quadro, giz, mesa e cadeira, estes últimos destinados à utilização pelo professor, geralmente posicionados em frente ao quadro. Esta disposição inicial dos objetos sofre pequenas modificações a cada aula, desenhando um novo cenário. Transformações estas que podem ser fundamentadas por alguns condicionantes, caracterizando uma aproximação ou distanciamento entre os elementos envolvidos no processo (alunos, professor e a geometria analítica) alguns deles são: - visibilidade (melhor ângulo para visualizar as informações anotadas no quadro); - identificação (com a disciplina, com um grupo de colegas, com o professor); não identificação (com a disciplina, com alguns colegas ou com o professor).

Ressalto então o meu primeiro encontro, uma das minhas primeiras observações e talvez uma das mais significativas, por vislumbrar a sala de aula sem a presença do professor, ou seja, este ambiente adquire características próprias dos alunos, como por exemplo: a mesa do professor se transforma, em outras palavras, adquire a função de assento, uma espécie de "banco", deixando transparecer as descontraídas interlocuções entre os alunos. Outro ponto que merece destaque é a minha presença na sala de aula como suposta aluna e a presença como pesquisadora. Esse primeiro contato com a turma, foi caracterizado pela informalidade, não tendo revelado, de pronto, a minha condição de pesquisadora, pois apenas o professor da disciplina tinha conhecimento de tal condição, o que permitiu uma maior descontração e descomprometimento por parte dos alunos, já que a minha presença se configurava como mais um membro desta comunidade (alunos). Assim, as conversas fluíam sem bloqueios, inibições ou limitações exemplificado na seguinte situação: Uma aluna que chamarei de Tatiana enquanto aguardava a chegada do professor pergunta a um colega. *"O 'maluco' está ai?"* Então ele responde: *"Encontrei com ele no módulo 5. Ele disse que já está vindo."*

Nos indagamos então: o que esta aluna estaria querendo dizer com esta palavra "maluco"? Que sentimento está sustentando esta palavra? Interessa-nos mais de perto aqui a hipótese de que esse "maluco" não tenha uma conotação meramente pessoal, mas expresse um juízo mais social: "maluco" é alguém que não tem o domínio da razão, é alguém cujas ações ou comportamentos são estranhos à regra social.

Pergunte-se então: o que a aluna queria dizer ao afirmar que o professor é alguém que não tem o domínio da razão, ou alguém cujo comportamento ou ação são estranhos à regra social?

Talvez, ela estivesse querendo dizer: eu não entendo a razão dele, os comportamentos dele, as ações dele são estranhas para mim. Isto é, na relação professor-aluno, na tentativa de comunicação entre professor e aluno, aquela aluna estaria "estranhando" a razão do professor, seus comportamentos, suas ações. Portanto, de início, para começo de conversa, o processo comunicativo entre professor e aluno inicia-se sob o signo do estranhamento!

A expressão "maluco" transporta em si características implícitas e explícitas de como a aluna concebe a figura do professor constituindo numa informação de fundo, uma metáfora que particulariza e distingue aquele personagem dentre outros, porém esta informação é oculta, não declarada, camuflada, apenas os sujeitos que pertencem à mesma classe têm acesso e conhecimento destas denominações. Ou seja, o professor não tem conhecimento deste episódio e eu esporadicamente tive devido à minha condição aparente de aluna da disciplina geometria analítica e álgebra linear.

Esta aparente espontaneidade é, de certa forma, podada ou ocultada ao saber que existe alguém naquele espaço com um olhar atento às suas atitudes, comportamentos, questionamentos, etc. É a partir deste momento que os elementos não verbais como gesto, postura, expressão facial, olhar, riso, passam a constituir efetivamente grupo dos elementos significativos e comunicativos nesta investigação. Pois segundo Steinberg (1988): "Há certas emoções que muitas vezes não se consegue ocultar (...)" (STEINBERG, *op. cit*. p.20).

Desta forma, observamos que existe uma divisão de classe: entre alunos e professor existem interações, porém nem tudo é declarado, existe um jogo, existem regras e tudo é medido, ponderado, deixando transparecer o aspecto hierárquico da sala de aula. Como diria Geertz (1989): "uma hierarquia estratificada de estruturas significantes." (GEERTZ, *op.cit.,* p.17).

Em seguida, o professor entra na sala de aula, apressadamente, e fala: *"Bom dia pessoal! Porque vocês estão tão distantes assim?"* Neste momento um grupo de alunos se aproxima e se rearrumam próximo ao professor e ao quadro, no entanto, dois alunos permanecem no fundo da sala, numa atitude demonstrativa de negação à solicitação feita pelo docente. Deixando transparecer uma espécie de vontade própria, o que poderíamos supor especulativamente, se o lugar onde eles estavam era confortável, garantia uma boa visibilidade e eles estavam se sentindo bem. Desta forma, Não seria a interferência verbal de alguém que mudaria tal concepção.

Ficando implícito também que nem sempre o que o mestre solicita, diz ou afirma é tido como verdade universal, pois neste ambiente, dependendo do momento, tudo pode ser questionado. Especulamos então que: esta distância geográfica é apenas uma expressão física de um outro distanciamento, o distanciamento epistemológico, o distanciamento comunicativo, o estranhamento simbólico. O professor é um “maluco”, alguém cuja razão e o comportamento são estranhos.

Um dos alunos que não foram contaminados pela interferência verbal do professor, o qual denominarei de Elton, um sujeito questionador, aparentemente tímido, que no transcorrer da nossa história será um dos atores de destaque.

Outro ponto que evidencia o aspecto hierárquico também é a forma como são arrumados e agrupados os elementos físicos que compõem a sala de aula, como por exemplo, a forma com que são dispostos mesa, cadeiras e quadro, tendo na figura do professor uma posição de destaque, de centro das atenções e de protagonista do espetáculo. No entanto, o que ocorre efetivamente é uma transição entre os papéis principais, pois em alguns momentos, principalmente quando o professor vira-se para o quadro e numa atitude de isolamento e concentração transcreve suas notas de aula em silêncio. Então a mistura de várias falas que emanam de vários pontos da sala, num burburinho desordenado, mostra-nos que mesmo diante do silêncio do professor, as interações continuam, os intercâmbios acontecem, mesmo que sem vínculo direto com os aspectos matemáticos ou geométricos.

Os alunos conversam em voz baixa entre si, sempre com um colega próximo, enquanto reproduzem em seus cadernos suas primeiras interpretações do que visualizam no quadro.

O professor distribui em seguida uma lista de exercício (mais um signo que precisa ser interpretado, significado, ...), e na seqüência escolhe a seguinte questão como exemplo da Desigualdade de Cauchy-Schwarz: Mostre que $(a\cos\theta + b\,\text{sen}\,\theta)^2 \leq a^2 + b^2$. Verbalmente fala: *“A questão é como vou traduzir o que está aqui dentro do parêntese em linguagem de vetores.”* Prosseguindo a explicação, ele apresenta o seguinte:

$u = (a,b)$ e $v = (\cos\theta, \text{sen}\,\theta)$

$\langle u,v\rangle = a\cos\theta + b\,\text{sen}\,\theta$

$|\langle x,y\rangle| = |a\cos\theta + b\,\text{sen}\,\theta|^2 \leq \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta}\right)^2 = \left(a^2+b^2\right)\cdot 1.$

Logo, $| a\cos\theta + bsen\theta |^2 \leq \left(a^2 + b^2\right)$.

Esta foi a suposta tradução apresentada pelo professor, diante do comportamento dos alunos, onde uns se preocupavam em copiar os conteúdos instantaneamente, em silêncio, outros copiam e conversam em voz baixa com o colega ao lado, enquanto outros preferem prestar atenção à exposição do assunto, para em seguida copiar e em um caso particular um aluno assiste a aula e nada anota, este aluno recebeu o nome de João, é um sujeito que se destaca dentre os outros, principalmente pelo seu estilo.

Ele entra na sala, com vinte minutos de atraso, pronuncia um 'Bom dia' bem expressivo. João particularmente adota um estilo diferente do restante do grupo, não utiliza caderno, sua atitude é sempre de assistir parte da aula, ou de não comparecer a elas, e numa atitude contrária à da sua chegada, saiu em surdina, aproveitando para se retirar da sala no momento em que o professor virou-se para escrever novamente no quadro, transcorrido apenas trinta e cinco minutos de permanência em sala de aula. Fatos como estes fortificam a idéia de que nas palavras de Geertz (1989) existe "uma multiplicidade de estruturas (...) sobrepostas ou amarradas uma às outras, que são simultaneamente estranhas, irregulares e inexplícitas (...)"(GEERTZ, *op. cit.*, p.20).

O professor questiona: *"Entenderam?"* Uma aluna responde: *"Alguma coisa eu entendi"*. O professor contrapõe: *"E as coisas que você não entendeu? Você entendeu 02 ou 08?"*. Então ela responde, com uma expressão facial duvidosa: "*08"*.

Chega mais um aluno, depois de transcorrido trinta minutos de aula. Seu comportamento um tanto discreto, é de direcionar-se até uma carteira e transportá-la para próximo do grupo maior de alunos; especulamos que seria uma tentativa de integração e aproximação dos colegas que já se encontravam num estagio maior de envolvimento com o que estava sendo abordado**.** Este aluno não concordou em participar da pesquisa, porém a partir do momento em que estou na sala de aula observando, o aluno já está participando da pesquisa, mesmo que indiretamente.

Paira no ar um clima de distanciamento entre alunos e professor, no entanto, percebe-se que o professor tenta tal aproximação como relatado inicialmente, mas existe uma espécie de bloqueio, inibição por parte dos alunos.

Produto Interno

O professor continua suas explicações, agora o assunto abordado é Produto Interno. A cada parte concluída ele pergunta: Correto? E os alunos respondem: "Correto" de forma meio involuntária. Então como exemplo ilustrativo do conteúdo ministrado, ele resolve a seguinte questão de uma lista de exercícios, distribuída anteriormente: Mostre que: $\| x + \alpha y \| \geq \| x \|$ sse $\langle x, y \rangle = 0$.

O professor expõe a resolução da questão:

$\| x + \alpha y \|^2 = \langle x + \alpha\ y, x + \alpha\ y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, \alpha\ y \rangle + \langle \alpha\ y, x \rangle + \langle \alpha\ y, \alpha\ y \rangle =$

$\| x \|^2 + \alpha \langle x, y \rangle + \alpha \langle y, x \rangle + \alpha^2 \langle y, y \rangle = \| x \|^2 + 2\alpha \langle x, y \rangle + \alpha^2 \| y \|^2$.

Se $\langle x, y \rangle = 0$ então $\| x + \alpha\ y \|^2 = \| x \|^2 + \alpha^2 \| y \|^2 \geq \| x \|^2$.

Porém, neste momento, Elton não concorda com o que foi exposto e questiona a respeito do valor de α; se realmente $\alpha \in R$ ou $\alpha \neq 0$. O mesmo aluno resolve o impasse: *"Professor, considere* $x = (1,1)$, $y = (-1,-1)$ *e* $\alpha = -1$*."* O professor segue tal sugestão e representa esta situação graficamente, numa tentativa de transpor para o desenho todos os dados algébricos da questão.

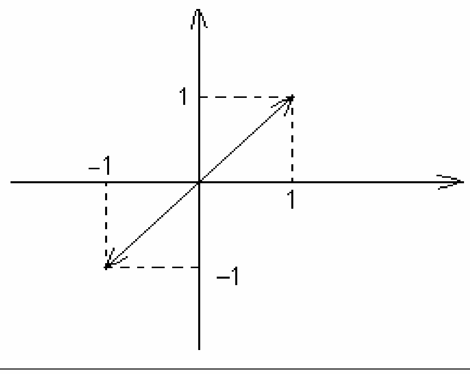


Figura 15: Representação gráfica do contra exemplo apresentado por um aluno sobre a desigualdade

Então o professor fala: "Estou tentando perceber onde está o "furinho" (falha). Quando ele diz que está tentando *perceber*... talvez esteja aí a razão da recorrência ao desenho, pois este permite o recurso à uma percepção e talvez seja também uma das formas de manifestação do estranhamento dos alunos. Será que eles conseguem *perceber* aquilo que o professor *percebe* nos desenhos? Isto é, os desenhos têm um significado para o professor, mas têm o mesmo significado para os alunos? Ou são abstratos?

Só então que algebricamente, ele substitui estes valores na questão e conclui que somente uma das implicações é válida.

A atitude do professor é resumir geometricamente o que será posteriormente transcrito algebricamente, ou seja, ele apresenta panoramicamente o que será exposto através do desenho, talvez com o intuito de sintetizar e antecipar o que será abordado posteriormente ou será que a sua intenção foi recorrer ao elemento figural com o objetivo de simplificar e auxiliar a demonstração, na tentativa de reduzir o impacto provocado pelo excessivo simbolismo?

Em entrevista com o professor a sua declaração foi: *"Considero o aspecto gráfico ou geométrico imprescindível para uma aquisição mais significativa do saber matemático".* Pergunto então: O que é mais relevante? As demonstrações ou os desenhos? *"Desenhos ilustram ajudam, no entanto muitas demonstrações podem ser feitas sem auxílio algum de desenhos. Os desenhos são parte integrante do ensino(em sala), mas em muitas situações não é tão relevante".* Então questiono: Por que em suas aulas você sempre recorre aos desenhos e gráficos? Com qual objetivo? *"Recorro para dar suporte geométrico às considerações analíticas com o objetivo de vincular os aspectos geométricos com os oriundos das equações, relações e funções abordadas na aula."* Então imagine que nas aulas de matemática fosse proibido a utilização do desenho. Que situação você visualiza? *"Existem ramos da matemática (como a álgebra) que prescinde de aulas com recorrência gráfica. Já no cálculo seria extremamente improvável darmos aulas sem a visualização de figuras / desenhos na prática do ensino. Eu me visualizaria com tendo que atravessar um rio longo sem barco".*

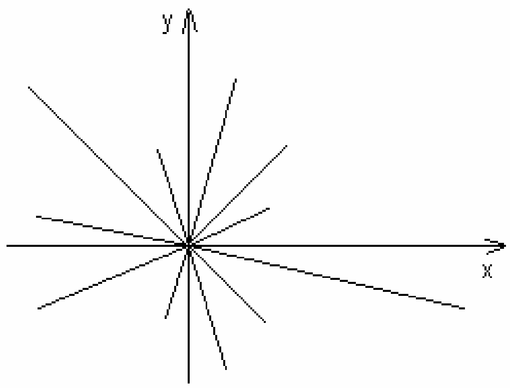
Numa análise as respostas do professor, percebem-se trechos contraditórios, pois ao mesmo tempo em que é imprescindível, é auxiliar, sendo um suporte e nem sempre é tão relevante, deixando transparecer que o aspecto gráfico geométrico é um instrumento comparado a um barco com a função estrita de transporte, um objeto destinado a interligar distâncias, sendo deixado de lado, até o momento que ressurge uma nova travessia. Interpretamos então, que o aspecto gráfico para o professor é um elemento recorrente, sintetizador, uma espécie de coadjuvante da matemática, porém quando supomos sua extinção, num ato extremo, percebe-se sua aparente importância, vinculando apenas ao fator instrumental do desenho. Metaforicamente é como se o desenho fosse uma pessoa muito importante para o professor, porém ele só perceberia seu verdadeiro valor quando perdesse aquela pessoa. Como um namorado apaixonado por sua namorada, porém ela o esnoba, somente quando o namorado decide deixá-la é que ela percebe sua real importância.

