

THIAGO MENDONÇA PACHECO

INFLUÊNCIA DO MODELO DE FISSURAÇÃO NA MODELAGEM EM  
ELEMENTOS FINITOS DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO

Dissertação desenvolvida como pré-requisito para obtenção do grau de Mestre em Ciências em Engenharia Civil e Ambiental pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental da Universidade Estadual de Feira de Santana.

Orientador: Prof. José Mário Feitosa Lima, D.Sc.

Co-orientador: Prof. Paulo Roberto Lopes Lima, D.Sc.

FEIRA DE SANTANA, BA

NOVEMBRO 2013

## Ficha Catalográfica – Biblioteca Central Julieta Carteado

Pacheco, Thiago Mendonça  
P122i Influência do modelo de fissuração na modelagem em elementos finitos de vigas de concreto armado / Thiago Mendonça Pacheco. – Feira de Santana, 2013.

143f : il..

Orientador: Prof<sup>o</sup>D.Sc. José Mário Feitosa Lima.  
Co-orientador: Prof<sup>o</sup>D.Sc. Paulo Roberto Lopes Lima

Mestrado (dissertação) – Universidade Estadual de Feira de Santana, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental, 2013.

1. Engenharia civil. 2. Concreto armado - vigas. 3. Modelo de fissuração. I. Lima, José Mário Feitosa, orient. II. Lima, Paulo Roberto Lopes, co-orient. Universidade Estadual de Feira de Santana. III. Título.

CDU: 625

INFLUÊNCIA DO MODELO DE FISSURAÇÃO NA MODELAGEM EM  
ELEMENTOS FINITOS DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO

Thiago Mendonça Pacheco

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE  
PÓSGRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA  
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM  
CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL.

Aprovada por:

---

Prof. José Mário Feitosa Lima, D.Sc.

(UEFS)

---

Prof. Paulo Roberto Lopes Lima, D.Sc.

(UEFS)

---

Prof. Koji de Jesus Nagahama, D.Sc.

(UEFS)

---

Prof. Marcos Martinez Silvano, D.Sc.

(UFRJ)

FEIRA DE SANTANA, BA – BRASIL

Novembro de 2013

A Deus que guia nossos caminhos e fortalece nossa fé.  
À minha família, em especial aos meus pais, Ivaldo e  
Jadil que com amor e carinho me apoiaram.  
À minha noiva Juliana, pela cumplicidade e amor.

## AGRADECIMENTOS

Aos meus irmãos Matheus e Livia e aos familiares que desejaram comigo que essa meta se concretizasse.

Ao amigo especial, construído no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental da UEFS (PPGCEA), Marcos Venícios, pelo respeito, lealdade e pelo crescimento pessoal que sua amizade me trouxe, muito obrigado.

Aos grandes amigos construídos durante o mestrado, Rogério, Alex, Cleidson, e todos os meus contemporâneos do PPGCEA, agradeço pelas conversas, risadas, rico ambiente acadêmico e apoio.

Aos amigos Magno, Marcelo e João que contribuíram muito com o aprendizado e uso do programa DIANA<sup>®</sup>.

Aos grandes amigos de longa data, que fortalece e traz paz ao coração de todo bom homem.

À Universidade Estadual de Feira de Santana por me prover uma ótima formação desde a graduação.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio financeiro, tão importante para manutenção de um pesquisador.

Ao PPGCEA pela oportunidade de me tornar um profissional melhor compartilhando seu digno conhecimento.

Aos professores do PPGCEA que com muito compromisso compartilharam seu conhecimento.

Aos funcionários da secretaria do PPGCEA, Mariana, Cátia e Welber pelo respeito e atenção.

Aos meus estimados orientadores Professor José Mário Feitosa Lima e Professor Paulo Roberto Lopes Lima pela paciência, motivação e cobranças, muito obrigado.

Ao Professor Joaquim A. O. Barros pelos valiosos conhecimentos que, com muita humildade e respeito foram transmitidos.

Agradeço a todas as pessoas que direta ou indiretamente ajudaram na edificação desta tarefa, em especial a Eliana Machado, engenheira e mãe da mulher que amo, a minha mãe, Jadil e a minha noiva Juliana, pelas áridas leituras deste trabalho.

Por fim, agradeço a Deus pelo amor incondicional e pelas graças alcançadas.

Resumo da Dissertação apresentada ao PPGECEA/UEFS como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

## INFLUÊNCIA DO MODELO DE FISSURAÇÃO NA MODELAGEM EM ELEMENTOS FINITOS DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO

Thiago Mendonça Pacheco

Novembro/2013

Orientador 1: José Mário Feitosa Lima

Orientador 2: Paulo Roberto Lopes Lima

Programa: Engenharia Civil e Ambiental

O concreto é um material muito versátil e de larga utilização pela indústria da construção civil. A avaliação do seu comportamento não linear físico, porém, ainda é um dos grandes desafios da engenharia estrutural. Como forma de contribuir com esse ramo, esta dissertação tem como pretensão avaliar três métodos da Mecânica da Fratura de fissuração distribuída: fixo, rotacional e multidirecional. Para isso foram simuladas numericamente, através do software comercial DIANA<sup>®</sup>, ensaios de flexão de vigas, registrados na literatura, com ruptura por flexão e por cisalhamento. Para as vigas com falha por flexão, todos os três modelos apresentam bons resultados com capacidade para prever o caminho de equilíbrio, a carga máxima e a deformação de falha para o estado limite último. Todavia, para as vigas com falha por cisalhamento, o modelo fixo de fissuração não captou a ruptura corretamente e para o modelo rotacional de fissuração foi verificada grande instabilidade numérica ao determinar o caminho de equilíbrio, após o surgimento da fissura diagonal. Já o modelo multidirecional descreve com precisão o caminho de equilíbrio e capta o surgimento da fissura diagonal bem como, a carga e deformação últimas.

Abstract of Dissertation presented to PPGECEA/UEFS as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

INFLUENCE OF THE CRACK MODEL IN FINITE ELEMENT MODELING  
OF REINFORCED CONCRETE BEAMS

Thiago Mendonça Pacheco

Novembro/2013

Advisor 1: José Mário Feitosa Lima

Advisor 2: Paulo Roberto Lopes Lima

Program: Civil Engineering and Environmental

Concrete is a very versatile material widely used by the construction industry. However, the adequate application of your nonlinear behavior, by numerical methods is still a major challenge in structural engineering. In this work was evaluated three methods of distributed cracking based Fracture Mechanics: fixed rotational and multidirectional. , To this the flexural behavior of beam was simulated numerically by the commercial software DIANA<sup>®</sup>, and compared with experimental results reported in the literature. For the beams that failed by bending, the numerical simulation for all three models shown agreement with experimental results with ability to predict the equilibrium path, the maximum load and deformation failure. However, to analysis of beams that failed by shear, the fixed crack model did not capture properly the rupture load and the rotational model presented numerical instability after the start of diagonal cracking. Moreover, the multidirectional model describes the complete load-displacement behavior and adequately predicts the appearance of diagonal cracks as well as the latest load and deformation.

**SUMÁRIO**

<b>LISTA DE FIGURAS .....</b>	<b>x</b>
<b>LISTA DE TABELAS .....</b>	<b>xvii</b>
<b>1 FICHA CATALOGRÁFICA – BIBLIOTECA CENTRAL JULIETA CARTEADO .....</b>	<b>IV</b>
<b>2 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
2.1 Objetivos .....	3
2.2 Estrutura da dissertação.....	4
<b>3 COMPORTAMENTO MECÂNICO NÃO-LINEAR DO CONCRETO.....</b>	<b>5</b>
3.1 Teoria de Plasticidade .....	5
3.2 Mecânica do dano.....	8
3.3 Mecânica da fratura .....	10
3.3.1 Modos de carregamento .....	12
3.3.2 Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE).....	14
3.3.3 Mecanismos resistentes do concreto fissurado.....	16
3.3.4 Mecânica da fratura não-linear .....	19
<b>4 MODELAGEM DA FRATURA DO CONCRETO USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF).....</b>	<b>29</b>
4.1 Abordagem de fissura discreta .....	29
4.2 Aproximação por fissuração distribuída.....	31
4.2.1 Modelo fixo de fissuração distribuída .....	33
4.2.2 Modelo fixo de fissuração distribuída com decomposição das deformações .....	34
4.2.3 Modelo multidirecional de fissuração distribuída .....	39
4.2.4 Modelo rotacional de fissuração distribuída .....	44
<b>5 DIANA.....</b>	<b>47</b>
5.1 Aplicação dos modelos de fissuração distribuída no diana.....	47
5.1.1 Modelo fixo de fissuração distribuída para o DIANA <sup>®</sup> .....	47



5.1.2	Modelo multidirecional de fissuração distribuída para o DIANA <sup>®</sup> .....	48
5.1.3	Modelo rotacional de fissuração distribuída para o DIANA <sup>®</sup> .....	49
5.1.4	Relações de amolecimento a tração.....	49
5.1.5	Comportamento a compressão .....	54
5.1.6	Retenção de cisalhamento .....	58
5.2	Aplicação do elemento de barra incorporada no DIANA <sup>®</sup> .....	59
5.3	Descrição e Aplicação do elemento de serendipity de 8 nós no DIANA <sup>®</sup> .....	61
5.3.1	Descrição do Elemento regular quadrilátero de oito nós .....	61
5.3.2	Aplicação do Elemento regular quadrilátero de oito nós no DIANA <sup>®</sup> .....	64
<b>6</b>	<b>METODOLOGIA .....</b>	<b>67</b>
6.1	Descrição dos modelos numéricos e ensaios experimentais utilizados.....	67
6.1.1	Álvares (1993).....	67
6.1.2	Bresler e Scordelis (1963) .....	72
6.2	Estudo de convergência.....	77
6.3	Calibração dos modelos.....	78
6.4	Análise de vigas de concreto armado com diferentes tipos de falha.....	78
6.4.1	Flexão .....	78
6.4.2	Cisalhamento .....	78
6.5	Estudo dos modelos de fissuração .....	79
<b>7</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES .....</b>	<b>80</b>
7.1	Análise de convergência e norma de tolerância .....	80
7.1.1	Convergência de malha para material linear .....	80
7.1.2	Convergência de malha para análise em material não linear físico .....	80
7.1.3	Convergência para passo de carga.....	81
7.1.4	Verificação da tolerância para resolução do sistema linear .....	82
7.2	Calibração dos parâmetros de retenção ao cisalhamento e o ângulo limite .....	83

7.3	Avaliação do modelo de vigas a flexão comparando com o experimental de Álvares (1993).....	86
7.3.1	Resultados .....	86
7.3.2	Considerações.....	102
7.4	Modelo Numérico para previsão de cisalhamento para viga oa-3 de Bresler e Scordelis (1963).....	104
7.4.1	Resultados .....	104
7.5	Análise comparativa entre os modelos de fissuração distribuída.....	110
7.5.1	Resultados para viga com falha a flexão .....	111
7.5.2	Resultados para vigas com falha ao cisalhamento .....	113
<b>8</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....</b>	<b>120</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>122</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2-1 Modelos de falha (fonte: Adaptado de Chen e Han, 1988). .....	6
Figura 2-2 Modelos da Teoria da Plasticidade para representar materiais com comportamento de amolecimento pós-pico (fonte: Adaptado de Chen e Han, 1988).....	8
Figura 2-3 Tensão efetiva e equivalência de deformação no volume representativo de corpo danificado e parte não danificada, sob carga uniaxial (fonte: adaptado de Lemaitre e Chaboche, 2002) .....	9
Figura 2-4 Representação esquemática do comportamento mecânico de materiais (a) frágil, (b) dúctil, (c) quase-frágil (fonte: Adaptado de Shah <i>et al</i> , 1995).....	11
Figura 2-5 Representação esquemática de zona de fratura para material (a) frágil, (b) dúctil, (c) quase-frágil. (fonte: Adaptado de Shah <i>et al</i> , 1995) .....	12
Figura 2-6 Modos de movimentação de superfície de fissura (a) tração ou abertura (b) corte ou deslizamento planar e (c) deslizamento anti-planar (fonte: Adaptado Barros, 1995).....	13
Figura 2-7 Movimentação de superfícies de trinca em modo misto para modo I e II (fonte: Shah e Ouyang, 1992).....	14
Figura 2-8 Tensão de falha em uma placa de comprimento infinito submetida à tração (fonte: Adaptado de Shah <i>at el</i> , 1995).....	15
Figura 2-9 Distribuição de tensão na ponta de uma trinca e zona de processo de fissura (fonte: Adaptado de Shah e Ouyang, 1992) .....	16
Figura 2-10 Abertura de fissura no modo I de uma viga de concreto em flexão (fonte: adaptado de Shah <i>et al</i> , 1995).....	17
Figura 2-11 Fenômenos de enrijecimento da zona de processo de fissuração a) propagação de microfissuras b) Desvio de fissura no contorno do agregado resistente c) ponte de agregados d) fricção entre as faces da fissura e) vazios por incorporação de ar f) abertura de fissuras secundárias (fonte: adaptado de Shah <i>et al</i> , 1995).....	18

Figura 2-12 Área de contato devido a um deslocamento por cisalhamento (fonte: Walraven, 1980) .....	19
Figura 2-13 Curva tensão-alongamento (a) material frágil linear elástico (b) material quase-frágil (fonte: Adaptado de Shah <i>et al</i> , 1995).....	20
Figura 2-14 Aspecto geral da fissura em concreto e da zona de processo de fissuração sem incluir o efeito da microfissuração (fonte: adaptado de Shah <i>et al</i> , 1995).....	21
Figura 2-15 Aspecto geral da fissura em concreto e da zona de processo de fissuração incluindo o efeito da microfissuração (fonte: adaptado de Shah <i>et al</i> , 1995) .....	21
Figura 2-16 Modelo para material quase-frágil de fratura coesiva (a) com toda a superfície de fratura em contato, $w_t < w_c$ , (b) com superfície de fratura parcialmente separada, $w_t > w_c$ (fonte: adaptado de Shah <i>et al</i> , 1995).....	22
Figura 2-17 Representação de modelo de fissura fictícia, zona coesiva com $G_{ic}=0$ (fonte: adaptado de Shah <i>et al</i> , 1995).....	23
Figura 2-18 Consideração do modelo de fissura fictícia de Hillerborg <i>et al</i> (1976) (a) tensão-deformação para material íntegro (b) tensão-abertura de fissura para a seção fissurado (fonte: adaptado de Shah <i>et al</i> , 1995) .....	24
Figura 2-19 Representação do modelo de banda de fissuração (fonte: adaptado de Shah <i>et al</i> , 1995).....	25
Figura 2-20 Diagrama tensão deformação para a zona de processo de fissura, onde W é a área abaixo do gráfico (fonte: Bažant e Oh, 1983).....	26
Figura 2-21 (a) Morfologia da fissura atual (b) tensão atuantes e linhas suavizada para a seção A-A (c) fissura discreta em linha (d) modelo de banda de fissuração (fonte: adaptada de Bažant e Oh, 1983) .....	27
Figura 3-1 Zoom no ponto de aplicação de carga para um modelo de ensaio de corte (a) padrão de malha para acompanhamento de fissura (b) padrão de fissura (fonte: Adaptado de Shah <i>et al</i> , 1995).....	30

Figura 3-2 Viga em flexão de quatro pontos (a) malha de elementos finitos (b) tensões principais e travamento ao cisalhamento para a fissuração distribuída rotacional (c) deformação final (fonte: Adaptado de Rots e Blaauwendraad, 1989).....	33
Figura 3-3 Sistema de coordenadas locais e tração através de uma fissura (fonte: Adaptado de Rots e Blaauwendraad, 1989).....	34
Figura 3-4 Modelo multidirecional de fissuração distribuída (fonte: DIANA <sup>®</sup> , 2012) .	42
Figura 3-5 Memória de transferência em modo I de amolecimento para o modelo multidirecional de fissuração distribuída (fonte: Rots, 1988) .....	43
Figura 4-1 Tensão limite em espaço de tensão principal bidimensional (fonte: Adaptado de, DIANA <sup>®</sup> , 2012) .....	48
Figura 4-2 Comportamento frágil de fratura (fonte: DIANA <sup>®</sup> , 2012) .....	50
Figura 4-3 Comportamento linear de fratura (fonte: DIANA <sup>®</sup> , 2012).....	51
Figura 4-4 Comportamento multilinear de fratura (fonte: DIANA <sup>®</sup> , 2012) .....	52
Figura 4-5 Comportamento não linear de amolecimento de Moelands (fonte: DIANA <sup>®</sup> , 2012).....	53
Figura 4-6 Relação tensão-abertura de fissura para concreto de densidade normal, NC e de densidade leve LC (fonte: Cornelissen, Hordijk, e Reinhardt, 1986).....	54
Figura 4-7 Modelos predefinidos de comportamento do concreto a compressão (fonte: DIANA <sup>®</sup> , 2012).....	55
Figura 4-8 Curva de compressão de Thorenfeldt (fonte: DIANA <sup>®</sup> , 2012) .....	56
Figura 4-9 Curva de compressão do modelo Parabólico (fonte: DIANA <sup>®</sup> , 2012).....	57
Figura 4-10 Inserção de elemento de reforço incorporado em um elemento finito em estado plano de tensão como identificação dos nós do elemento, os pontos de integração do reforço e os nós do reforço (fonte: Adaptado de DIANA <sup>®</sup> , 2012).....	60
Figura 4-11 Forma das barras e o número de nós correspondentes necessários para descrever sua geometria (fonte: Adaptado de DIANA <sup>®</sup> , 2012) .....	60