Numa outra análise, indagamos: Porque ele não falou: cálculo sem figuras é como se fosse um barco sem rio. De que adianta ter um barco se não há um rio para navegar? O rio é muito mais essencial do que o barco. No rio você pode nadar, pescar, o rio fornece água, é fonte de vida, etc. O barco é um instrumento! Então, quando ele diz que o desenho está para o barco como o rio para o cálculo, interpreto que para ele o barco é um instrumento, que não é essencial.

É então transcrito no quadro o seguinte teorema e a sua representação geométrica, apresentada pelo professor:

<u>**Teorema:**</u> Se $\beta = \left\{ \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \cdots, \overrightarrow{u_n} \right\}$ é uma base ortonormal para um espaço vetorial com produto interno V, e $\vec{v}$ é qualquer vetor em V, então $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} < \vec{v}, \overrightarrow{u_i} > \overrightarrow{u_i}$.

Sendo dito pelo professor que: ***"A base vai varrendo todo o meu espaço"***, ou seja, a base é um conjunto de vetores que gera todo o espaço.



Quadro 4: Combinações lineares em espaços vetoriais com produto interno

Ao observar as anotações dos cadernos de alguns alunos, em todos os cadernos que tivemos acesso, sem exceção, não foi registrada a figura acima, nem algo semelhante, apenas a parte algébrica da demonstração[22] do teorema.

Suponho então que os alunos não acharam relevante fazer tal anotação, diante da demonstração do teorema. Assim, numa tentativa interpretativa de perceber se essa é uma afirmação um tanto elementar, solicito posteriormente, que os alunos interpretem e representem graficamente a expressão: ***"A base vai varrendo todo o meu espaço",*** esta solicitação foi feita ao final do curso numa tentativa de perceber o que efetivamente eles interpretariam com a referida frase, se seria a mesma visualização do professor.

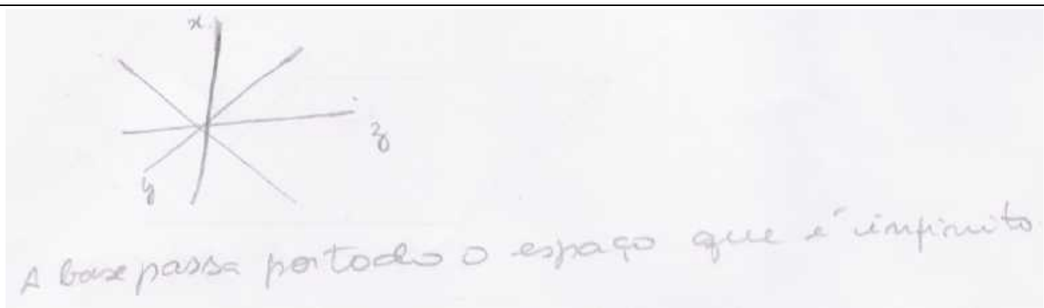


Figura 16: Aluno 1.

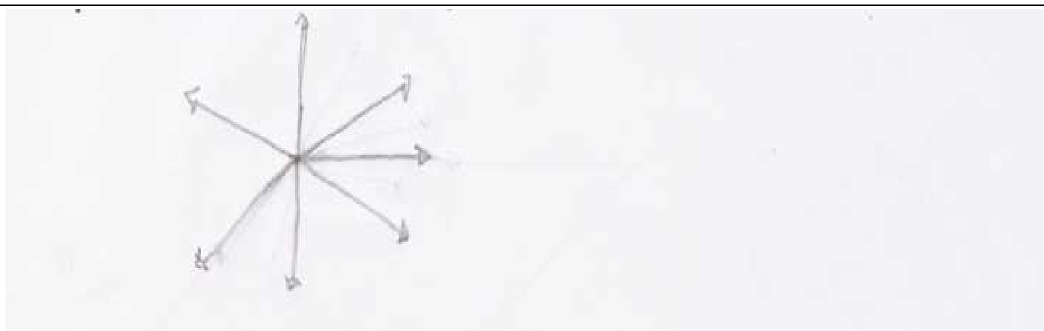


Figura 17: Aluno 2.

22 Trata-se de uma organização lógica algébrica, ou seja, a sistematização (ordenação de vários resultados num sistema dedutivo de axioma, conceitos e teorema) envolvendo hipóteses (suposição de que determinada afirmação é verdadeira), tese (onde se deseja chegar, objetivo a ser alcançado), artifícios e propriedades supostamente já conhecidas com intuito de verificar que o resultado apresentado é verdadeiro. Tendo como função esclarecer, explicar e eliminar as dúvidas dos matemáticos provando aquilo que não é óbvio acerca de determinadas afirmações. No entanto em sala de aula pode ser um elemento gerador de dúvidas, constituindo num desafio intelectual para os alunos que têm que abstrair e seguir a argumentação lógica do professor.

Figura 18: Aluno 3.

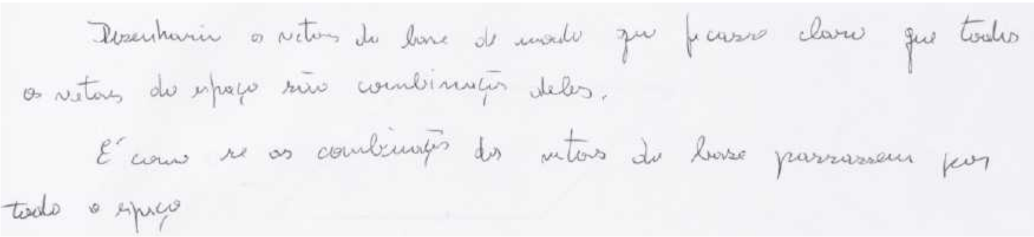

Desenharia os vetores da base de modo que ficasse claro que todos os vetores do espaço são combinações deles.
É como se as combinações dos vetores da base passassem por todo o espaço

Figura 19: Aluno 4.

Analisando as quatro representações, percebemos diferenciações que vão da junção entre o desenho e o texto escrito como forma de complementação da figura (aluno 1). Os alunos 2 e 3 demonstram que a apresentação do gráfico é suficiente para caracterizar a expressão, porém o aluno 4 prefere relatar a situação através de palavras, descrevendo como desenharia tal situação: *"Desenharia os vetores da base de modo que ficasse claro que todos os vetores do espaço são combinação deles. É como se as combinações dos vetores da base passassem por todo o espaço."*

Percebi que, a recorrência aos desenhos / gráficos é, em alguns momentos, e como constatado acima, dependendo do indivíduo, uma forma de tornar menos distante, mais flexível e mais simples as demonstrações, servindo como ponto inicial uma espécie de materialização do abstrato tornando mais real o raciocínio empreendido nas demonstrações. Outra suposição é de que a representação desta frase já estaria internalizada no plano simbólico de cada sujeito, ou seja, a frase: ***"A base vai varrendo todo o meu espaço"*** remeteria imediatamente a imagens como as apresentadas acima e seria um trânsito entre registros de representações.

A aula prossegue, o professor transcreve o que está em suas notas de aula para o quadro, em silêncio. Então uma aluna pergunta: *“Ali é lambda a (λa)”*. E o professor responde*: “Sim, é lambda vezes a”*. Este trecho serve para destacar a postura de alguns alunos durante todo o curso, as dúvidas apresentadas ao professor sempre versavam em entender ou não entender o que estava escrito no quadro, uma preocupação se estão copiando certo ou não.

Projeção ortogonal de um vetor sobre o outro.

Um aluno, que chamarei de Arnaldo, sempre se posicionado próximo ao professor se mostra um sujeito questionador, atento às suas anotações e bastante comunicativo, expõe sua dúvida: “*O que é essa projeção*?” referindo-se à projeção de um vetor sobre outro e o professor recorre ao desenho com espécie de “ferramenta” esclarecedora.

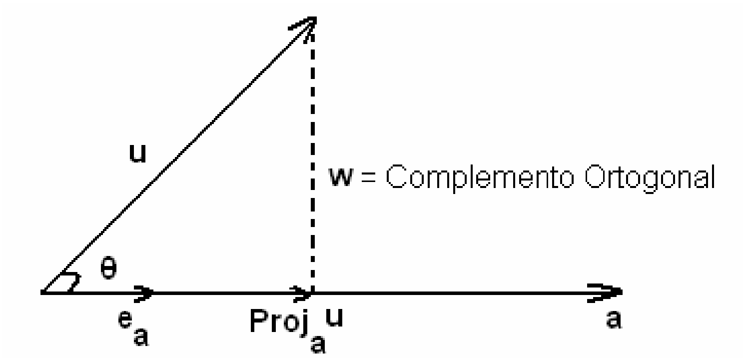


Figura 20: Representação geométrica da projeção ortogonal de vetores

$$\mathrm{Proj}_a{}^u = (\| u \| \cos\theta)\, e_a \qquad e_a = \frac{a}{\| a \|}$$

$$w = -\mathrm{Proj}_a{}^u + u \qquad p = \gamma\, a$$

$$\left(w,\ \mathrm{Proj}_a{}^u\right) = (u - p,\ p) = (u,\ p) - (p, p) = (u,\ p) - (\gamma\, a\ , p) = (u,\ p) - \gamma\,(a\ , p)$$

$$\Rightarrow\ \gamma = \frac{(u,\ p)}{(a\ , p)}.$$

Mostrar que: $\text{Proj}_a^u = \left(\frac{u \cdot a}{\|a\|^2} \right) a$.

$$\text{Proj}_a^u = (\|u\| \cos\theta) e_a$$

$$\text{Proj}_a^u = \left(\|u\| \frac{(u,a)}{\|a\| \|u\|} \right) \frac{a}{\|a\|}$$

$$\text{Proj}_a^u = \left(\frac{(u,a)}{\|a\|^2} \right) a.$$

Arnaldo olha fixamente para o quadro, e complementa: "*entendi*", gesticulando a cabeça afirmativamente.

Ressalto mais uma vez que sempre que o professor esclarece, explica ou re-explica algo para os alunos ou quando inicia algum assunto, quem aparece num primeiro plano são os desenhos. Será que os desenhos para ele é realmente o barco? Ou será que os desenhos constituem o rio e ele não percebe ou não admite isto?

Logo em seguida, uma nova explicação se inicia numa retrospectiva de assuntos os quais já foram abordados, e o elemento imagético parece sintetizar a explicação. Nesse sentido, faço a seguinte indagação: Como é uma aula de geometria analítica e álgebra linear com e sem o auxílio dos desenhos? Esta questão desejo respondê-la ao final desta pesquisa.

Alguns alunos aguardam o professor tocando violão em frente à porta da sala, descontraidamente, "uma seção de relaxamento" antes da aula. Enquanto outros três alunos discutem sobre a resolução de uma questão da lista de exercícios, um dos alunos representa graficamente o que foi solicitado na questão. Então o professor chega, no entanto não houve aula, pois no mesmo horário ocorreria um debate entre os candidatos a reitor da universidade, assim os alunos foram liberados para assistir a tal debate. O professor pergunta se os alunos gostariam de assistir ao debate; numa atitude persuasiva afirma: "*Eu gostaria, mas se vocês preferirem darei aula.*" Os alunos num primeiro momento, numa reação entre dúvida e silêncio, decidem seguir a sugestão do mestre em não ter aula, porém a maioria não demonstrou interesse em assistir ao debate e sim em aproveitar o tempo para resolver algumas pendências como pegar ou entregar um livro na biblioteca, estudar para outras disciplinas, dentre outros. Apenas um dos alunos, que vestia a camisa de um dos candidatos se mostrou bastante interessado em assistir tal debate.

Dia de avaliação. Os alunos estavam aparentemente apreensivos e ansiosos, discutindo as possíveis questões que, no seu entendimento, estariam na prova, resolvendo alguns exercícios numa espécie de "aquecimento final", antes de uma competição. Onde os alunos são os competidores e o professor é o juiz, tudo isso atrelado às regras, as quais determinam como esses competidores devem se comportar para não serem eliminados da competição, como, por exemplo, olhar a prova do colega. Vence a competição quem alcançar determinado nível de conhecimento na referida disciplina, em outras palavras, quem conseguir registrar isto na prova, pois o competidor pode conhecer a disciplina e diante da pressão imposta pela avaliação não alcançar um resultado satisfatório.

Neste mesmo contexto, outro grupo conversava sobre planos futuros: formatura, iniciação científica, monitoria, etc. Enquanto isto, uma aluna, que denominarei de Cléa, come um lanche na sala, senta-se à mesa do professor, e conversa descontraída com sua colega Tatiana que estava sentada na "cadeira do professor". Os assuntos abordados eram família, lazer, etc., menos avaliação, demonstrando certa tranqüilidade em relação à prova.

Ás 8:45h uma aluna questiona a uma de suas colegas: *"Haverá avaliação hoje? A aula estava programada para 7:30 h e o professor ainda não chegou."* Elton afirma que a duração da prova será de apenas uma hora. Mesmo assim, neste instante, um aluno se retira da sala numa atitude aparente de desistência de fazer a avaliação e repúdio pelo atraso do professor.

Cléa se aproxima de Elton, acho que ela está paquerando ele e ele um tanto inibido consegue segurar a mão de Cléa. Ela tem a característica de ser sempre bastante carinhosa com os garotos. Assim outro elemento constituinte desta sala de aula aflora, o aspecto sexual e emocional dos atores que compõem este âmbito.

Matrizes

Em outra aula, são 8:40h, o professor ainda não chegou, também a maioria dos alunos não chegaram, a aula estava programada para 7:30h, mas já se instaurou a cultura da aula só iniciar com apenas uma hora após seu inicio previsto. Assim, criou-se o código de que ninguém chegaria no horário previsto. Mesmo assim, os alunos perguntam entre si, sobre o tempo de tolerância para espera do professor, então um aluno diz que já ouviu falar em trinta minutos; mas não tem certeza.

Enquanto isso Cléa abraça Marcos, colega muito próximo de Elton, porém Tatiana diz: *"Não sei porque você insiste em abraçar Marcos, e complementa com: venha cá, venha cá ..., puxando Marcos com veemência."*

O professor chega e justifica seu atraso, afirmando que perdeu o ônibus. Então a aula tem início, o assunto abordado é matrizes, e em um dos exercícios pede-se para demonstrar que: Se $B = I \cdot A$ então B é hermitiana. O professor faz a demonstração numa seqüência de termos algébricos inferindo a sua argumentação lógica, usando expressões como: Sejam ..., Considere ..., Usando isto como hipótese, temos ..., Então ..., agente sabe que ..., Chegamos à conclusão que ..., e ao concluir pergunta se os alunos "captaram?". A resposta é o silêncio da turma contrapondo com a afirmação de um único aluno. Poderíamos analisar sob duas vertentes: seguindo o ditado popular "quem cala consente" ou o silêncio seria uma declaração implícita de não entendimento da demonstração, faltando estímulo suficiente para manifestá-lo verbalmente. Assim, recorremos à concepção de Laplane (2000): "(...) o silêncio pode significar uma predominância da ação sobre a palavra (...)." (LAPLANE, 2000, p.26)

Estas descrições retratam o perfil de uma sala de aula, onde existe uma hierarquia, divisões entre grupos (alunos e professor), tudo isto atrelado a regras preestabelecidas e limites predeterminados, ou seja, uma micro-sociedade composta por uma multiplicidade de significados entrelaçados neste processo cultural, dentre estes fatores estão os desenhos os gráficos ou figuras que aparecem como elementos mediadores e interpretativos no processo de ensino e aprendizagem nesta sala de aula.

Retas

Inicia-se a abordagem sobre retas. A minha descrição terá como base a filmagem destas aulas que versaram sobre retas e planos e notas de aula do professor, destacando a definição de equação de uma reta em R^3, na sua forma vetorial: $P = P_0 + m \cdot \vec{v}; \quad m \in R$, onde P_0 é um ponto fixo da reta e $\vec{v}$ é um vetor não nulo paralelo à reta (dito vetor diretor da reta), relacionado à figura 4.

Neste momento, tentando perceber se seu raciocínio está correto, Arnaldo fala: *"Então Professor. Aí é ponto mais um múltiplo de um vetor?"* Apontando para o quadro. E o professor responde: *"É isto mesmo."*

Em algum momento da aula, Tatiana prefere conversar paralelamente com sua colega Cléa, sobre alguns assuntos que não o abordado na aula, num gesto de cansaço se debruça sobre o braço da carteira; demonstrando estar totalmente desatenta à aula. O professor parece não perceber esta situação e a aula prossegue num ritmo acelerado.

O fato de o primeiro semestre conter uma grande quantidade de feriados e devido às suas viagens para São Paulo onde cursa doutorado, o conduz a agendar algumas aulas extras que ocorreriam às quartas-feiras já que as aulas ocorrerem sempre às terças-feiras e quintas-feiras. Enquanto os alunos copiavam as anotações registradas no quadro, se consubstanciando numa rotina desta sala de aula, o professor transcreve incessantemente suas notas de aula e os alunos copiam em seus cadernos suas impressões, suas interpretações iniciais do que visualizam no quadro.

Destaco também o meu nível de envolvimento com os alunos sendo um tanto discreto, percebia que em alguns momentos é como se eles esquecessem que existia alguém estranho, talvez pelo meu posicionamento em sala, por estar sempre próxima deles, ao lado, registrando, observando, porém tentando deixá-los à vontade para "pescar" as sutilezas, os indícios e os traços de cultura que afloram mesmo que involuntariamente.

No prosseguimento da aula, posições relativas entre duas retas no espaço. É o momento do curso em que os desenhos aparecem com status de destaque, como um elemento que se confunde com o ente algébrico matemático, chegando ao nível em que as retas representadas no quadro passam a ser retas efetivamente, isto é ratificado quando o professor particulariza estes elementos com frase como: "Essa reta aqui", desenhando simultaneamente e atribuindo suas características, ou quando a explicação é sempre direcionada ao desenho, os elementos são todos mostrados, apresentados a partir da sua representação gráfica. Assim, inferimos que nesta sala de aula e neste momento do curso, os gráficos, as figuras e os desenhos são o centro das explicações do professor e ele os indica e estabelece relações diretas com os conceitos, definições e demonstrações algébricas e nunca o contrário, o esquema seguido é primeiro o desenho, que é composto por todos os elementos característicos de uma reta ou de um plano, como vetores diretores, vetores normais, pontos, dentre outros e depois, a parte algébrica como equações das retas ou planos. Sendo que todo tipo de informação é retirada do desenho.

Especulativamente considero que, a partir de trechos da filmagem, o desenho é um elemento que se materializa, dá forma ao algébrico que é dito, desenhado e escrito no quadro. Observo que, em nenhum momento o professor fala da representação da reta ou do plano, mas sim, expressões como: *"aqui eu tenho uma reta"* ou "*como a reta é paralela ao plano*", desenhando, simultaneamente, cada situação.

Num ato contraditório, o professor deixa transparecer sua preferência pela álgebra linear em detrimento da geometria analítica. Observe o seguinte trecho: *"Vocês estão conseguindo livros que têm esse assunto de planos? Já pegaram na biblioteca? Tem os livros de Paulo Boulos e Armando Righetto. Tem também os livros de cálculo que trazem esse assunto, não trazem tão recheado como o de geometria analítica."* Retornando ao quadro.

Em instante, vira-se novamente e diz: *"Vocês tem acesso à internet, podem procurar, geometria analítica. Existem sites das universidades que disponibilizam material. A UFMG se eu não me engano."* Tatiana afirma: *"Na internet não acho essas coisa assim não. Acho tudo muito superficial."* Então o professor fala: *"É esse livrinho aqui de Righetto: Vetores e Geometria Analítica. Ele é muito bom. Este livro pra geometria analítica é muito importante."* O professor faz uma propaganda do livro e quando tivemos acesso às suas notas de aula, percebemos que muita coisa, ou quase tudo que foi apresentado tinha como base este livro. O professor finaliza dizendo: *"Eu não tenho muitos livros de geometria analítica."*

Percebo também que ocorreu uma aceleração nas aulas, os alunos copiavam apressadamente diante da meta do professor em cumprir o conteúdo programático. Talvez tentando justificar este fato, o professor faz o seguinte comentário: *"Retas e planos não é o coração do curso. A parte mais importante é álgebra linear. O importante é: reconhecer a equação de um plano, determinar o vetor normal (caracterizar o vetor) (...). Então o que eu faço é pegar o melhor do livro e colocar nas notas de aula."*

Ao considerar a álgebra linear mais importante que a geometria analítica, o professor está valorizando o aspecto algébrico em detrimento do aspecto geométrico, reforçando sua idéia do barco (desenho) e rio (cálculos, algebrismos e demonstrações). Ao declarar o seu reduzido acervo de geometria analítica, demonstra sua pouca afinidade, ou interesse pela geometria, e novamente sendo persuasivo induz os alunos a pensarem que a álgebra linear é mais importante que a geometria.

Neste instante, percebo um certo descaso para com a geometria comparada à álgebra linear. A junção entre álgebra linear e geometria analítica (mudança curricular, mantendo a mesma carga horária de 90h)[23], daí a possibilidade de se enfatizar um dos componentes em detrimento do outro, o que efetivamente ocorreu neste curso, evidenciando as afinidades do professor em relação ao componente curricular.

Após este diálogo entre o professor e os alunos, percebo a distinção que existe entre álgebra linear e geometria analítica sob o ângulo de visão empreendido pelo professor, demonstrando suas afinidades e preferências algébricas em desfavor das geométricas. No entanto, nas aulas, os desenhos são solicitados com freqüência, servindo como um elemento que materializa o abstrato, visto que o que foi desenhado no quadro foram representações de planos, que no contexto da sala de aula e na fala do professor se configura como retas e planos.

Planos

Inicia-se o estudo analítico de planos. O professor, seguindo o seu roteiro, desenha o plano, estabelecendo um comparativo entre reta e plano: *"A reta tem uma dimensão e o plano tem duas dimensões. Num plano podemos andar sobre ele em qualquer direção."* E o desenho materializa o que ele diz.

---

[23] Foi realizada uma reformulação curricular no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Feira de Santana, cuja implementação se iniciou no semestre 2004.1. A mudança mais significativa para a nossa pesquisa foi a extinção das disciplinas Álgebra Linear I-A (60 horas), Álgebra Linear II (60 horas) e Geometria Analítica (90 horas) do currículo 314 (currículo antigo) e, em substituição a elas, foram criadas as disciplinas Geometria Analítica e Álgebra Linear I (90 horas) e Geometria Analítica e Álgebra Linear II (90 horas) no currículo 318 (currículo novo).

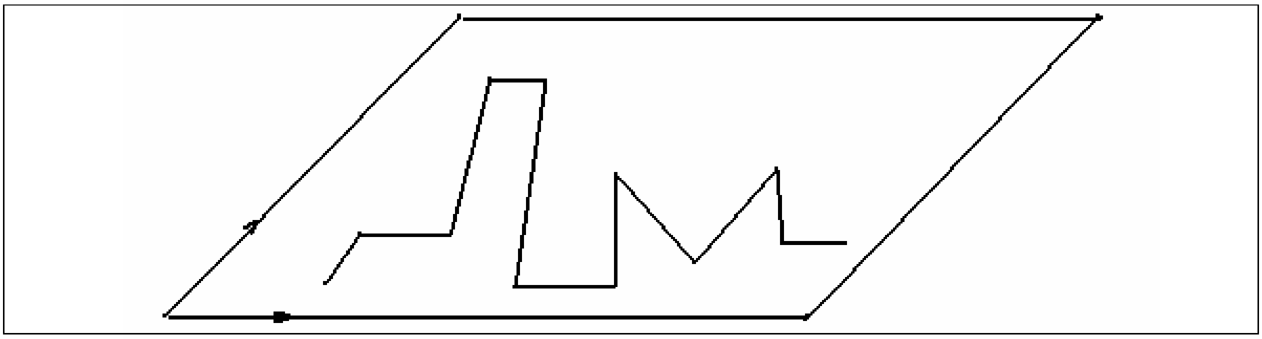


Figura 21: Representação de diversas direções em um plano

A expressão "andar sobre o plano", nos direciona para indícios do real, do material, pois o que ocorre efetivamente é que andamos sobre superfícies planas, pisos planos, terrenos planos, dentre outros, que são aproximações matemáticas da realidade, visto que os entes matemáticos são unidades tidas como perfeitas, em outras palavras, partes de um plano, por exemplo, podem ter comprimento e largura, mas nenhuma espessura, o que nem uma folha de papel teria espessura zero, ou seja, ela não seria um plano e sim uma representação de um plano.

Na continuação da aula, um destaque para o vetor normal, pois o mestre fala: *"O vetor normal é bastante relevante, pois nos acompanha também em cálculo IV, normal a um plano, normal a uma superfície (...). O plano em outro contexto, como por exemplo, o plano que intercepta uma superfície."* Então gestualmente uma folha de papel e a mão do professor tenta exemplificar para os alunos os possíveis contextos em que podem aparecer o plano.

As frases e expressões como: *"Eu tenho esse plano aqui",* desenhando e apontando para o desenho do plano. *"Eu conheço a equação de* π *e tenho um ponto em* π_2 *e desejo encontrar a equação de* π_2*".* Todas estas informações circulando em torno dos desenhos.

Em outro episódio, na explicação de interseção entre três planos, o diário de classe é um elemento que também serve de apoio exemplificativo, onde as folhas do diário são comparadas a planos e a interseção entre todas as folhas determinaria uma reta, numa tentativa de complementar o que foi desenhado no quadro. Enquanto os alunos copiam, o professor faz a chamada. Sentindo falta de Tatiana, pergunta: *"Por que Tatiana não veio hoje, vocês que conhecem."* Então um colega responde: "*Prova de Cálculo amanhã, ela começa a estudar hoje*."

Confirmando a nossa suposição inicial, as representações gráficas foram bastante solicitadas, conforme podemos observar num recorte sobre posições relativas entre duas retas, assim como planos paralelos aos eixos e aos planos coordenados, onde os aspecto gráfico torna-se preponderante frente as demonstrações e definições, sendo expostas no quadro as seguintes representações:

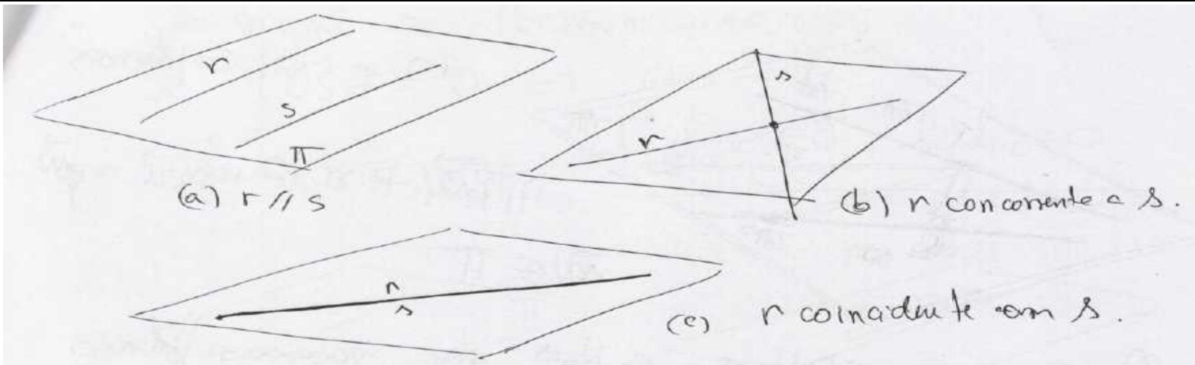


Figura 22: Nota de aula do professor: Posição relativa de retas coplanares.

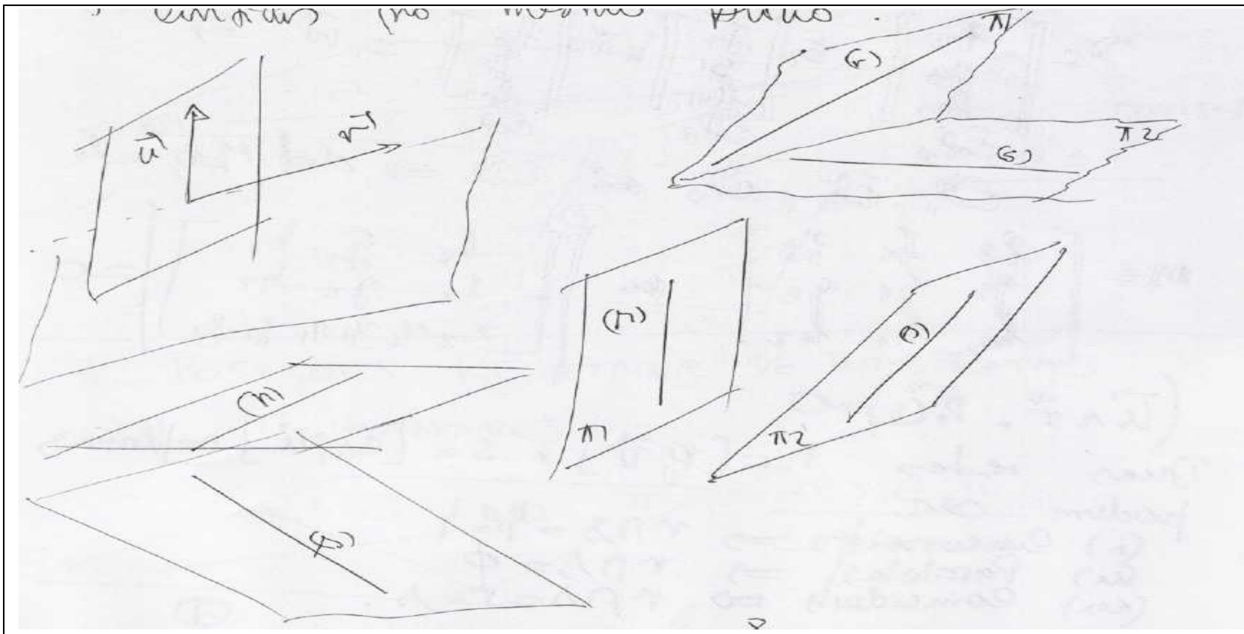


Figura 23: Nota de aula do professor: Posição relativa de retas no espaço.