Figura 4-12 Inserção no elemento CQ8M, de barra com duas seções com formas diferentes e os respectivos pontos necessários para análise (fonte: Adaptado de DIANA <sup>®</sup> , 2012).....	61
Figura 4-13 Elemento quadrilátero de oito nós da família dos <i>serendipity</i> (fonte: Reddy <i>et al</i> , 1993).....	62
Figura 4-14 Variação de forma com a função de interpolação associada ao nó 1 e 2 do elemento <i>serendipity</i> de oito nós (fonte: Reddy, 1993).....	64
Figura 4-15 Elemento finito quadrilátero de oito nós, CQ16M e forma de integração 2x2 por Gauss para um elemento quadrilátero (fonte: DIANA <sup>®</sup> , 2012) .....	65
Figura 4-16 Representação a) viga indeformada b) deformações para a teoria Euler-Bernoulli c) Teoria de primeira ordem d) teoria de ordem superior (fonte: Adaptado de Reddy, 2004) .....	66
Figura 5-1 Características geométricas e disposição das armaduras para os três tipos de vigas ensaiadas por Álvares (1993) (fonte: Álvares, 1993).....	68
Figura 5-2 Diagrama único dos domínios de deformação na ruína de elementos de concreto armado segundo a NBR 6118 (fonte: Libânio <i>et al</i> , 2003).....	68
Figura 5-3 Representação da densidade da malha, condições de apoio e posição das armaduras para o modelo adotado .....	70
Figura 5-4 Seção transversal e disposição das armaduras para todas as vigas de Bresler e Scordelis (1963) (fonte: adaptado de Vecchio e Shim, 2004).....	73
Figura 5-5 Representação da chapa acima do apoio, para reproduzir o arranjo experimental de Bresler e Scordelis (1963).....	74
Figura 6-1 Representação de malha de EF com elemento de 10 mm de aresta, malha com 5724 elementos .....	81
Figura 6-2 Itens para normas de convergência (fonte: DIANA <sup>®</sup> , 2012).....	82
Figura 6-3 Análise de comportamento com a alteração do $\beta$ , retenção ao cisalhamento na viga OA-3 de Bresler e Scordelis (1963).....	84

Figura 6-4 Análise de comportamento com a alteração do ângulo limite, para o modelo de fissuração multidirecional na viga OA-3 de Bresler e Scordelis (1963). .....	85
Figura 6-5 Análise de comportamento com a alteração do ângulo limite, para o modelo de fissuração multidirecional na viga C-1 de Bresler e Scordelis (1963). .....	86
Figura 6-6 Caixa de diálogo apresentado pelo DIANA <sup>®</sup> .....	87
Figura 6-7 Comparativo entre experimental caso 1 Álvares (1993) e modelos numéricos .....	88
Figura 6-8 Tensões cisalhante $\sigma_{xy}$ para a carga última do modelo da viga Caso-1 de Álvares (1993). .....	89
Figura 6-9 Tensões na direção de x para modelo do caso 1 de Álvares (1993). .....	89
Figura 6-10 Deformação principal para modelo do caso 1 de Álvares (1993). .....	90
Figura 6-11 Tensões axiais nas armaduras longitudinais do modelo caso 1 de Álvares (1993). .....	90
Figura 6-12 Deformação axiais acima do limite de 10‰, nas armaduras longitudinais do modelo caso 1 de Álvares (1993). .....	91
Figura 6-13 Tensões axiais nas armaduras transversais do modelo caso 1 de Álvares (1993). .....	91
Figura 6-14 Mapa de fissuração para a carga última do modelo do caso 1 de Álvares (1993). .....	92
Figura 6-15 Comparativo entre experimental caso 2 Álvares (1993) e modelos numéricos. ....	93
Figura 6-16 Tensões cisalhante $\sigma_{xy}$ para a carga que caracteriza a falha do modelo da viga Caso-2 de Álvares (1993). .....	94
Figura 6-17 Tensões na direção de x para modelo do caso 2 de Álvares (1993). .....	94
Figura 6-18 Deformação principal para modelo do caso 2 de Álvares (1993). .....	95

Figura 6-19 Tensões axiais nas armaduras longitudinais ao atingir a tensão de escoamento, do modelo caso 2 de Álvares (1993). .....	95
Figura 6-20 Deformação axiais acima do limite de 10‰, nas armaduras longitudinais do modelo caso 2 de Álvares (1993). .....	96
Figura 6-21 Tensões axiais nas armaduras transversais do modelo caso 2 de Álvares (1993). .....	96
Figura 6-22 Mapa de fissuração para a carga última do modelo do caso 2 de Álvares (1993). .....	97
Figura 6-23 Comparativo entre experimental caso 3 Álvares (1993) e modelos numéricos. ....	98
Figura 6-24 Tensões cisalhante $\sigma_{xy}$ para a carga que caracteriza a falha do modelo da viga Caso-3 de Álvares (1993). ....	98
Figura 6-25 Tensões na direção de x para modelo do caso 3 de Álvares (1993). ....	99
Figura 6-26 Deformação principal para modelo do caso 3 de Álvares (1993). ....	99
Figura 6-27 Tensões axiais nas armaduras longitudinais ao ser atingido a tensão de escoamento das armaduras no modelo para o caso 3 de Álvares (1993). ....	99
Figura 6-28 Deformações axiais acima do limite de 10‰, nas armaduras longitudinais do modelo caso 3 de Álvares (1993). ....	100
Figura 6-29 Tensões axiais nas armaduras transversais do modelo caso 3 de Álvares (1993). .....	101
Figura 6-30 Mapa de fissuração para a carga última do modelo do caso 3 de Álvares (1993). .....	101
Figura 6-31 Representação de malha de EF utilizada .....	104
Figura 6-32 Comparativo entre experimental OA-3 de Bresler e Scordelis (1963) e modelos numéricos .....	105



Figura 6-33 Tensões de cisalhamento $\sigma_{xy}$ , no concreto para a viga OA-3 de Bresler e Scordelis(1963), valores em MPa.....	106
Figura 6-34 Tensões de cisalhamento $\sigma_{xy}$ , no concreto para a viga OA-3 de Bresler e Scordelis(1963), obtida por Gamino (2007).....	107
Figura 6-35 Mapa de fissuração da viga OA-3 comparação com experimental de Vecchio e Shim (2004) e modelo do DIANA <sup>®</sup> .	107
Figura 6-36 Mapa de fissuração viga OA-3 Bresler e Scordelis modelada por Gamino(2007).....	108
Figura 6-37 Tensões normais nas armaduras longitudinais de tração obtidas para a viga OA-3 por Gamino (2007). .....	108
Figura 6-38 Tensões nas armaduras longitudinais $\sigma_{xx}$ , em MPa, da viga OA-3, segundo modelo construído no DIANA <sup>®</sup> .	108
Figura 6-39 Deformações axiais no eixo x da viga OA-3 de Bresler e Scordelis (1963), a partir de modelo no DIANA <sup>®</sup> .....	109
Figura 6-40 Comparativo entre experimental caso 2 Álvares (1993) e modelos numéricos de fissuração distribuída. ....	112
Figura 6-41 Comparativo entre experimental OA-3 Bresler e Scordelis (1963) e modelos numéricos de fissuração distribuída.....	113
Figura 6-42 Comparativo entre experimental A-1 Bresler e Scordelis (1963) e modelos numéricos de fissuração distribuída. ....	115
Figura 6-43 Padrão de fissuração para modelo fixo (1) fissuras primárias (2) fissuras secundárias.....	116
Figura 6-44 Padrão de fissuração para modelo rotacional (1) fissuras primárias (2) fissuras secundárias .....	117
Figura 6-45 Padrão de fissuração de viga VS-A1 de Vecchio e Shim 2004 (fonte: Vecchio e Shim, 2004) .....	117

Figura 6-46 Padrão de fissuração para modelo multidirecional (1) fissuras primárias (2) fissuras secundárias .....	118
Figura 6-47 Deformação principal 2 para o último ponto de equilíbrio do modelo da viga A-1 de Bresler e Scordelis (1963) .....	118

## LISTA DE TABELAS

Tabela 5-1 Dados físicos e geométricos das armaduras de Álvares (1993).....	71
Tabela 5-2 Dados característicos do concreto para modelo numérico no DIANA® .....	71
Tabela 5-3 Dados físicos e geométricos das armaduras utilizadas por Bresler e Scordelis (1963). .....	75
Tabela 5-4 Dados geométricos das vigas de Bresler e Scordelis (1963).....	76
Tabela 5-5 Resistência à compressão e a tração por flexão das vigas de Bresler e Scordelis (1963).....	76
Tabela 5-6 Dados característicos do concreto para modelo numérico da viga OA-3 no DIANA® .....	76
Tabela 5-7 Dados característicos do concreto para modelo numérico da viga A-1 no DIANA® .....	77
Tabela 5-8 Dados característicos do concreto para modelo numérico da viga C-1 no DIANA® .....	77
Tabela 6-1 Carga última para experimental e numéricos de Álvares (1993), e carga para estado limite último do modelo no DIANA® .....	102
Tabela 6-2 Variação percentual da carga última, entre os dados experimentais e os modelos numéricos do DIANA® e de Álvares (1993). .....	102
Tabela 6-3 Deslocamento último para experimentais e numéricos Álvares (1993), e deslocamento para estado limite último do DIANA® . .....	102
Tabela 6-4 Variação percentual de descolamento último, entre os dados experimentais e os modelos numéricos do DIANA® e de Álvares (1993).....	103

## 1 INTRODUÇÃO

A engenharia estrutural busca prever o comportamento de elementos com finalidade estrutural nas construções em geral. Nesse sentido, um dos grandes desafios é a previsão do comportamento não-linear físico de materiais cerâmicos, como o concreto, quando submetidos a diversas condições naturais e cinemáticas. A importância dos avanços no estudo não-linear físico não está ligada só a ganhos científicos, mas a maior segurança do uso de recursos, pela menor incerteza sobre o comportamento estrutural, bem como econômico, já que as incertezas podem levar ao mau dimensionamento e a sinistros, pelo colapso de estruturas que geram grande prejuízo econômico e por vezes, muitas vidas.