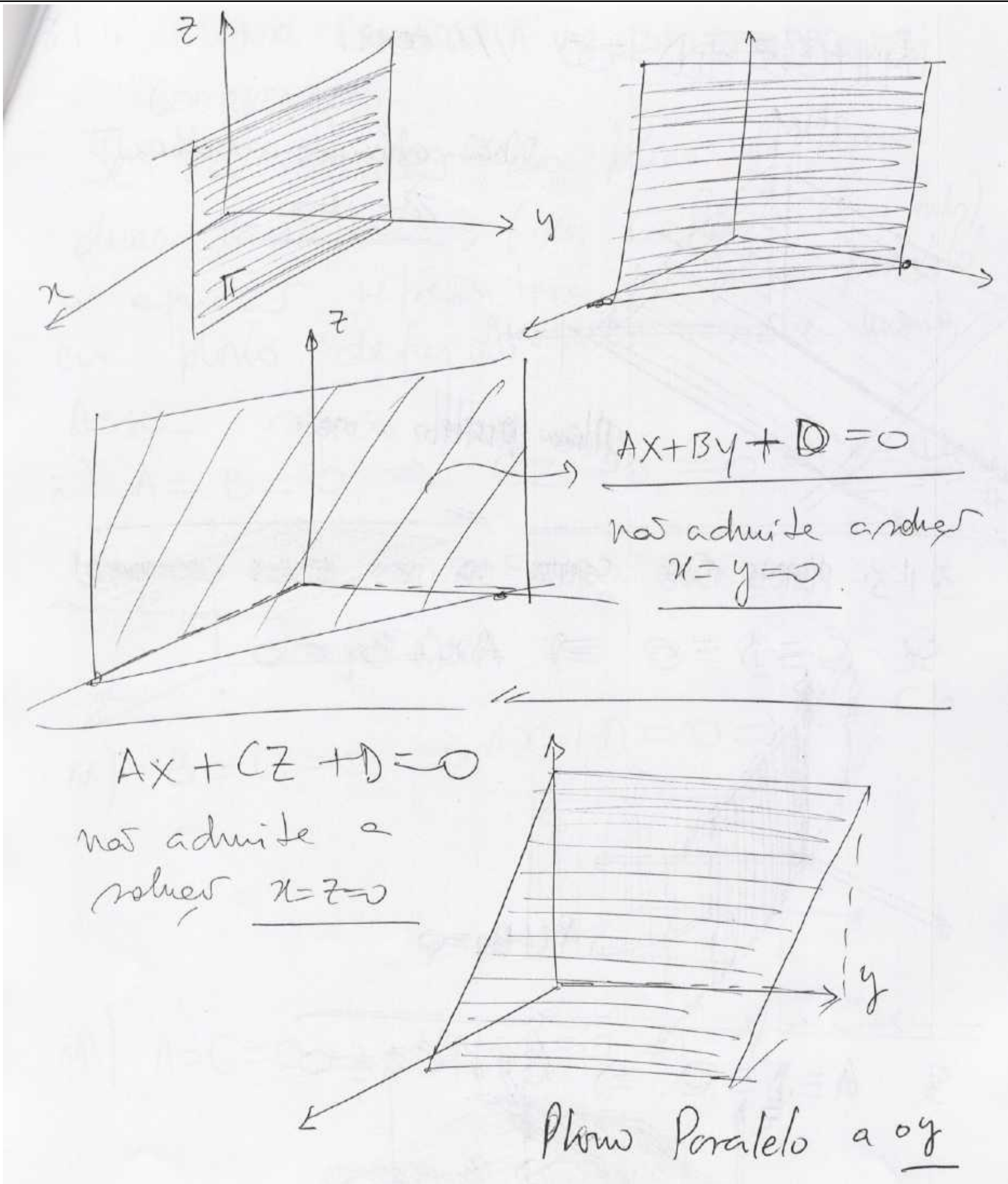


Figura 24: Nota de aula do professor: Planos paralelos aos eixos e planos coordenados

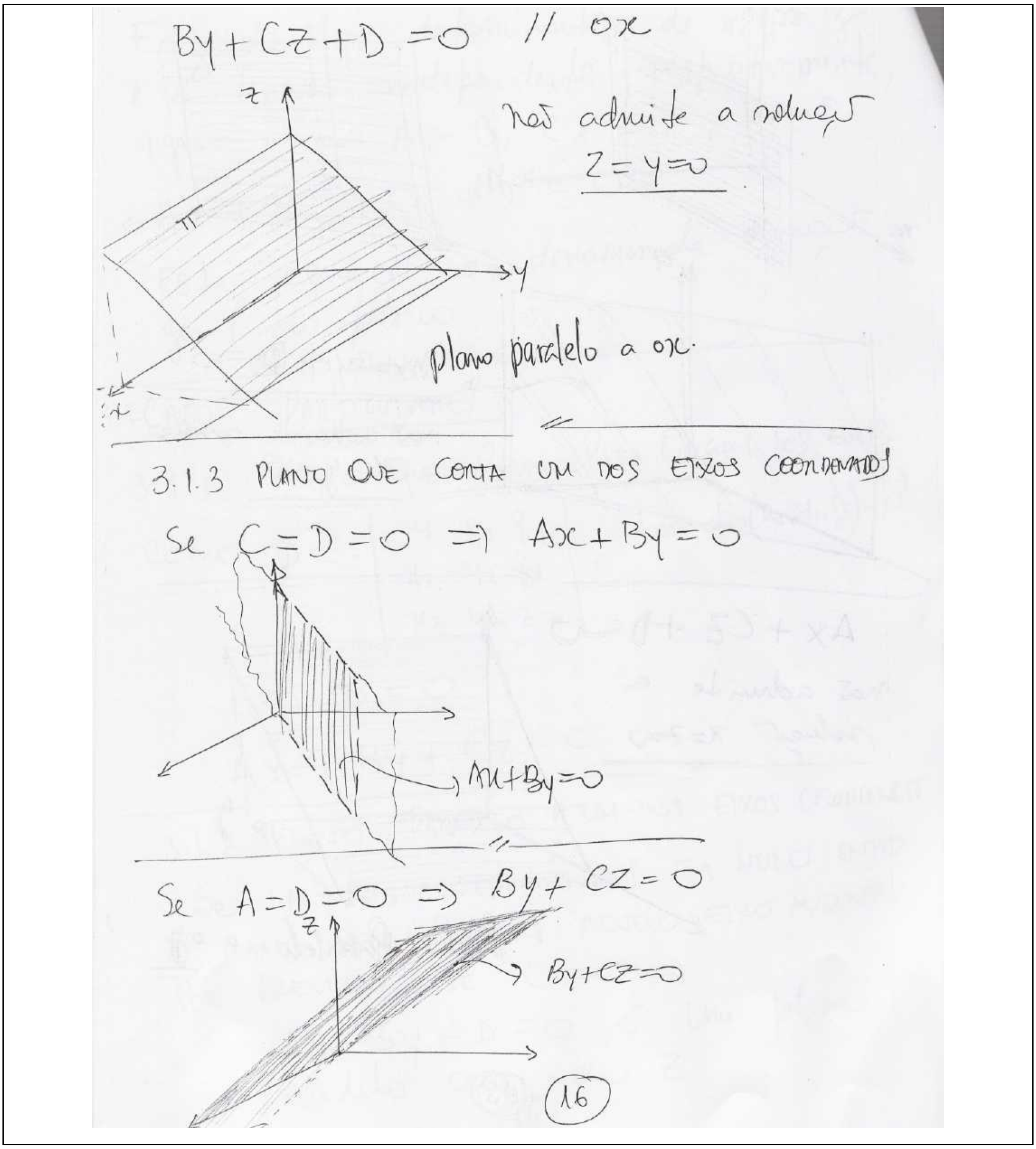


Figura 25: Nota de aula do professor: Planos paralelos aos eixos e planos coordenados.

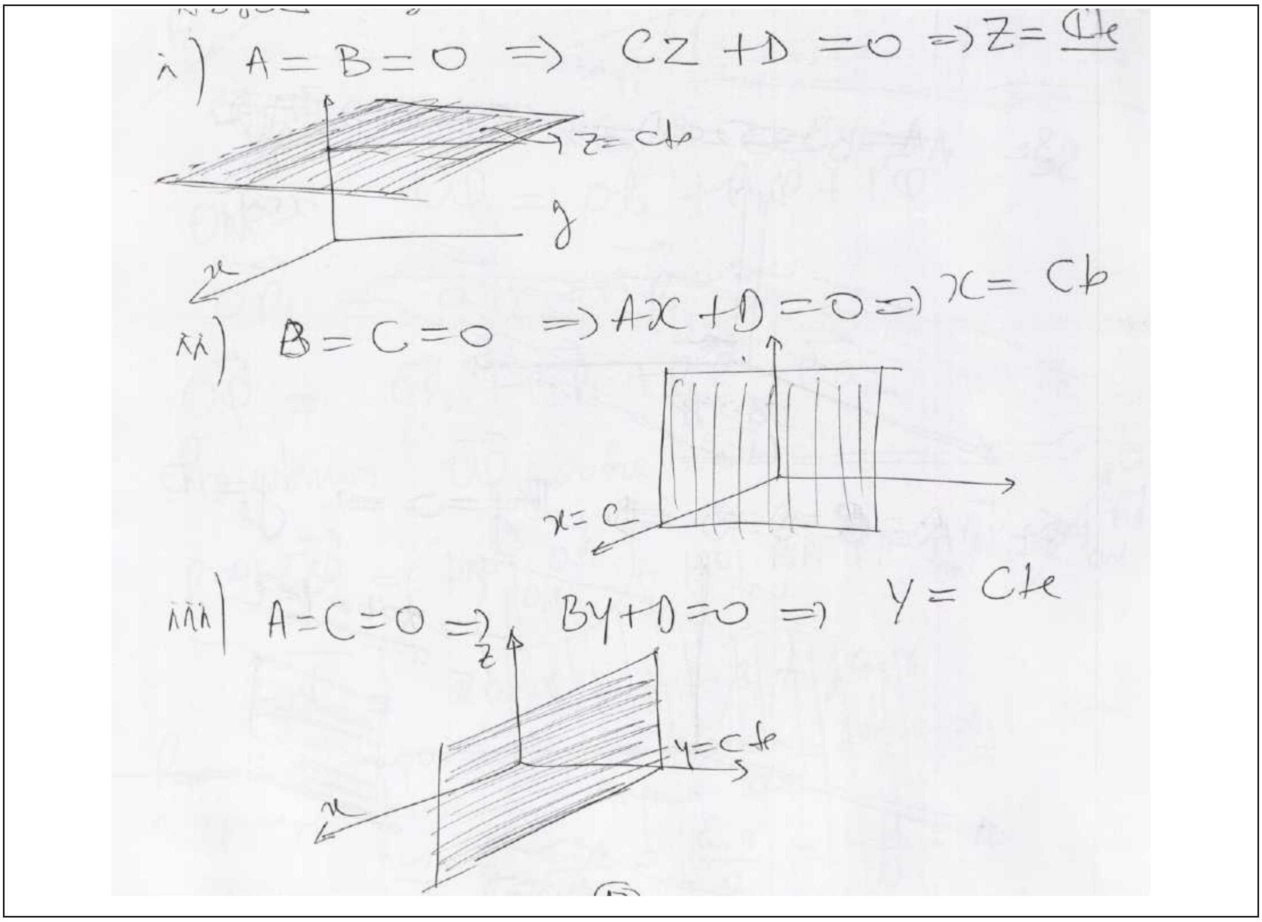


Figura 26: Nota de aula do professor: Planos paralelos aos eixos e planos coordenados.

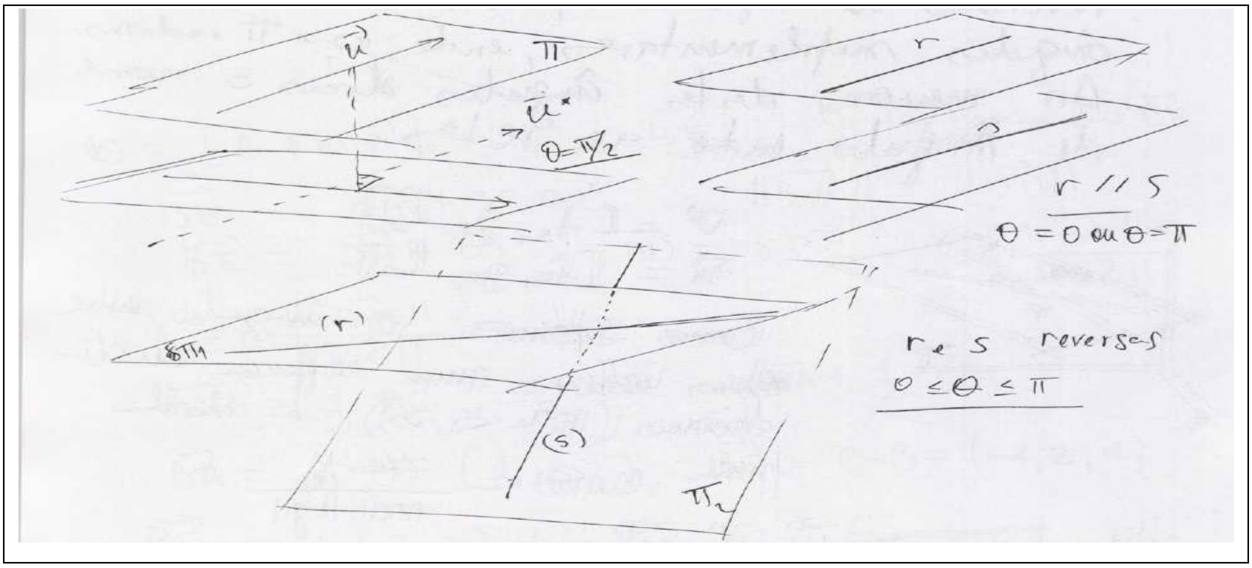


Figura 27: Nota de aula do professor: Retas reversas no espaço.

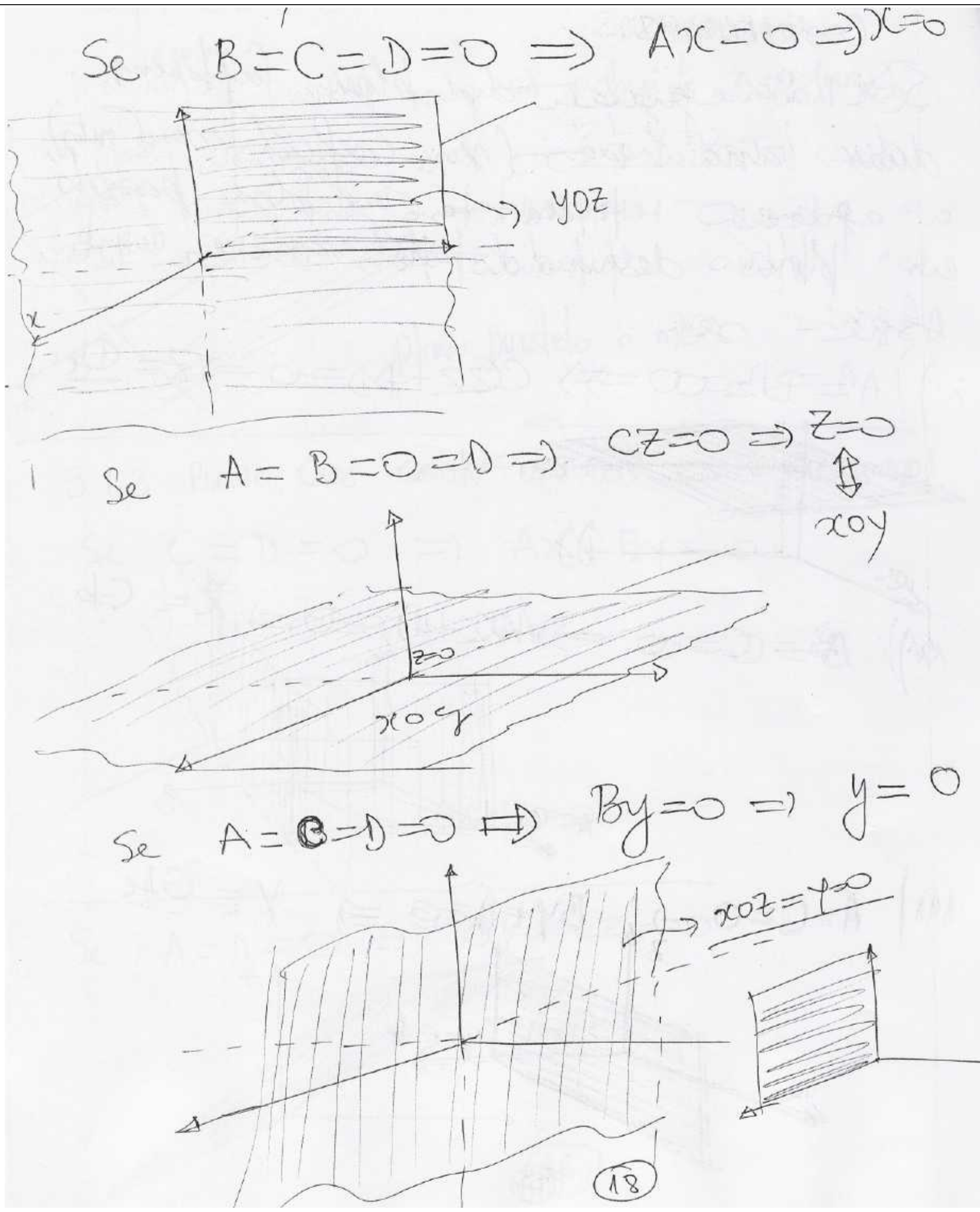


Figura 28: Nota de aula do professor: Planos coordenados

4.2 Comparativo entre questionário, ficha investigativa e uma avaliação da disciplina.

O nosso diálogo comparativo nos coloca diante de um fato contraditório, percebido a partir da análise dos questionários aplicados e de uma avaliação em grupo. Uma das questões versava sobre o nível de relevância de uma representação gráfica, sendo classificada como um elemento facilitador por 93% dos alunos e 7% qualificavam como um elemento que amplia o entendimento, isto contrasta com o seguinte questionamento: Como foram trabalhados os conceitos geométricos durante os ensinos fundamental e médio? Em que momento você teve maior contato com a geometria? Você tem afinidade com o desenho ou representação gráfica? Como você classificaria ou qualificaria o aspecto gráfico em matemática? Respostas como: Não foram trabalhados nos ensinos fundamental e médio, ou de modo superficial, apenas na 3ª série, assim como: Só tive contato no cursinho e na universidade, exprimem a pouca intimidade com o aspecto geométrico e conseqüentemente afeta direta ou indiretamente no pouco vínculo ou afinidade com o desenho ou a representação gráfica, registrada nos questionários.

A primeira impressão é que perguntas / respostas nesta linha possam pouco contribuir com o real objetivo desta pesquisa, principalmente por ser um procedimento metodológico que pode apresentar respostas promovidas numa situação "artificial" o que pode refletir numa reflexão "forçada" efetuada pelo aluno. No entanto acredito que sempre existe um fio de verdade em tudo que declaramos, ou seja, sempre afloram resquícios das nossas reais impressões e concepções, mesmo que na prática, "na hora H" isto não seja efetivamente concretizado. E é ai que está o verdadeiro entrave do nosso estudo. Por que os alunos declaram que o aspecto gráfico em matemática, especificamente em geometria analítica é importante; e não se apropriam disto ao resolver questões de uma avaliação?

Transcrevo abaixo algumas respostas dos questionários:

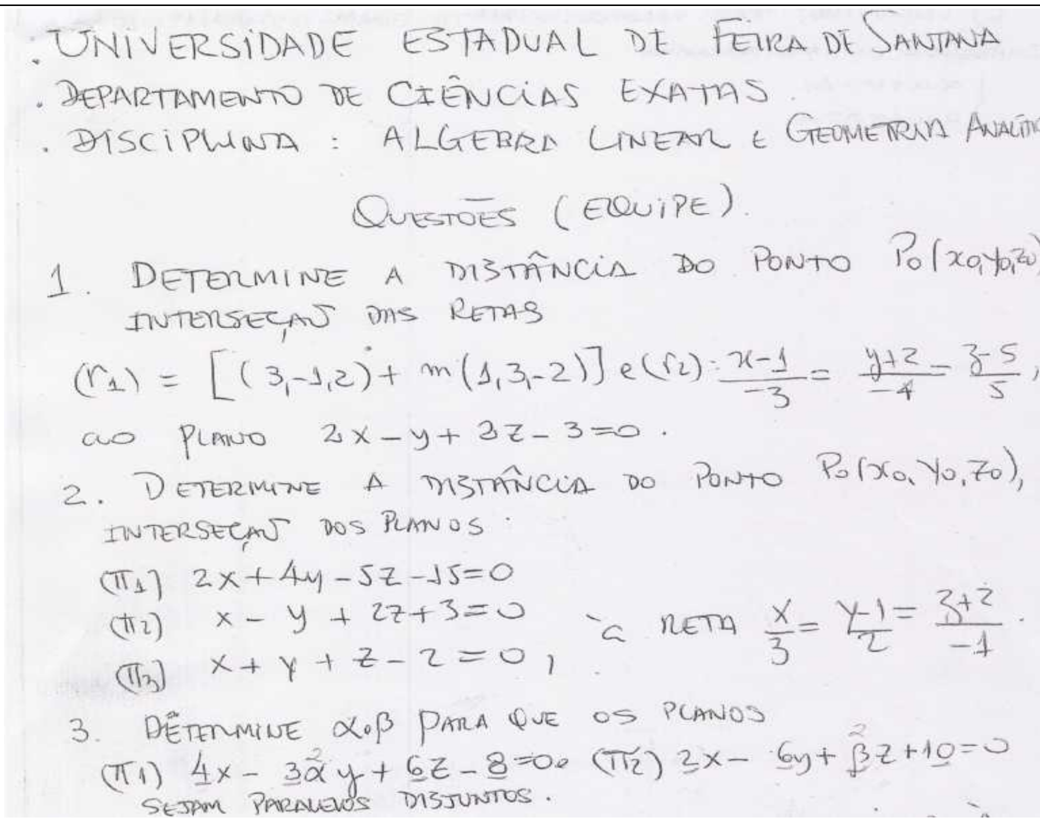
Aluno 1: "Superficialmente, sempre ao final do ano letivo. Meu maior contato foi no ensino fundamental". Afinidade: "razoavelmente".

Aluno 2: “No ensino fundamental e médio só aprendi os nomes das figuras geométricas. Maior contato na universidade. Afinidade com o desenho.”

Aluno 3: “Não com muita precisão, apenas alguns exercícios (os que tinham no livro). Maior contato no 3º ano, onde vi a geometria plana, espacial e analítica (só o início)” .Afinidade: “não muito.”

Aluno 4: “Não foram trabalhados no ensino fundamental e médio. No cursinho. Afinidade com desenho, com gráficos não muito.”.

Passemos à avaliação em grupo. As questões que merecem destaque e reflexões versam sobre distância entre ponto, reta e plano. Tratam-se das três primeiras questões da primeira avaliação da disciplina, expostas a seguir:



. UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
. DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
. DISCIPLINA: ALGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTI

QUESTÕES (EQUIPE).

1. DETERMINE A DISTÂNCIA DO PONTO $P_0(x_0, y_0, z_0)$ INTERSEÇÃO DAS RETAS
$(r_1) = [(3,-1,2) + m(1,3,-2)]$ e (r_2): $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-5}{5}$, AO PLANO $2x - y + 3z - 3 = 0$.

2. DETERMINE A DISTÂNCIA DO PONTO $P_0(x_0, y_0, z_0)$, INTERSEÇÃO DOS PLANOS:
(π_1) $2x + 4y - 5z - 15 = 0$
(π_2) $x - y + 2z + 3 = 0$
(π_3) $x + y + z - 2 = 0$, A RETA $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-1}$.

3. DETERMINE α e β PARA QUE OS PLANOS
(π_1) $4x - 3\alpha^2 y + 6z - 8 = 0$ e (π_2) $2x - 6y + \beta^2 z + 10 = 0$
SEJAM PARALELOS DISJUNTOS.

Figura 29: As três questões que envolvem os conteúdos retas e planos da avaliação.

Nenhum dos grupos recorreu à representação gráfica ou a qualquer tipo de esboço, que descrevesse a situação enunciada nas questões, conforme podemos evidenciar nas resoluções de três das cinco equipes que se formaram.

1) $(x,y,z) = [(3,-1,2) + m(1,3,-2)]$ $(r_2) = \frac{x-1}{-3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-5}{5}$

$x = 3+m$ $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-2}$

$y = -1+3m$

$z = 2-2m$

$x-1 = -3a \Rightarrow x = 1-3a$

$y+2 = -4a \Rightarrow y = -2-4a$

$z-5 = 5a \Rightarrow z = 5a+5$

$$\begin{cases} 3+m = 1-3a \\ -1+3m = -2-4a \\ 2-2m = 5a+5 \end{cases}$$

$m = 1-3a-3$
$= -2-3a$
$= -2+3 = 1$
$m = 1$

$x = 4$

$y = 2$

$z = 0$

$-1-6-9a = -2-4a$

$-7-9a = -2-4a$

$-9a+4a = -2+7$

$-5a = 5$

$\boxed{a = -1}$

O ponto de intersecção das retas $(4,2,0)$

$$d(P_0,\pi) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|2\cdot4+(-1)\cdot2+2\cdot0-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{|8-2-3|}{\sqrt{9}} = \frac{|3|}{3} = 1$$

Distancia = 1

2) $P_0(x_0, y_0, z_0)$

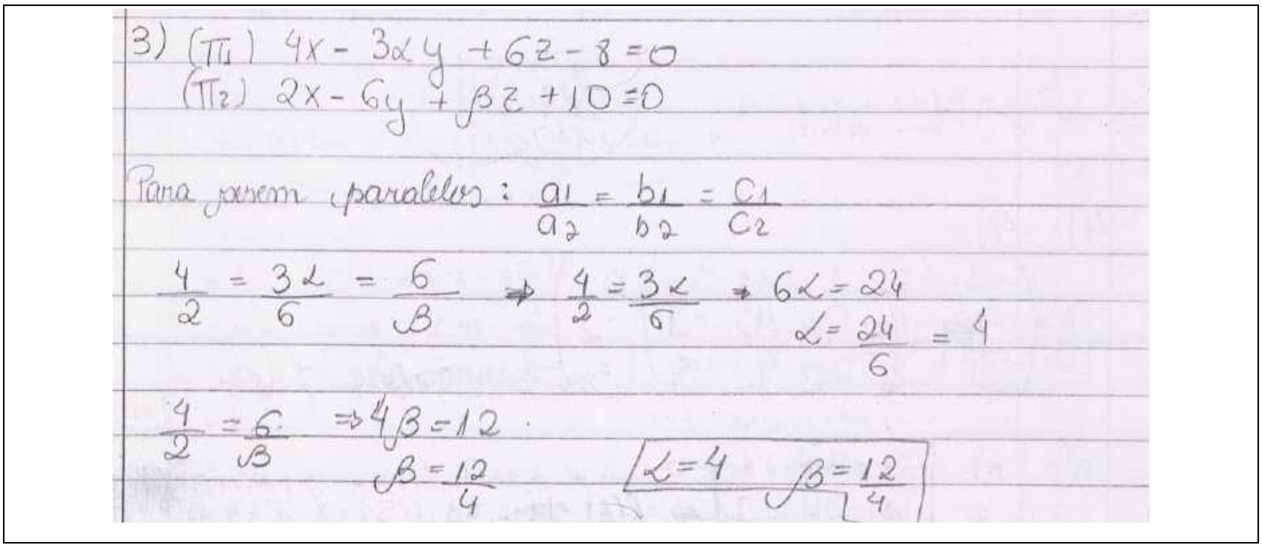
$(\pi_1): 2x+4y-5z-15=0$

$(\pi_2): x-y+2z+3=0$

$(\pi_3): x+y+z-2=0$ à reta $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-1}$

$$\begin{cases} 2x+4y-5z=15 \\ x-y+2z=-3 \\ x+y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=1} \boxed{y=2} \boxed{z=-1}$$

$P_0 = (1, 2, -1)$



3) (π_1) $4x - 3\alpha y + 6z - 8 = 0$
(π_2) $2x - 6y + \beta z + 10 = 0$

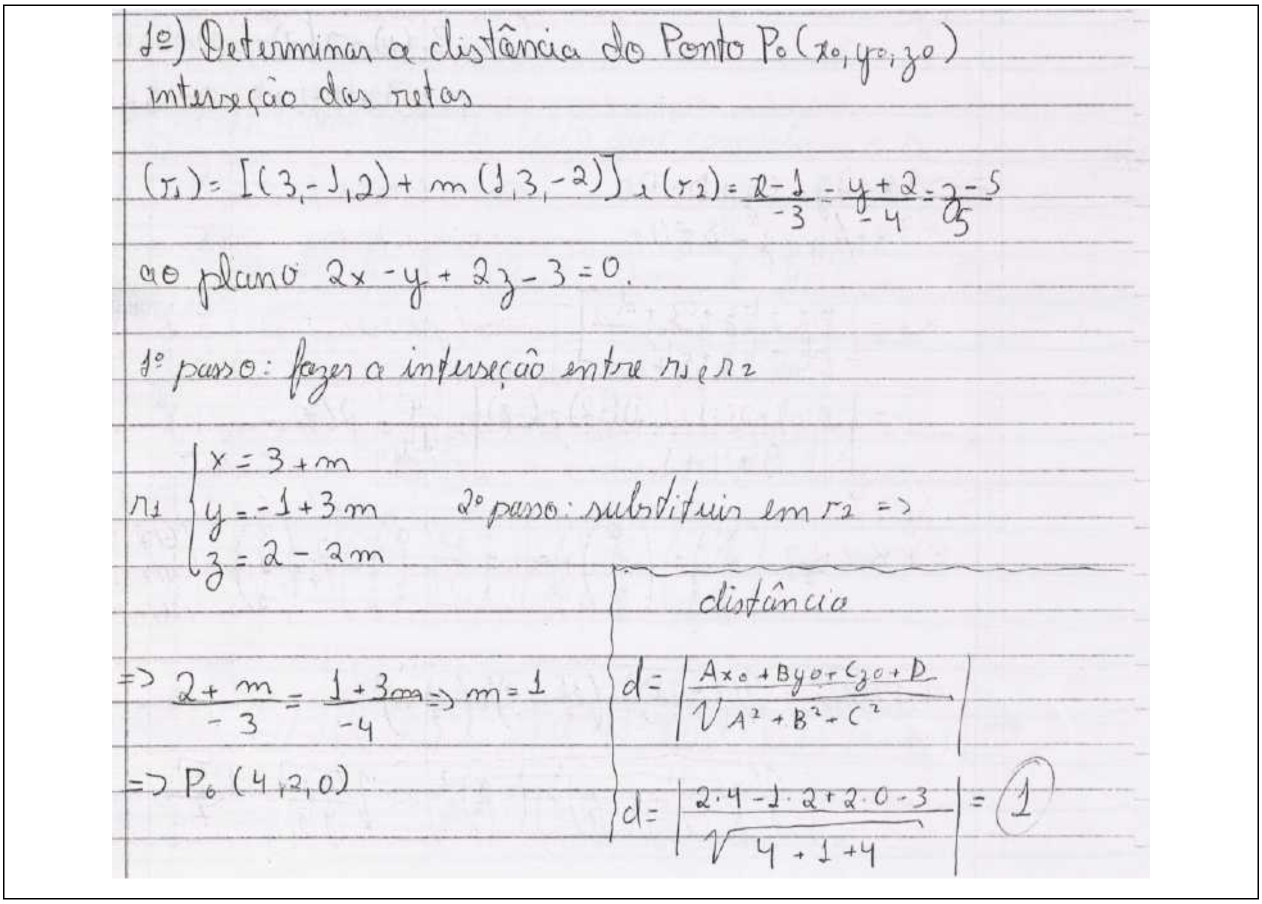
Para serem paralelos: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

$\frac{4}{2} = \frac{3\alpha}{6} = \frac{6}{\beta} \Rightarrow \frac{4}{2} = \frac{3\alpha}{6} \Rightarrow 6\alpha = 24$
$\alpha = \frac{24}{6} = 4$

$\frac{4}{2} = \frac{6}{\beta} \Rightarrow 4\beta = 12$
$\beta = \frac{12}{4}$

$\boxed{\alpha = 4 \quad \beta = \frac{12}{4}}$

Figura 30: Resolução apresentada pela equipe 1.