Como relata Vecchio (2000), infelizmente sinistros também são motivadores da pesquisa, a exemplo do colapso de vigas da cobertura de um hangar da Força Aérea Norte Americana na década de 60, por falha ao cisalhamento. Este evento motivou o desenvolvimento de novos estudos sobre o comportamento ao cisalhamento de vigas de concreto armado naquele país.

De fato, ao longo das últimas décadas várias teorias voltadas à previsão do comportamento de vigas de concreto armado foram propostas. Com esse intuito em 1986, Vecchio e Collins apresentaram o modelo de Campo de compressão diagonal modificado. Como afirma o DIANA<sup>®</sup> (2012) esse modelo é a base para o desenvolvimento dos modelos de fissuração distribuída baseados em deformação total estudados neste trabalho, e por sua vez, são os modelos presentes no programa DIANA<sup>®</sup> baseado no Método dos Elementos Finitos (MEF), e ainda emprega a teoria da Mecânica da Fratura, teoria para a previsão do comportamento não linear físico de materiais.

Outras teorias são importantes para o estudo de comportamento não-linear do concreto como a Teoria da Plasticidade, apresentada por Chen e Han (1988). Ainda essa teoria apresenta dificuldade devido a sua concepção teórica em descrever o comportamento não-linear do concreto, principalmente quanto a amolecimento. Uma outra abordagem relevante é pela Mecânica do Dano Contínuo, descrita por Lemaitre e Chaboche (1990), trabalhos que a aplicaram como Santos (2009), e Nogueira *et al* (2011), descrevem que a teoria tem maior dificuldade de captar a degradação por efeito de cisalhamento.

No trabalho de Lima (2009), que modelou placas cimentícias reforçadas com fibras longas de sisal, foi demonstrado o grande potencial da Mecânica da Fratura combinada com o MEF, para descrever o comportamento de estruturas, já que os métodos de fissuração distribuída foram desenvolvidos com a finalidade de poder captar deterioração por efeito de modos mistos de carregamento.

O MEF é considerado uma ferramenta muito importante, e a sua aplicação juntamente com a Mecânica da Fratura trouxe grandes avanços nas pesquisas, como informa Santos (2009). Como forma de representar a deterioração física dos materiais a partir dos Elementos Finitos, a Mecânica da Fratura propõe duas abordagens: a discreta, que segundo *Shahet al* (1995) insere uma descontinuidade na malha de elementos finitos (EF) como forma de representar a fissura, a distribuída que, conforme *Brisotto* (2006), incorpora a fissuração dentro do elemento finito através de uma descontinuidade no campo dos deslocamentos internos do mesmo.

Os modelos de fissuração distribuída são muito atrativos por representar bem o processo de múltipla fissuração em estruturas de concreto armado. São mais simples para criação do modelo de comportamento estrutural e não necessita de redefinição da malha de EF. Diferentemente da análise discreta, que depende muito da forma da malha de elementos finitos quando são usados processos automáticos para redefinição da mesma, que podem levar a resultados não confiáveis. Assim, com a pendência o caminho de fissuração pode não se assemelhar ao real, além da redefinição da malha e levar muito o custo computacional (*SHAH et al* 1995).

Pelas vantagens apresentadas, os modelos de fissuração distribuída vêm continuamente sendo aprimorados desde a sua introdução em 1968 por *Rashid* (Rots, 1988, *Shahet al*, 1995). Segundo *Rots* (1988), o primeiro modelo fixo de fissuração distribuída com decomposição das deformações foi apresentado por *Litton* em 1974 que propôs a ideia para a sub decomposição das deformações de fissura, que é a base para construção do modelo multidirecional de fissuração distribuída.

Ao longo dos anos outros modelos foram propostos, como o de *Bazant e Oh* (1983) que propõe um modelo rotacional de fissuração. Em outra vertente como o modelo fixo de fissuração, *Brisotto* (2006) desenvolve um modelo de fissuração baseado no modelo de *d'Ávila* proposto em 2003, que por sua vez é baseado no modelo de *Dvirkin et al* (1990). Ambos modelos são fixo de fissuração distribuída, diferenciando-se o primeiro pela presença de um modelo incorporado para discretização das armaduras. Como conclusão *Brisotto* (2006) afirma que mesmo com modelos

incorporado para discretização das armaduras o modelo fixo desenvolvido não apresenta bons resultados para vigas com ruptura ao cisalhamento.

Um estudo comparativo entre diversos modelos foi realizado por Sagasetta e Vollum (2009), que avaliou 22 vigas em concreto de alta resistência. Para tanto desenvolvendo três comparações numéricas; a primeira entre um modelo de fissuração discreta e o modelo rotacional, a segunda entre o modelo fixo, o rotacional e o multidirecional de fissuração distribuída. Por fim foi construído um modelo de EF que combina a fissura discreta e distribuída para previsão do comportamento de vigas com ruptura ao cisalhamento, o qual obteve resultados satisfatórios com os respectivos experimentais.

A robustez do último modelo adotado por Sagasetta e Vollum (2009), que representava ainda o efeito de pino e o escorregamento das armaduras, teve a finalidade de avaliar parâmetros para o dimensionamento de viga com falha ao cisalhamento em concreto de alto desempenho para futuras revisões dos códigos normativos.

Provando assim que ainda é um ramo de estudo em desenvolvimento e que carece de avaliação e comparação para identificação das deficiências e qualidades dos modelos. Trabalhos como esses são muito escassos, sendo então justificável e necessário a construção de mais estudos para avaliação de modelos de previsão de comportamento de vigas com ruptura ao cisalhamento.

## 1.1 OBJETIVOS

Como objetivo geral, este trabalho buscou avaliar a validade dos modelos numéricos de fissuração distribuída do concreto, baseados na Mecânica da Fratura, na previsão do comportamento de vigas de concreto armado que apresentam ruptura por cisalhamento.

Como objetivos específicos a serem atingidos tem-se:

- a) Descrever as bases teóricas dos modelos de fissuração distribuída: fixo, rotacional e o multidirecional da Teoria da Mecânica da Fratura;
- b) Implementar no Programa DIANA<sup>®</sup>, utilizando o Método dos Elementos Finitos, a modelagem de vigas de concreto armado e realizar estudos de convergência;

- c) Avaliar os modelos de fissuração para previsão de comportamento carga-flecha, modo de ruptura, carga e deformação última e padrão de fissuração comparando as vigas de concreto armado experimentadas por Álvares (1993) e Bresler e Scordelis (1963).

## 1.2 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

A sequência dos estudos acima foi organizada em capítulos, conforme síntese a seguir:

No **Capítulo 1** encontra-se a introdução onde, apresenta a contextualização do problema, e a aplicação da Teoria da Mecânica da Fratura combinado com o Método dos Elementos Finitos para solução do problema, bem como exposição dos objetivos e estrutura da dissertação;

No **Capítulo 2** são abordados os métodos para prever o comportamento não-linear do concreto com uma breve descrição da Teoria de Plasticidade e da Mecânica do Dano, enfatizando a Teoria de Mecânica da Fratura, seu desenvolvimento e conceitos;

No **Capítulo 3** é apresentada como a Teoria da Mecânica da Fratura é aplicada quando combinada com o Método dos Elementos Finitos, com as principais formas de abordagem, teorias e formulações para a aplicação dos modelos de fissuração distribuída;

O **Capítulo 4** foi dedicado ao estudo do programa DIANA®, e como as teorias tratadas nos capítulos precedentes são abordadas pelo programa;

O **Capítulo 5** descreve os principais aspectos definidos para a modelagem das vigas aqui estudadas, passando inclusive pela descrição dos ensaios bem como os dados necessários para a análise computacional;

No **Capítulo 6** encontra-se a apresentação dos resultados obtidos com os modelos numéricos construídos e, as devidas análises fruto das comparações entre os resultados experimentais e numéricos de outros autores, culminando na avaliação geral do trabalho e discussões, por fim a sugestão para a continuidade das pesquisas.

O **Capítulo 7** apresenta as considerações finais sobre os resultados obtidos e as sugestões para trabalhos futuros.

## 2 COMPORTAMENTO MECÂNICO NÃO-LINEAR DO CONCRETO

### 2.1 TEORIA DE PLASTICIDADE

A Teoria de Plasticidade descreve o comportamento inelástico do material. Inicialmente foi aplicada para prever o comportamento de metais, pois, sua conceituação básica busca descrever a movimentação de discordâncias da rede cristalina dos materiais. O concreto, por sua vez, apresenta ligações covalentes e não forma retículos cristalinos ordenados, por ser um compósito heterogêneo e anisotrópico. Portanto, as movimentações internas provocam aberturas e propagação de fissuras.

Segundo Chen e Han (1988), com o uso do Método dos Elementos Finitos (MEF) e da análise inelástica incremental, a deformação e as características de falha de concreto armado puderam ser avaliadas com mais racionalidade pela Teoria de Plasticidade.