1º) Determinar a distância do Ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ interseção das retas

$(r_1) = [(3,-1,2) + m(1,3,-2)]$ e $(r_2) = \frac{x-1}{-3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-5}{5}$

ao plano $2x - y + 2z - 3 = 0$.

1º passo: fazer a interseção entre r_1 e r_2

$r_1 \begin{cases} x = 3 + m \\ y = -1 + 3m \\ z = 2 - 2m \end{cases}$ 2º passo: substituir em r_2 =>

$\Rightarrow \frac{2+m}{-3} = \frac{1+3m}{-4} \Rightarrow m = 1$

$\Rightarrow P_0(4,2,0)$

distância

$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$

$d = \left| \frac{2 \cdot 4 - 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 3}{\sqrt{4 + 1 + 4}} \right| = 1$

2º Determine a distância do ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ interseção dos planos:

$(\pi_1)\ 2x + 4y - 5z - 15 = 0$

$(\pi_2)\ x - y + 2z + 3 = 0$ à reta $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-1}$

$(\pi_3)\ x + y + z - 2 = 0$

↳ solucionando o sistema temos: $P_0(1, 2, -1)$

$P_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi_1, \pi_2, \pi_3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$Ax + By + Cz + D = 0$

$3x + 2y - z + D = 0$

subst. x, y, z por P_0

$3(1) + 2(2) - (-1) + D = 0$

$3 + 4 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -8$

$\Rightarrow Ax + By + Cz + D = 0$

$3x + 2y - z - 8 = 0$

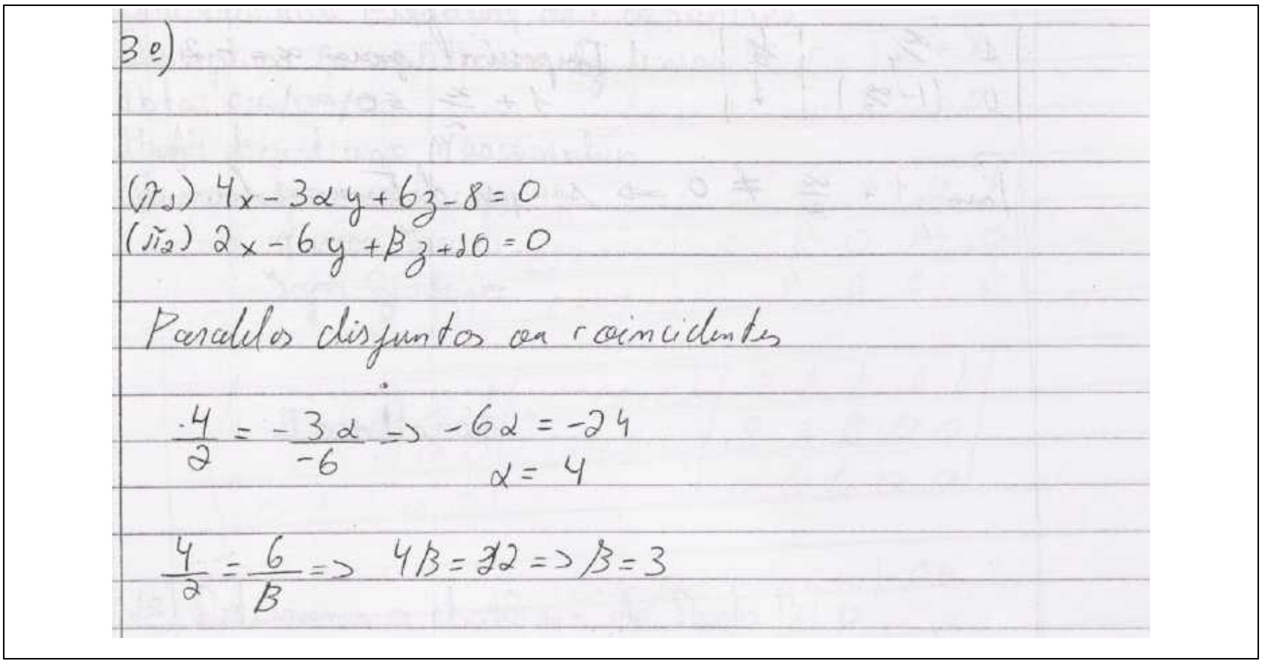
$$\alpha = -\left[\frac{ax + by + cz + d}{af + bg + ch}\right]$$

$$= -\left[\frac{3(0) + 2(1) + (-1)(-2) + (-8)}{9 + 4 + 1}\right] = \frac{4}{14} = 2/7$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2}{7} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{2}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/7 \\ 11/7 \\ -16/7 \end{pmatrix}$$

$$d(\overrightarrow{P_1 P_0}) = \sqrt{\left(\frac{6}{7} - 1\right)^2 + \left(\frac{11}{7} - 2\right)^2 + \left(-\frac{16}{7} + 1\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{1}{7}\right)^2 + \left(-\frac{3}{7}\right)^2 + \left(-\frac{9}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{91}{49}} = \frac{\sqrt{91}}{7}$$


3e)

$(\pi_1)\ 4x - 3\alpha y + 6z - 8 = 0$

$(\pi_2)\ 2x - 6y + \beta z + 10 = 0$

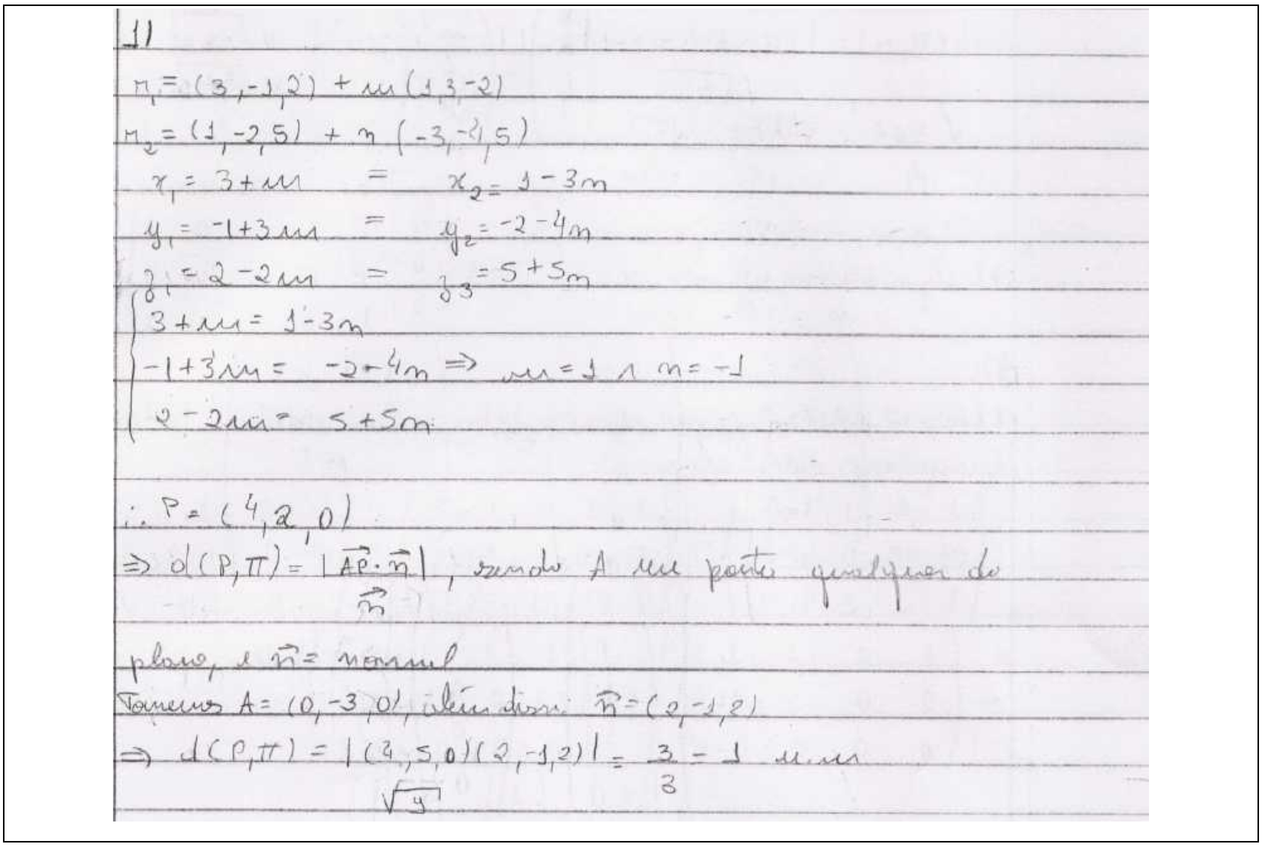
Paralelos disjuntos ou coincidentes

$\frac{4}{2} = \frac{-3\alpha}{-6} \Rightarrow -6\alpha = -24$

$\alpha = 4$

$\frac{4}{2} = \frac{6}{\beta} \Rightarrow 4\beta = 12 \Rightarrow \beta = 3$

Figura 31: Resolução apresentada pela equipe 2.


1)

$r_1 = (3,-1,2) + m(1,3,-2)$

$r_2 = (1,-2,5) + n(-3,-4,5)$

$x_1 = 3+m \quad = \quad x_2 = 1-3n$

$y_1 = -1+3m \quad = \quad y_2 = -2-4n$

$z_1 = 2-2m \quad = \quad z_3 = 5+5n$

$\begin{cases} 3+m = 1-3n \\ -1+3m = -2-4n \Rightarrow m = 1 \wedge n = -1 \\ 2-2m = 5+5n \end{cases}$

$\therefore P = (4,2,0)$

$\Rightarrow d(P,\pi) = \frac{|\vec{AP}\cdot\vec{n}|}{\vec{n}}$, sendo A um ponto qualquer do plano, e $\vec{n}$ = normal

Tomemos $A = (0,-3,0)$, além disso $\vec{n} = (2,-1,2)$

$\Rightarrow d(P,\pi) = \frac{|(4,5,0)(2,-1,2)|}{\sqrt{9}} = \frac{3}{3} = 1$ u.m

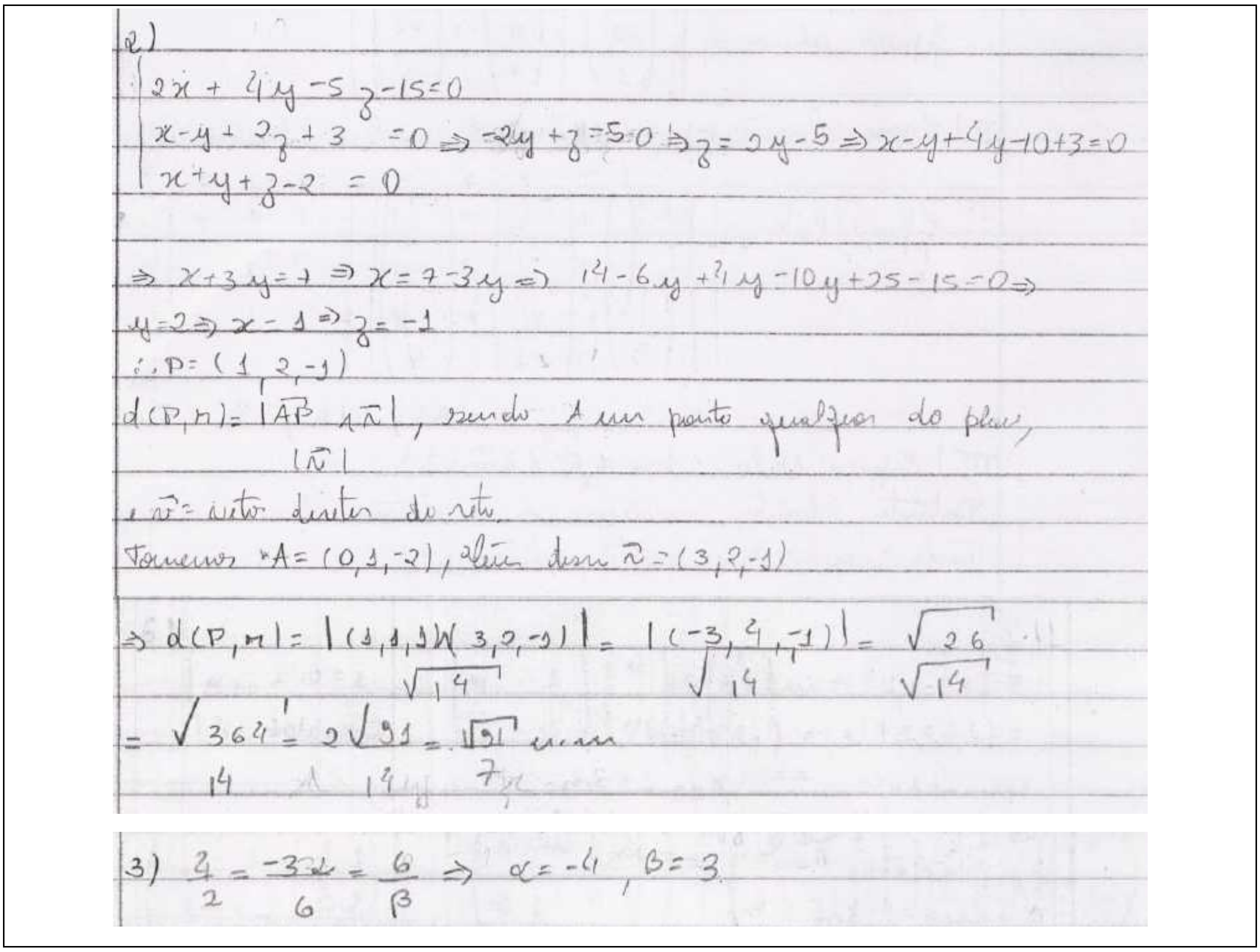


Figura 32: Resolução apresentada pela equipe 3.

Especulamos que talvez algum tipo de esboço representativo tenha sido rabiscado num caderno ou carteira, mas não teve a relevância suficiente para ser registrado nas avaliações. Tal constatação nos permite supor que se desenvolve uma espécie de herança, transmitida entre os professores de matemática que repassam para seus alunos, os quais transmitirão para seus futuros alunos e assim sucessivamente. Inferimos também que tal aspecto tem como uma das suas origens o pouco contato com a geometria, a qual geralmente é relegada a um segundo plano nos livros de matemática, aparecendo sempre no final dos livros No entanto, isto não constitui, nesta investigação a nossa preocupação central.

Em um outro questionário, denominado por nós ficha investigativa (anexo II), constatamos um alto índice de alunos que declaram que a representação gráfica facilita e amplia o entendimento, é essencial na aprendizagem, excelente ajuda na resolução de problemas, o aspecto gráfico dá sentido aos diversos teoremas matemáticos, ferramenta que nos ajuda a compreender a expressão algébrica ou visualização real de determinado conteúdo em contraste com a inexistência deste elemento na resolução de questões que caberiam ao menos uma representação geométrica. Na tentativa de esclarecer as questões que circundam este estudo. Pergunto então: No contexto da sala de aula, qual o significado que você atribui aos termos: gráficos, desenhos e figuras. Destaco algumas respostas:

Aluno 1: "Formas mais simples de linguagem, outras maneiras de mostrar uma informação, um dado."

Aluno 2: "São representações que traduzem ou facilitam a compreensão de determinadas informações."

Aluno 3: "São representações que facilitam o entendimento dos conceitos."

Aluno 4: "São recursos lúdicos que contribuem para uma maior compreensão dos conteúdos da disciplina."

Aluno 5: "Gráfico: "representação de dimensão; outro modo de visualizar funções ou figuras geométricas."

Desenhos: "é passar para o papel algo que pode representar uma emoção ou expressão; algo que expresse sentimento."

Figuras: "representação de algo que não tem sentimento."

Aluno 6: "Símbolos matemáticos que facilitam e as vezes até fazem parte do assunto para um bom entendimento do aluno."

Aluno 7: "Gráficos: representação geométrica de situações (em geral funções)."
"Desenhos e figuras: recurso visual no estudo, compreensão e análise de situações."

No contexto de uma sala de aula o aspecto gráfico tem os desdobramentos e relevância na declaração de alguns alunos: *"outra forma de linguagem", "elementos que facilitam e traduzem contribuindo para um melhor entendimento de questões e conteúdos"*. Todas as respostas evidenciam um caráter positivo da representação gráfica neste âmbito.

No entanto, observo que existe um contraste entre os registros (questionários, ficha investigativa, avaliações, notas de aulas do professor,declarações feitas em sala de aula), parece existir uma tentativa em reduzir a importância das representações e não se consegue efetivamente. É como se quanto mais se tentasse enfraquecer mais se fortalecesse (atitude do professor). Então nos indagamos quanto à relevância ou não relevância destes elementos imagéticos, se realmente são facilitadores? O porquê dos alunos não os utilizarem para facilitar o entendimento, compreender e analisar situações ou traduzir determinadas situações? Já afirmamos anteriormente que o silêncio também significa. O que significa esse silêncio? Essa ausência?.

Numa análise sobre as estruturas que dão significados a esse silêncio percebo vínculos com três fatores: O primeiro fator refere-se à declaração do professor valorizando sempre os aspectos algébricos, desprezando os geométricos, mesmo que involuntariamente, nas aulas ocorra o inverso. No entanto a declaração verbal é "a álgebra linear é mais importante que a geometria analítica". O segundo fator é a pouca intimidade declarada pela maioria dos alunos com a geometria deixada sempre para um segundo momento, nos ensinos fundamental e médio. Este fator soma-se ao primeiro. E o terceiro como trata-se de uma avaliação os alunos criam uma cultura cujo o objetivo principal é convencer o professor, então fazem uma espécie de análise das preferências do professor, mesmo que de forma inconsciente, e neste caso o algebrismo e não a geometria. Assim, tenta-se aproximar as resoluções das questões seguindo o estilo do professor com a meta de obter uma boa nota.

No entanto, este aparente enfraquecimento, este obscurecimento, esse silêncio dos aspectos geométricos e gráficos é ao mesmo tempo contraditório e instigante, pois nem mesmo o professor tem certeza do que ele declara. Ao olhar para os desenhos como genuínos entes matemáticos, ou seja, os desenhos materializam estes elementos, os desenhos são mediadores, elo de ligação, entre o abstrato e o real, desta forma tenta-se desprezá-los, ignorá-los e não se consegue. O máximo que se consegue é o silêncio, mas essa ausência de som, não significa ausência de significados, muito pelo contrário, permite-nos inferir sobre variados ângulos. Pois metaforicamente, quando estou em silencio, me dou ao direito de não-verbalizar meus sentimentos, isto não significa que eles deixaram de existir, mas que naquele momento estão ocultos, não declarados através da fala, porém declarado através da abstenção desta. Podendo ter interpretações diferentes dependendo do contexto, propiciando oportunidade a outros códigos de se evidenciarem mais fortemente neste processo comunicativo de uma sala de aula.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante da nossa caminhada investigativa, após apresentarmos variadas concepções, pontos de vistas, enfoques e abordagens, onde os aspectos comunicacionais, imagéticos, culturais, matemáticos e representativos geométricos constituíram e compuseram fontes das nossas averiguações, sendo parte constituinte de um contexto em que a produção de significados pelos participantes de um curso de geometria analítica, especificando os assuntos retas e planos foi o centro das nossas atenções, não significando, contudo, dizer que nos limitamos a "olhar" fixamente para um único ponto, visto que ao mergulharmos nesta temática, com ênfase na produção de significados no contexto de uma sala de aula de geometria analítica, afloraram componentes circundantes os quais não poderíamos ignorar.

Tal caminho foi permeado por anotações, observações do perfil desta sala de aula, objetivando a obtenção de respostas ao nosso questionamento central: Como professor e alunos atribuem significados aos desenhos e gráficos nas aulas de geometria analítica? Apresentaremos de forma sumária, nessas considerações finais, as respostas parciais que obtivemos ao final do nosso trabalho de pesquisa.

A composição deste ambiente constituído pelos atores (professor e alunos) incorporando, representando seus personagens, cada um com suas características, seus perfis e comportamentos imersos neste cenário (sala de aula), ou seja, a estrutura que se desenhou diante de nós foi constituída por diversas ramificações do nosso foco de pesquisa. Isto nos colocou diante de um complexo campo investigativo, nos permitindo constatar que a produção de significados não ocorre em situações isoladas, mas sim através de um processo dinâmico, interligando diferentes dimensões - psicológicas, sociológicas, culturais, comunicacionais, matemáticas, semióticas, dentre outras – numa seqüência de situações variadas. O que parafraseando Geertz (1989), seria denominado como uma multiplicidade de estruturas sobrepostas.

Desta forma entendemos a sala de aula como palco, onde os atores interagem entre si, tendo como conseqüência a negociação de significados, constituindo um sistema comunicacional formado por uma rede de emissores, receptores e canais onde fluem uma diversidade de informações.

Nesta perspectiva, um gráfico, uma figura ou um desenho podem apresentar diferentes significados, dependendo do código e do contexto estabelecido. Como por exemplo, na situação em que o professor parece ver um A (representação da reta ou do plano) com um B (reta, plano, entes matemáticos). Neste enfoque, a representação gráfica intervém de modo a assumir o lugar do próprio elemento representado; um substituto com sua aparência concreta e funcional; permitindo explorar, antecipar, constituindo um suporte intuitivo nas operações geométricas, assumindo um aspecto mediador e desencadeando uma movimentação, um processo de interpretação circunstanciado, aberto, dinâmico e ilimitado, denominado por Charles S. Peirce como semiose ilimitada.

O processo interpretativo foi concebido por nós como algo dinâmico, multidirecional, visto que quando empreendemos uma interpretação, ou tentamos transmitir ou explicar alguma coisa, recorremos mentalmente a analogias ou comparações, extrapolando, expandindo do particular para o geral, ou no processo inverso, do geral para o particular(contraindo).

Duval (1996) esclarece tal afirmação dando outra denominação para o que chamamos de expansões ou contrações, o que segundo ele é um dos fatores que permitem uma apreensão global e qualitativa:

> (...) é essa apreensão global e qualitativa que é necessária para extrapolar, interpolar, ou para utilizar os gráficos para fins de controle, ou de exploração, relacionados aos tratamentos algébricos. (DUVAL, 1996, *apud.* DUVAL, 2003,p.17).

Sejam como sintetizadores, auxiliares ou complementares, os gráficos têm seu espaço, sua importância e mesmo quando colocados num segundo plano, afloram como introdutores da abordagem.

Seguindo esta perspectiva, em matemática, quando se deseja transmitir, explicar ou esclarecer algo que na sua essência aparece obscurecido para atores menos experientes como geralmente são alguns alunos, o professor numa tentativa de aproximação entre real e abstrato, procura estabelecer correlações entre termos, expressões ou exemplos que não necessariamente são matemáticos, mas elementos reais, cotidianos, próximos dos alunos, o que reforça a idéia do movimento expansivo ou contraído. Michel Otte (2001), evidencia este processo considerando a noção de significado atrelada à idéia de possibilidade, o que segundo ele seria: “(...) um relacionamento entre o geral e o particular, entre lei e aplicação ou hábito e regra, ou entre limitantes e limitados.” (OTTE, *op.cit.*, p.21). Isto é evidenciado na cena: O professor tenta fazer com que os alunos entendam o desenho exposto no quadro. Trata-se da representação de vários planos, tendo como interseção uma única reta. Assim, a analogia feita é: O professor pega o diário de classe e empreendendo o seguinte comparativo entre as folhas do diário e os planos e a interseção destas folhas como se formasse uma reta. Um exercício que apesar de exigir abstração, torna o conteúdo geométrico mais próximo da cultua material dos alunos.

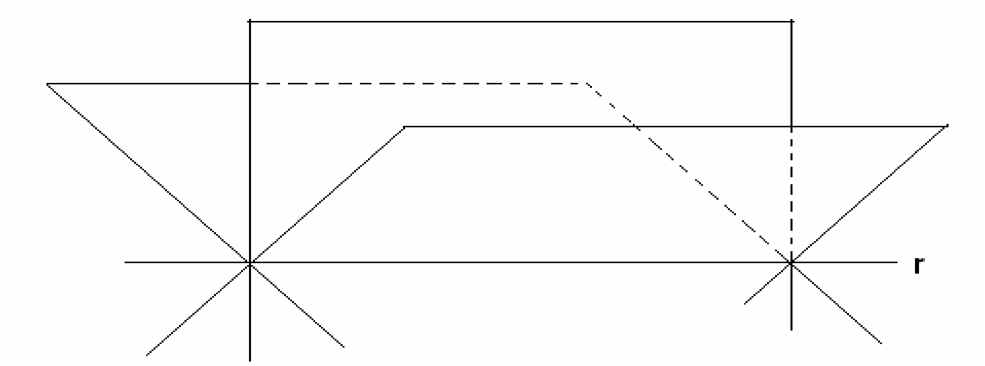


Figura 33: Representação da interseção de vários planos

Todavia, sob um outro ângulo de observação percebe-se um distanciamento entre o professor e os alunos, evidenciado não só pela hierarquia pré-estabelecida, mas por distanciamentos físicos geográfico, repercutindo talvez num afastamento epistemológico, comunicativo ou simbólico. Sendo destacado nesta seqüência de episódios: 1) “O professor é maluco”; 2)”Por que vocês estão distante de mim?”; 3) “O professor escreve em silêncio,...”

Isto nos mostra a existência de um ciclo comunicativo não explicitamente declarado, porém eivado de significados, uma espécie de ritual ou modelo simbólico desenvolvido neste ambiente.

Outro aspecto que merece destaque, refere-se a heterogeneidade dos registros semióticos em matemática nos direcionando a focalizar a existência de uma variedade de registros para um mesmo elemento como: lingüístico (reta e plano); representação simbólica ou algébrica ($(x,y,z)=(x_1,y_1,z_1)+t\cdot(a,b,c)$; $t \in R$; $ax+by+cz+d=0$) e a representação gráfica, demonstrando que num processo interpretativo as variáveis figurais, escalares ou lingüísticas estão imbricadas uma nas outras, abrindo assim um leque de possibilidades na produção de significados, ou seja, são vários caminhos que os atores podem seguir com o intuito de alcançar um único objetivo. Em outros termos, a forma como podem ser ordenados os vários registros permite ao professor e aos alunos inúmeras maneiras de significar um mesmo elemento.

Desta forma, destacamos a determinação de traços inerentes à geometria como a parte da matemática mais intuitiva ligada à realidade, como um veículo representativo, uma espécie de solidificação na compreensão de alguns conceitos matemáticos. No entanto, não queremos dizer com isto que a geometria tenha a característica rígida, mas a de que as imagens, figuras ou desenhos empreendem um contorno concreto, uma espécie de materialização do fator abstrato distintivo das demonstrações matemáticas. Esta é uma das causas que nos permite inferir a impossibilidade de redução dos elementos gráficos a um patamar meramente auxiliar, como suporte ou ferramenta, que só lembramos quando necessitamos efetivamente de suas funções. Seguindo este raciocínio, o fator abstrato, característico ao mundo hipotético matemático adquire um contorno concreto quando representados por desenho, sendo uma base, sustentáculo do ato imaginativo (suposições), ou seja, como uma corporificação dos elementos abstratos. A declaração de Fainguelernt (1999) soma e reforça a nossa idéia:

> O estudo da geometria é de fundamental importância para se desenvolver o pensamento espacial e o raciocínio ativado pela visualização, necessitando recorrer à intuição, à percepção e a representação, que são habilidades essências para a leitura do mundo e para que a visão matemática não fique distorcida. (FAINGUELERNT, *op.cit*, p.53).