Chen e Han (1988) classificam os modelos de plasticidade com base no número de constantes do material que aparecem na expressão do modelo, e Figura 2-1 apresentam-se as superfícies de falha mais comuns. O modelo de von Mises (Figura 2-1a), que depende apenas de uma constante, geralmente é usado nas análises com Elementos Finitos para descrever o comportamento do concreto comprimido, pois, as tensões na superfície de falha independem de uma correspondência com a condição de cisalhamento puro. Por conta disso, a superfície de falha de von Mises aumenta se for elevada a máxima tensão principal, ou seja, a máxima tensão de falha.



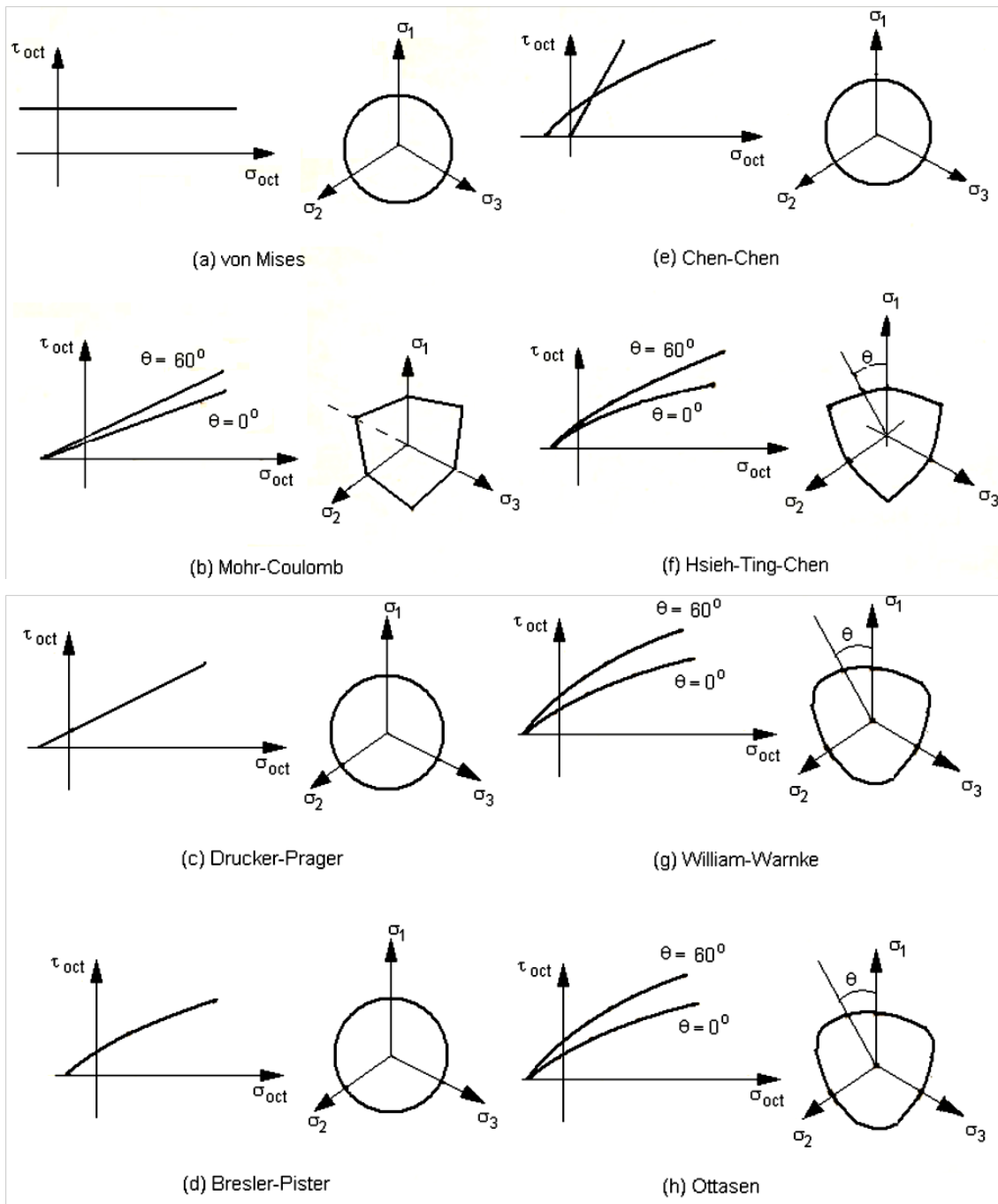


Figura 2-1 Modelos de falha (fonte: Adaptado de Chen e Han, 1988).

Os critérios de falha para a teoria da plasticidade definem os limites elásticos para um material associados a um estado tensional. Assumindo o material como isotrópico, então, a orientação das tensões principais  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  não dependem do material e seus valores bastam para descrever um estado tensional único. Já a superfície de falha pode ser descrita a partir das tensões principais ou por meio dos três invariantes de tensão, assim a superfície de falha pode ser escrita como:

$$f(I_1, J_2, J_3, k_1, k_2, k_3, \dots) \quad (2-1)$$

onde  $I_1$ , é o primeiro invariante do tensor tensão, e  $J_2$  e  $J_3$  são o segundo e o terceiro invariantes do tensor tensão desviador, respectivamente. Os termos  $k_i$  representam as constantes do material associadas ao modelo utilizado.

Os modelos apresentados na Figura 2-1, são modelos de deformação com endurecimento pós-limite linear. O termo endurecimento está associado ao aumento da inclinação da tangente do gráfico tensão-deformação, ou seja, um aumento no módulo de Elasticidade, assim todo o comportamento pós-limite linear, em materiais cerâmicos como o concreto, deveria ser classificado como de amolecimento, entretanto, a deformação com endurecimento para materiais cimentícios está associada a uma deformação pós-pico com ganho de tensão. Apenas é classificado como de amolecimento as zonas onde a tangente ao gráfico tensão-deformação é negativa.

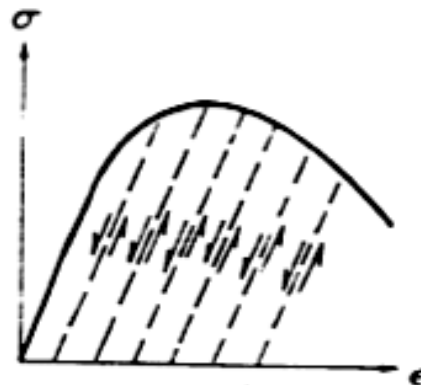
Entretanto, os conceitos fundamentais da teoria de plasticidade não descrevem perfeitamente o comportamento de materiais cimentícios, mesmo com adaptações, pois essa teoria apresenta dificuldade para representar o comportamento de amolecimento.

Para descrever o comportamento de amolecimento do concreto pós-pico Chen e Han (1988), explicam que na Teoria da Plasticidade há três modelos: o modelo de Sólido Elastoplástico, o de Sólido de Fraturamento Progressivo e o de Sólido de Fraturamento Plástico. No modelo Sólido Elastoplástico as linhas de carga e descarga seguem retas e paralelas a tangente inicial, Figura 2-2 (a); portanto, apenas considera as deformações plásticas sem que haja perda de rigidez. Este não é o caso do concreto, pois o mesmo apresenta perdas de rigidez com a progressão da fissuração.

O modelo de Sólido de Fraturamento Progressivo representa o outro extremo da análise, como visto por Chen e Han (1988), pois considera o material perfeitamente elástico. Assim, após um descarregamento ele retornará a condição inicial e livre de deformações residuais, mas associado a uma deterioração da rigidez proposta por Dougill apud Chen e Han (1988), apresentada em 1975, Figura 2-2 (b).

Em materiais cerâmicos como o concreto, a degradação se dá principalmente pela criação e propagação de microfissuras, que difere do escorregamento pela movimentação de discordâncias. Portanto, Chen e Han (1988) afirmam que a interpretação da teoria de deterioração da rigidez pela Teoria de Plasticidade não é satisfatória. Analisando as diferenças entre as regras de fluxo da plasticidade e a fratura, Dougill apud Chen e Han (1988), apresentou em 1975 e 1976 a teoria que chamou de

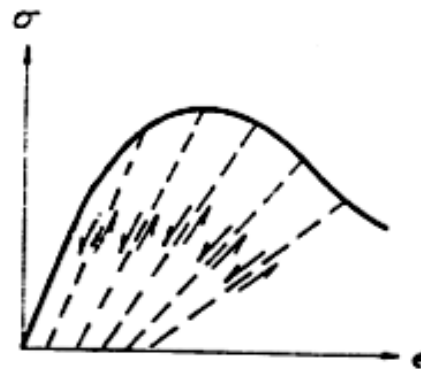
Teoria de Fratura, e o desenvolvimento da mesma derivou posteriormente para a Teoria do Dano.



(a) Sólido Elastoplástico



(b) Sólido de Fraturamento Progressivo



(c) Sólido de Fraturamento Plástico

Figura 2-2 Modelos da Teoria da Plasticidade para representar materiais com comportamento de amolecimento pós-pico (fonte: Adaptado de Chen e Han, 1988).

O outro modelo é o de sólido de fraturamento plástico, que é o mais indicado para modelagem de concreto armado, pois, une os dois modelos anteriores; uma deformação plástica por uma regra de fluxo e a degradação de rigidez pela teoria de Dougill, Figura 2-2(c).

## 2.2 MECÂNICA DO DANO

A Mecânica do Dano busca descrever o comportamento mecânico de materiais que apresentam perda de rigidez. Para descrever a degradação da rigidez pode-se

utilizar o princípio da equivalência de deformações, proposto inicialmente por Lemaitre e Chaboche em 1990. Esse princípio assume que para um corpo com área de seção transversal íntegra  $\tilde{S}$ , deve atuar uma tensão nominal efetiva  $\tilde{\sigma}$ , de tal forma que para o mesmo corpo com área de seção transversal danificada  $S$ , tenha uma tensão nominal média  $\sigma$ , que leve os dois corpos a apresentarem deformações iguais. Com isso, a deformação do corpo íntegro  $\epsilon_0$ , será igual à deformação do corpo danificado  $\epsilon$ , conforme mostra a Figura 2-3.

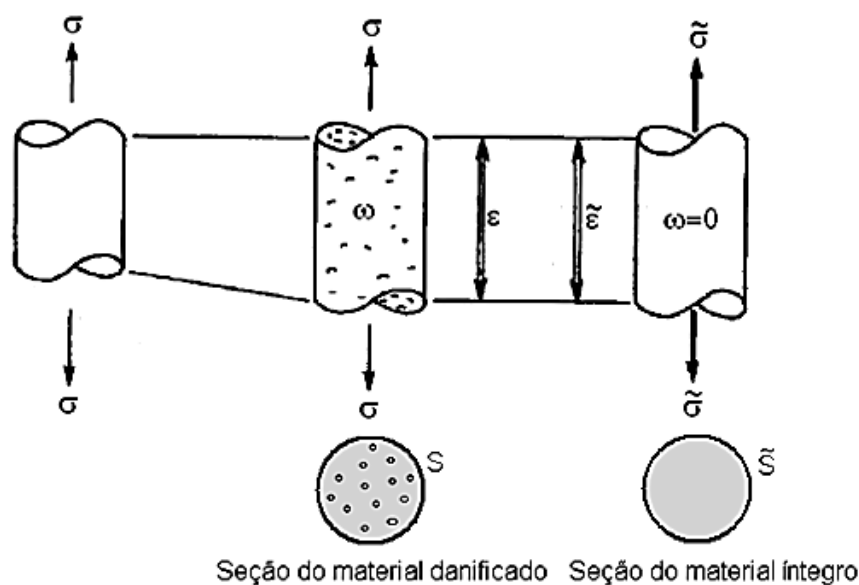


Figura 2-3 Tensão efetiva e equivalência de deformação no volume representativo de corpo danificado e parte não danificada, sob carga uniaxial (fonte: adaptado de Lemaitre e Chaboche, 2002)

A Mecânica do Dano descreve o comportamento desde o estado inicial até o surgimento de macro fraturas. Entretanto, neste caminho nem sempre é facilmente definido qual fenômeno de deformação é responsável pela formação da fissura. Como afirmam Lemaitre e Chaboche (2002), para os processos de oxidação, corrosão e irradiação ainda não há modelos termodinâmicos que os descrevam. Todavia, para o dano plástico dúctil, dano frágil visco-plástico, fadiga e dano macro frágil a Mecânica do Dano é válida para qualquer nível de temperatura e forma de carregamento. Isso por que a natureza do modelo de evolução do dano pode representar diferentes fenômenos que podem se acumular ou interagir uns com os outros.

Na mecânica do dano contínuo, sendo conhecido o estado de tensão e deformação de um elemento, as leis do dano provêm em relação ao tempo, à evolução do dano até o estágio de formação das fraturas macroscópicas. Então a mesma é

utilizada para se correlacionar a degradação do material com a deterioração das suas propriedades mecânicas (como o módulo de elasticidade) para que seja possível descrever, por exemplo, o amolecimento (*softening*) no comportamento mecânico macroscópico. Segundo Chen e Han (1988), a mecânica do dano é uma alternativa para substituir a Teoria de Plasticidade na análise do comportamento de materiais cerâmicos.

A Mecânica do Dano é usada com bons resultados em muitos trabalhos para descrever o comportamento de vigas de concreto armado, como nos trabalhos de Álvares (1993) e Santos (2009). Há também estudos com foco no cisalhamento que associam à Mecânica do Dano aos mecanismos resistentes ao cisalhamento, como o efeito de pino e o intertravamento entre seções fissuradas, como em Nogueira *et al* (2011).

### 2.3 MECÂNICA DA FRATURA

Segundo Shahet *al*(1995) a Mecânica da Fratura descreve a ruptura de um elemento a partir de concentração de tensões em um ponto, que inicia e propaga uma zona de ruptura. Com base em como essa zona de ruptura se propaga, a maioria dos materiais de engenharia pode ser descrito como frágil, dúctil ou quase-frágil, como é descrito os diagramas tensão-deformação para essas situações na Figura 2-4.

No material frágil as tensões caem subitamente após a fratura do material, assim como na Figura 2-4 (a). Um material dúctil é caracterizado por apresentar grandes deformações até a ruptura, como o caso particular para um material elasto-plástico perfeito Figura 2-4 (b), ou seja, quando um ponto atinge a tensão máxima, esta se manterá constante associada a grandes deformações. O material quase-frágil se caracteriza pela queda gradual nas tensões, após a tensão de pico, como pode ser visto na Figura 2-4 (c) (SHAH *et al*, 1995).

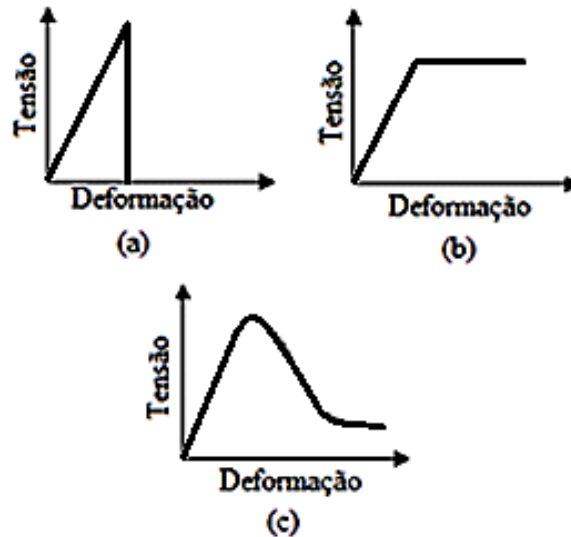


Figura 2-4 Representação esquemática do comportamento mecânico de materiais (a) frágil, (b) dúctil, (c) quase-frágil (fonte: Adaptado de Shahet *al*, 1995)

Na Mecânica da Fratura a zona de fratura, para cada tipo de material descrito anteriormente, se dá basicamente como representado na Figura 2-5. A figura apresenta uma placa submetida à tração, onde a mesma tem comprimento infinito, com um furo em forma elíptica no centro, de raios  $a_1$  e  $a_2$ , a qual representa uma falha, ponto onde haverá concentração de tensões e é preferencial para a fratura. Segundo Shahet *al* (1995), na Figura 2-5 (a), que representa um material frágil, pode-se verificar que a concentração de tensões pela presença do furo causará a falha quando a tensão máxima atingir a tensão de ruptura, podendo ser expressa de forma linear por

$$\sigma_{\max} = \left(1 + \frac{2a_1}{a_2}\right) \sigma_N = K_t \sigma_N \quad (2-2)$$

onde  $K_t$  é o fator de concentração de tensão.

Para um elemento de material dúctil, Figura 2-5 (b), quando a tensão máxima for atingida, o elemento continua a suportar tensões, pois, entra em um regime de plastificação até que toda a seção atinja a tensão máxima. Já em um elemento com material quase-frágil, quando a tensão no bordo do furo atingir a tensão máxima é iniciada uma zona inelástica, como na Figura 2-5 (c), que tem comportamento de amolecimento, “softening”, caracterizado por grandes deformações e redução de capacidade de suporte com o desenvolvimento do processo de fratura.