Após defendermos o aspecto imagético que caracteriza as aulas de geometria analítica, não podemos deixar de mencionar um fato instigante da nossa pesquisa. Trata-se de um episódio bastante contraditório, diante das declarações dos nossos personagens, como por exemplo: "proibir a utilização do desenho em situações matemáticas é como se censurasse o raciocínio" ou o "desenho é uma forma mais simples de visualizar a questão".Na contramão destas declarações detectamos o seguinte: Em uma avaliação em grupo, os alunos seguiram o oposto do que declararam. Em todas as avaliações, os desenhos ou representações gráficas não apareceram, nem no aspecto auxiliar ou instrumental. Existindo assim uma espécie de "silêncio". Consideramos "silêncio", pois esta constatação está eivada de significados. Uma de nossas suposições é de que se seguiu a linha argumentativa do professor, já que ele apesar de fazer uso freqüente do elemento imagético, declarava uma preferência pela álgebra linear em detrimento da geometria analítica. Olhando sob outro ângulo, as questões foram resolvidas como que seguindo uma "receita", das listas de exercícios resolvidas anteriormente. Steinberg (1988) expõe que o silêncio pode ser apresentado de diversas formas com diferentes significados:

> O silêncio se apresenta sempre da mesma forma, isto é, ausência de som, mas sua ocorrência pode ter interpretações diferentes, dependendo do contexto social e cultural.(...) O silêncio pode ser imposto por normas sociais ou pode ser deliberado.(...) o silêncio propicia oportunidade a outros signos ou códigos de se evidenciarem mais fortemente no processo de comunicação. (STEINBERG, *op.cit*, p.22-23).

Os códigos evidenciados nas avaliações foram os algébricos ou lingüísticos complementando os primeiros, opondo-se ao silêncio dos geométricos. Mesmo diante deste episódio, a nossa constatação foi de que durante todas as nossas observações, o que foi efetivamente visível foi a recorrência freqüente do professor aos desenhos, mesmo quando o assunto abordado fazia referência à álgebra linear, as representações gráficas apareciam como determinantes prévios, como "insight", constituindo um caminho para as demonstrações, pois o exercício de "olhar", "ver" e "imaginar" nos conduz às abstrações. Assim, consideramos que as representações geométricas são solidárias com as representações algébricas, ou seja, o desenho metaforicamente seria um pilar para as explicações matemáticas.

Em contrapartida, nesta sala de aula o recurso aos desenhos é uma recorrência perceptiva.... E talvez repouse aí um dos motivos do "estranhamento" dos alunos: possivelmente eles não conseguem "perceber" aquilo que o professor "percebe" nos desenhos e gráficos, isto é, os desenhos têm um significado para o professor, mas nem sempre têm os mesmos significados para os alunos, talvez sejam abstratos!

Isto nos mostra perspectivas e possibilidades de prosseguirmos nesta caminhada, já que é necessário uma análise mais minuciosa, explorando ponto a ponto as origens, causas e conseqüências, esclarecendo o porquê de reduzir a representação gráfica a uma classe de menor valoração. Em outras palavras, é relevante, mas, permanece como pano de fundo nas demonstrações e argumentações matemáticas.

Frise-se que os processos interpretativo, representativo e comunicativo, encontram-se consubstanciados pelos intercâmbios gerados entre indivíduos e objetos matemáticos abordados nesta sala de aula, onde a recorrência ao aspecto gráfico era tida como um referencial, um ponto de partida, uma espécie de suporte intuitivo nas operações algébricas e geométricas, sendo um determinante na produção de significados, influenciando direta ou indiretamente as interpretações produzidas pelos atores.

A formação de uma rede de intercâmbios que se estrutura e se estruturou diante de nós, nesta amostra social (sala de aula); possibilitando o cruzamento de vários olhares, tomado muitas vezes como parâmetros elucidativos para compreendermos, mesmo que parcialmente essa diversidade, rica, ampla e complexa que se configura e se revela neste ambiente. Isto só foi possível perceber através da adaptação do método etnográfico à educação, transportando para os nossos estudos características das pesquisas desenvolvidas em antropologia "como uma atividade mais observadora e menos interpretativa do que realmente é". (GEERTZ, *op.cit*. p.19), tendo no comportamento destes atores ações simbólicas, geradoras de significados e conseqüente produção de cultura.

O nosso intuito principal, em nossas observações e contatos com os protagonistas desta história, foi estranhar, penetrar, desconfiar do que aparentemente parecia óbvio, evidente (uma sala de aula com alunos e professor). No entanto, ao mergulharmos percebemos que o que aparentemente é claro torna-se mais complexo para análise e estudo. Desta forma, seguimos um percurso na tentativa de compreendermos como os nativos desta ilha significam e o que eles fazem, numa busca interpretativa das situações que ocorreram neste ambiente, evidenciando assim, a função da descrição etnográfica.

REFERÊNCIAS

ANDRÉ, Marli Eliza Dalmazo Afonso de. **Etnografia da Prática Escolar**. Campinas, SP: Papirus, 1995.

ARNHEIM, Rudolf. **Arte e Percepção Visual: Uma Psicologia da Visão Criadora.** Tradução de Ivone Terezinha de Faria. 13ª ed. São Paulo: Pioneira, 2000.

ARCAVI, Abraham. **The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics**. In: Educational Studies in Mathematics. Vol. 52 – nº 3, p. 215-241. 2003.

BAKHTIN, Mikhail Mikhailovitch. **Marxismo e filosofia da linguagem: problemas fundamentais do metodo sociologico na ciencia da linguagem.** 3. ed. Sao Paulo: Hucitec, 1986.

BARUFI, Maria Cristina Bonomi. **A Construção / Negociação de Significados no Curso Universitário Inicial de Cálculo Diferencial e Integral.** 1999. 184 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, USP, São Paulo, SP.

BENSE, Elisabeth Walter. **A Teoria Geral dos Signos: Introdução aos Fundamentos da Semiótica.** Tradução de Pérola de Carvalho. São Paulo, SP: Editora Perspectiva, 2000.

BERGER, John. **Modos de Ver**. Versão em espanhol de Justo G Beramendi. 2. ed. Barcelona. Editorial Gustavo Gili, 2007.

BLÁZQUEZ, Gustavo. In: CARDOSO, Ciro Flamarion, org; MALERBA, Jurandir, org. **Representações: Contribuição a um Debate Transdisciplinar**. Campinas, SP: Papirus, 2000.

BKOUCHE, Rudolph; LILLE, Irem de. **Sobre o Ensino da Geometria**. GEPEM. Boletim – nº 14. p. 55-70. UFRJ. Rio de Janeiro. 1982.

CAMPOS, Daniel G. **Raciocínio Matemático e Criação Poiética em Peirce.** Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/filosofia/Pragmatismo/cognitio_estudos/cog_estudos_v4n2/2007_cog_est_42_art_campos.pdf> Acesso: 01 de fev 2008.

CASSIRER, Ernest. **Ensaio sobre o Homem: Introdução a uma filosofia da cultura humana**. 2.ed. Sao Paulo: Mestre Jou, 1977.

DUBOIS, Jean. **Dicionario de linguistica.** 8. ed. Sao Paulo: Cultrix, 2001.

DUVAL, Raymond. **Sémiosis et Penseé Humanine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectels**. Berna. Peter Lang, 1995.p.173-207.

______. **Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática**. In: Aprendizagem Matemática: Registros de Representação Semiótica / Silva Dias Alcântara Machado (org.), p. 11-33. Campinas, SP: Papirus, 2003.

ECO, Umberto. **As Formas do Conteúdo**. Tradução de Pérola de Carvalho. São Paulo, SP: Editora Perspectiva, 1974.

FAINGUELERNT, Estela Kaufman. **Educação Matemática: Representação e Construção em Geometria.** Porto Alegre: Artes Médicas Sul,1999.

FREGE, Gottlob. **Lógica e Filosofia da Linguagem**. São Paulo. Cultrix. Ed. da Universidade de São Paulo. 1978.

FLORES, Cláudia Regina. **Olhar, Saber, Representar: Ensaios sobre a Representação em perspectiva**. 2003. 288 f. Tese (Doutorado em Educação) – Centro de Ciências da Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, São Paulo.

______. **Registros de representação semiótica em matemática: história, epistemologia, aprendizagem**. BOLEMA. Rio Claro. São Paulo. Ano 19 – Número 26, 2006,

GEERTZ, Cliford. **A Interpretação das Culturas**. Rio de Janeiro: LTC, 1989.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. **Um Enfoque Onto-Semiótico do Conhecimento e a Instrução Matemática.** Tradução: Edson C. dos Santos, 2006. Disponível em: <http://www.ugr.es/local/jgodino> Acesso: 07 de jun 2007.

JOLY, Martine. **Introdução à Análise da Imagem**. Tradução de Marina Appenzeller. 9ª ed. – Campinas, SP: Papirus, 2005 – Coleção Ofício de Arte e Forma.

KRESS, Gunther; MARTINS, Isabel; OGBORN, Jon. **Explicando uma Explicação,** 1999. Disponível em <http://www.cecimig.fae.ufmg.br/wp-content/uploads/2007/12/1_2.pdf>. Acesso em 15 de fev de 2008

LADRIÈRE, Jean. **A articulação do sentido**. Sao Paulo: E.P.U, EDUSP, 1977.

LAPLANE, Adriana L Friszman de. **Interação e Silêncio na Sala de Aula**. Ijuí: UNIJUI, 2000.

MACHADO, Nilson José. **Matematica e lingua materna : Análise de uma Impregnação Mútua**. Sao Paulo: Cortez, Autores Associados, 1990.

MEDEIROS, Lígia Maria Sampaio de. **Desenhística: A Ciência da Arte de Projetar Desenhando.** – Santa Maria: SCHDS Editora, 2004.

NÖTH, Winfried. **A Semiótica no Século XX.** – São Paulo: ANNABLUME, 1996. – (Coleção E; 5).

OTTE, Michael. **Epistemologia Matemática de um Ponto de Vista Semiótico**. Educação Matemática Pesquisa: Revista de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática / Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, nº 01 (março de 1999) – São Paulo. EDUC, 2001. 11-58.

PERUZOLLO, Adair C. **Elementos de Semiótica da Comunicação: quando aprender é fazer**. Bauru, SP: EDUSC, 2004.

PEIRCE, Charles Sanders. **Semiótica e Filosofia**. São Paulo: Cultrix: USP, 1972.

______. **Semiótica**. 2. ed. São Paulo: Perspectiva, 1995.

PIAGET, Jean. **Problemas de Psicologia Genética.** Tradução: Célia E. A. di Piero. Rio de Janeiro: Forense, 1973.

______. **A Formação do Símbolo na Criança: Imitação, Jogo e Sonho, Imagem e Representação.** Tradução de Álvaro Cabral e Cristiano Monteiro Oiticica. 2ª ed. Rio de Janeiro, Zahar; Brasília, INL, 1975.

______. **Epistemologia Genética.** Tradução: Álvaro Cabral. São Paulo: M. Fontes, 1990.

RADFORD, Luis. **Semiótica Cultural y Cognición.** In: Conferência Plenária dada en la Decimoctva Reunión Latinoamericana de Matemática, 2004, México. Disponível em: <http://www.merc.laurentian.ca/NR/rdonlyres/808730CD-2FF4-45A3-AB1B-06BAFF87B51B/0/Tuxtla3.pdf > Acesso: 04 de fev 2008.

______. **Introducción Semiótica y Educacción Matemática.** RELIME (Revista Latonoamericana de Investigacion em Matemática Educativa). Volumen 9 (2006) – Número especial. México. Disponível em: <http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=33509902&iCveNum=4372> Acesso: 05 de ago 2007.

RIGHETTO, Armando. **Vetores e Geometria Analítica**. 5ª ed. São Paulo, SP: IBEC, 1982.

SANFILICE, José Luis de. **Sala de Aula: Intervenção no Real** / Regis de Morais (org.). In.: Sala de Aula: Que Espaço é Esse? 17ª ed. p. 83-93. Campinas, SP: Papirus, 2003.

SANTOS, Boaventura de Sousa. **Um discurso sobre as ciências**. 12ª ed. Porto: Afrontamento, 2001.

SAUSSURE, Ferdinand de. **Curso de Lingüística Geral**. Tradução de Antônio Chelini, José Paulo Paes e Izidoro Blikstein. 27 ed. São Paulo: Cultrix, 2006.

STEINBERG, Martha. **Os Elementos Não-Verbais da Conversação**. 1ª ed. São Paulo: Atual, 1988.

SOUZA, Lícia Soares de. **Introdução às Teorias Semióticas**. Petrópolis, RJ: Vozes; Salvador, BA 2006.

USISKIN, Zalman. **Resolvendo os Problemas Permanentes da Geometria Escolar.** São Paulo: Atual, 1994.

VYGOTSKI, Lev Semenovich. **A Formação Social da Mente.** São Paulo, Martins Fontes, 1984.

ANEXOS

Anexo I: QUESTIONÁRIO PRELIMINAR DE PESQUISA

Perfil do estudante de uma turma de Geometria Analítica

Obs.: A identificação é opcional

1) Qual a origem (naturalidade) de sua família?
   Pai:____
   Mãe:____
2) Você é natural de:____
3) Onde você e sua família residem?

4) Como foram trabalhados os conceitos geométricos durante os ensinos fundamental e médio? Em que momento você teve maior contato com a geometria?

5) Porque optou em cursar Licenciatura em Matemática? Que fatores foram determinantes?

6) Você tem afinidade com desenho ou representação gráfica?

7) Você utiliza o desenho na resolução de exercícios?
   Com que freqüência? ( ) sempre ( ) às vezes ( ) raramente ( ) nunca.

8) Como você classificaria a representação gráfica?
   ( ) Como um elemento facilitador
   ( ) Como um elemento neutro, que não influencia no processo de conhecimento.
   ( ) Como um elemento que dificulta o entendimento
   ( ) Outros. Justifique.____

9) Ao observar um gráfico ou uma figura geométrica, você já fez alguma associação com elementos ou situações do seu cotidiano? Em caso afirmativo, exemplifique.

Anexo II: FICHA INVESTIGATIVA

Observação: Caso seja necessário, use o verso.

1) No contexto da sala de aula, qual o significado que você atribui aos termos: gráficos, desenhos e figuras.

2) Sempre que você inicia uma disciplina (por exemplo, geometria analítica) quais foram os seus anseios e expectativa?

3) O que surge "imediatamente" e sua mente quando ouve os termos: "retas" e "planos"?

4) Defina a sala de aula.

Identificação

( ) Masculino ( ) Feminino

Nome (opcional): ____

Anexo III: QUESTIONÁRIO SOBRE GRÁFICOS E DESENHOS

1) ***Foi apresentado em uma das aulas de Geometria Analítica o seguinte teorema :*** Se $\beta = \left\{ \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \cdots, \overrightarrow{u_n} \right\}$ é uma base ortonormal para um espaço vetorial com produto interno V, e $\vec{v}$ é qualquer vetor em V, então $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} < \vec{v}, \overrightarrow{u_i} > \overrightarrow{u_i}$. Recorre-se à representação gráfica como espécie de tradução do teorema, sendo dito pelo professor que: "***A base vai varrendo todo o meu espaço***", ou seja, a base é um conjunto de vetores que gera todo o espaço. Como você representaria isto graficamente e qual a sua interpretação da afirmação do professor? **(Obs.: responda sem medo de errar, espontaneamente)**

2) Como você qualificaria o aspecto gráfico em matemática?

3) Imagine que nas aulas de matemática fosse proibido a utilização do desenho. Que situação você visualiza?

Anexo IV: QUESTIONÁRIO (PROFESSOR)

1) **Como você qualificaria o aspecto gráfico em matemática?**

2) **Desenhos e demonstrações quem seria 02 ou 08?**

3) **Porque em suas aulas você sempre recorre aos desenhos e gráficos? Com qual o objetivo?**

4) **Imagine que nas aulas de matemática fosse proibido a utilização do desenho. Que situação você visualiza?**