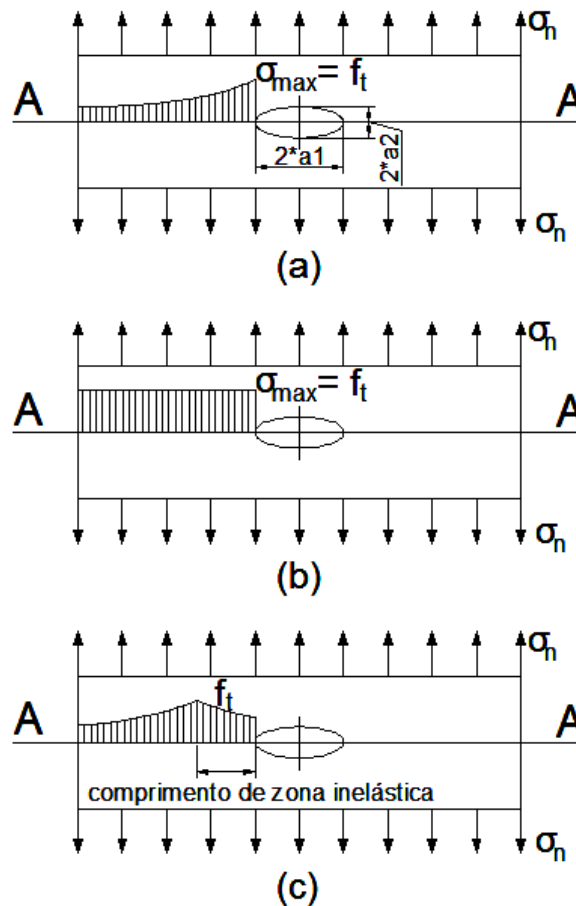


Figura 2-5 Representação esquemática de zona de fratura para material (a) frágil, (b) dúctil, (c) quase-frágil. (fonte: Adaptado de Shahet *al*, 1995)

### 2.3.1 Modos de carregamento

Uma estrutura real pode ser submetida a diversos modos de carregamento o que fará a estrutura também ter diferentes deslocamentos e movimentações de superfícies de fissura. As movimentações das superfícies de fissura são classificadas em três tipos nomeados de modo I, II e III, Figura 2-6.

Para se definir os modos de movimentação de superfícies de fissura primeiro é necessário definir os referenciais. É definido um plano, que passa pela normal da superfície da fissura, e um vetor na direção da superfície principal da estrutura. O modo I caracteriza uma movimentação de superfície de fissura por abertura, ou seja, um deslocamento na direção da normal às superfícies, também nomeado de modo de tração, como representado na Figura 2-6 (a).

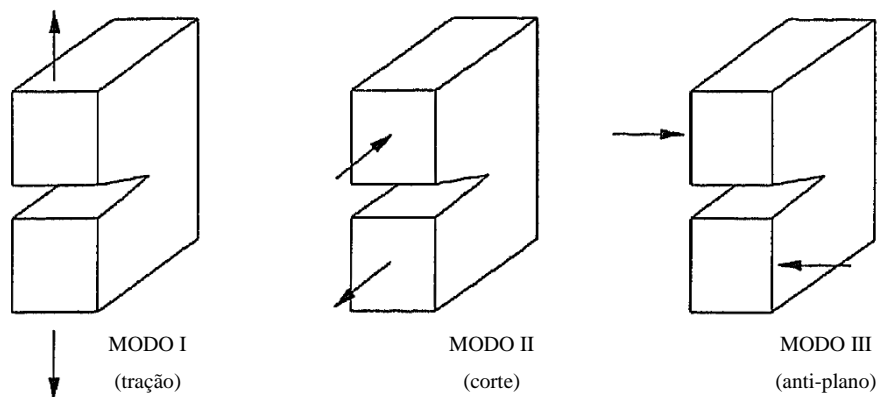


Figura 2-6 Modos de movimentação de superfície de fissura (a) tração ou abertura (b) corte ou deslizamento planar e (c) deslizamento anti-planar (fonte: Adaptado Barros, 1995)

O modo II representa a movimentação de superfícies de fissura por deslizamento de forma planar, de uma superfície sobre a outra. Assim recebe o nome de escorregamento ou de cisalhamento planar, como na Figura 2-6 (b). No modo III, o deslocamento dá-se também, na forma de deslizamento de uma superfície sobre a outra, contudo para fora do plano, com uma translação relativa entre as arestas das superfícies das trincas, sendo nomeado de rasgamento ou de deslizamento anti-plano, como na Figura 2-6 (c). Deve-se, portanto, conhecer qual comportamento a estrutura irá apresentar para então buscar obter os parâmetros específicos de fratura para cada modo que se quer modelar, parâmetros esses associados à energia dissipada por cada modo (BARROS, 1995).

O mais comum é ocorrer uma combinação entre os modos de movimentação de superfície de fissura. Na Figura 2-7 está representado uma movimentação mista de modo I e II, muito frequente em vigas submetidas a flexão e a torção. Segundo Shah e Ouyang (1992), o modo misto, entre os modos I e II, consome muito mais energia devido à presença da força de cisalhamento na tração, na superfície de fratura.



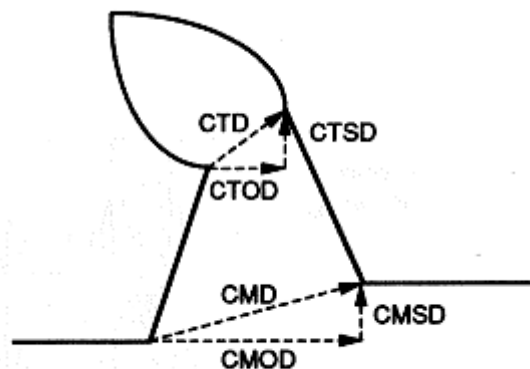


Figura 2-7 Movimentação de superfícies de trinca em modo misto para modo I e II (fonte: Shah e Ouyang, 1992)

Na Figura 2-7 as siglas significam: CMOD, abertura de fissura na entrada da trinca (do inglês, *crack mouth opening displacement*); CTOD, abertura de fissura na ponta da trinca (do inglês, *crack tip opening displacement*); CMSD, deslizamento de fissura na entrada da trinca (do inglês, *crack tip sliding displacement*); CTSD, deslizamento de fissura na ponta da trinca (do inglês, *crack tip sliding displacement*); CMD, deslocamento de fissura na entrada da trinca (do inglês, *crack mouth displacement*); e CTD, deslocamento de fissura na ponta da trinca (do inglês, *crack tip displacement*).

### 2.3.2 Mecânica da Fratura LinearElástica (MFLE)

Na Mecânica da Fratura LinearElástica (MFLE), considera-se que para haver a propagação de uma fratura na ponta de uma fissura, deve ser consumido uma quantidade de energia  $dW/da=R$  ( $R$  é a resistência à fratura). Então a condição para o crescimento da fissura é:

$$G=R \quad (2-3)$$

onde  $G$  está em função das propriedades da estrutura como, geometria, condição de apoio e carregamento e  $R$  é uma propriedade constante do material frágil linear elástico. A grandeza  $G$  pode ser escrita em função do termo de intensificação de tensão  $K$ .

$$G = \frac{K^2}{E'} \quad (2-4)$$

para  $E' = E$  no estado plano de tensão, ou  $E' = E/(1-\nu^2)$  para estado plano de deformação, onde  $E$  e  $\nu$  são, novamente, o módulo de elasticidade longitudinal e o coeficiente de Poisson, respectivamente.

Como os materiais contêm defeitos e, a propagação dos defeitos provoca a falha, é conveniente considerar a influência destes defeitos na análise, que é feito com o fator  $K_t$ . Segundo Shahet *al* (1995), todavia, quando a trinca tem formato de elipse muito estreito ou pontiaguda, o fator de intensificação de tensão  $K \rightarrow \infty$  (Figura 2-8). Como astensões na ponta de uma fissura de forma pontiaguda, para a MFLE, tendem ao infinito  $\sigma_{\max} = \infty$ , em  $a_2/a_1 \rightarrow 0$ , a MFLE é inválida pois, é irreal mensurar tensões tendendo ao infinito em qualquer material real.

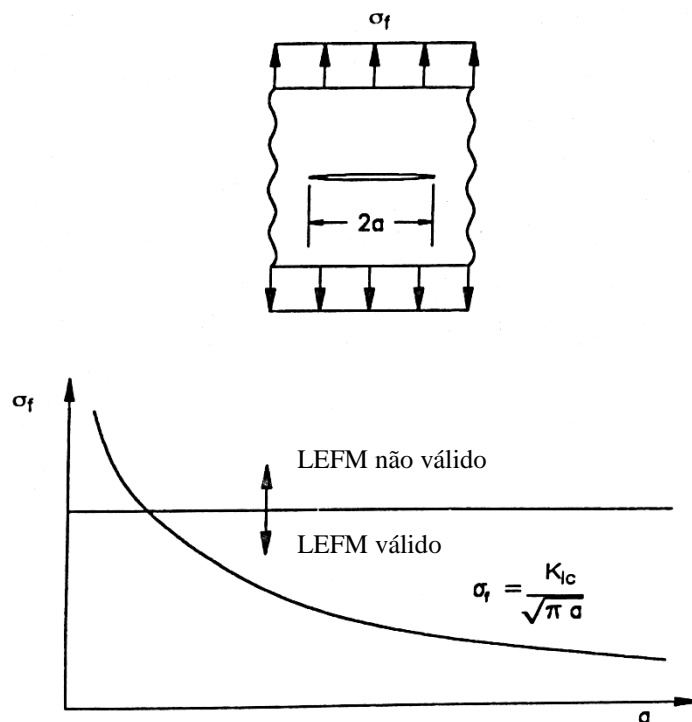


Figura 2-8 Tensão de falha em uma placa de comprimento infinito submetida à tração (fonte: Adaptado de Shahatel, 1995)

Como já afirmado, não há materiais que possam sustentar tensões tendendo ao infinito, então uma área inelástica na ponta da fissura de materiais reais deve existir, e essa área é nomeada de zona de processo de fissura, Figura 2-9. Uma forma de avaliar até quando é válida a MFLE é analisar as características do material e da estrutura. Se a

zona inelástica for muito pequena em relação à dimensão da fissura a MFLE poderá ser aplicada.

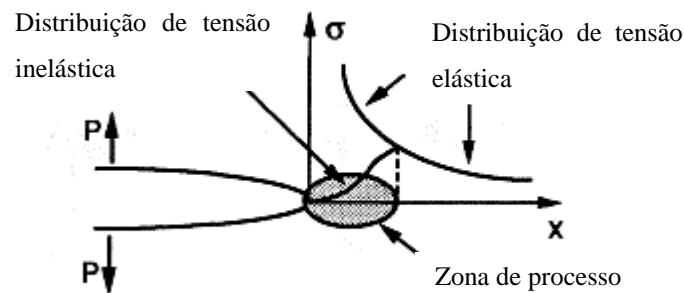


Figura 2-9 Distribuição de tensão na ponta de uma trinca e zona de processo de fissura (fonte: Adaptado de Shah e Ouyang, 1992)

### 2.3.3 Mecanismos resistentes do concreto fissurado

Na Figura 2-10 é representada a zona de processo de fissuração com os principais mecanismos que a compõem, e a distribuição de tensão em função da distância da ponta da trinca. Como afirma Shah e Ouyang (1992), quando o  $l_p \ll a$  a MFLE apresenta resultados satisfatórios, entretanto, na zona de processamento de fratura em materiais quase-frágeis, como concreto e rochas, o  $l_p$  é significativo em relação a dimensão da estrutura. Portanto, a energia da zona inelástica deve ser considerada.

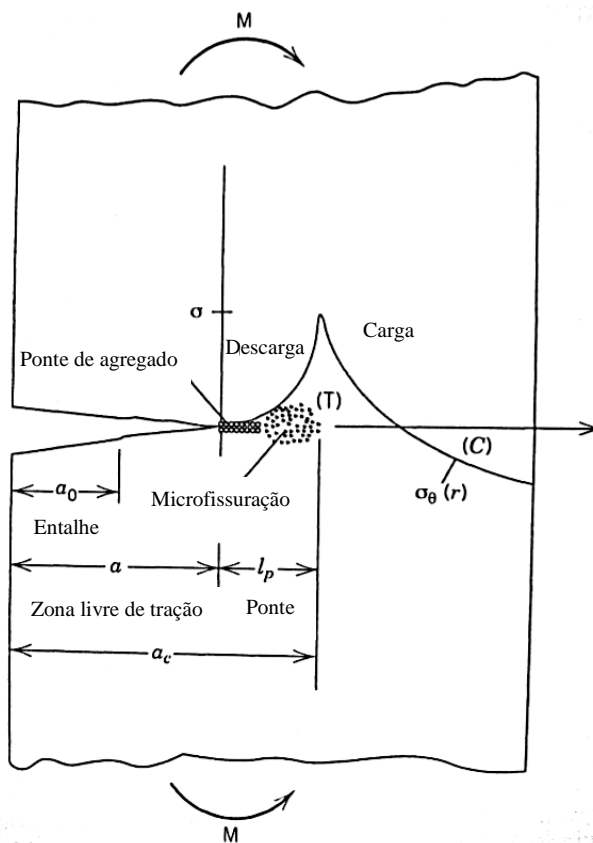


Figura 2-10 Abertura de fissura no modo I de uma viga de concreto em flexão (fonte: adaptado de Shah *et al*, 1995).

Shah e Ouyang (1992) elencam quatro fenômenos ligados a zona de processo de fissura por abertura, e em Shah *et al* (1995) são apresentados outros dois. O primeiro a ser apresentado é a propagação de microfissuras, mostrado na Figura 2-11 (a). Para o concreto estas são pré-existentes devido aos poros da água não utilizada nas reações de hidratação, dos vazios por incorporação de ar e da retração térmica. A propagação de microfissuras é um dos fenômenos que absorvem parte da energia das forças externas.

O segundo, Figura 2-11 (b), é o desvio da direção de fissura principal ao encontrar um agregado normalmente mais resistente que a matriz, fazendo a fissura propagar pelo seu contorno, de preferência pela zona de interface matriz-agregado.

Para o terceiro, como na Figura 2-11 (c), são as pontes de agregado. Muitas vezes o agregado interceptado pela fissura, permanece em parte aderido às duas faces da fissura, com isso, mantém o fluxo de tensões até sua ruptura ou arrancamento. O quarto fenômeno ocorre quando, mesmo depois do arrancamento, as fissuras apresentarem deslocamento relativo entre elas, os agregados, bem como, a própria face irregular das fissuras, entram em contato e reestabelecem o fluxo de tensões (Figura 2-11 (d)).

No quinto fenômeno, Figura 2-11 (e), o vazio interceptado pela ponta da fissura, reduz a concentração de tensão na mesma, que precisa de maior energia para voltar a se propagar. O sexto, Figura 2-11 (f), é o aparecimento de um segundo ou mais ramos de propagação de fissura, devido à heterogeneidade do concreto. Este fenômeno também demanda maior energia que a propagação simples da fissura.

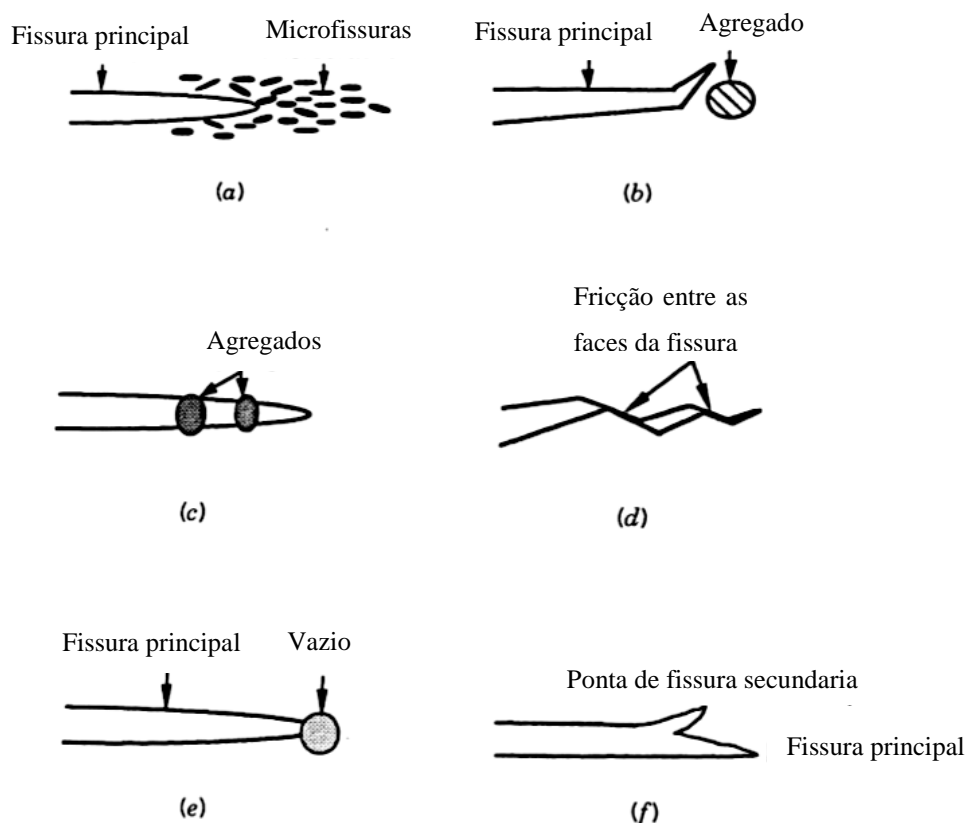


Figura 2-11 Fenômenos de enrijecimento da zona de processo de fissuração a) propagação de microfissuras b) Desvio de fissura no contorno do agregado resistente c) ponte de agregados d) fricção entre as faces da fissura e) vazios por incorporação de ar f) abertura de fissuras secundárias (fonte: adaptado de Shah *et al.*, 1995).

Para Walraven (1980), em materiais como o concreto, os fenômenos ligados à zona inelástica na ponta da fissura de principal relevância energética são: o intertravamento de seções fissuradas e a propagação das microtrincas. E afirma ainda que o intertravamento das seções fissuradas pode chegar a responder por 90% da energia total.

A energia de contato proveniente do intertravamento de seções fissuradas é significativa, porém, segundo Walraven (1980), com o afastamento por abertura das faces de uma fissura, as tensões caem bastante até o ponto de zerarem. Na Figura 2-12 os agregados são representados de forma esférica e a área de contato é representada

pelas hachuras. O padrão da Figura 2-12 é característico em concretos onde a resistência da matriz é bem menor que a do agregado, como para agregados de granitodesde que tenham dimensão suficientemente grande. Walraven (1980) informa que agregados com dimensão inferior a 0,25 mm podem ser desconsiderados no fenômeno do intertravamento.



Figura 2-12 Área de contato devido a um deslocamento por cisalhamento (fonte: Walraven, 1980)

O intertravamento de seções fissuradas é o fenômeno mais importante, segundo Walraven (1980), ligado à capacidade de suporte do concreto na zona fissurada, para os modos de carregamento II e III. Sua fundamental importância nos modos II e III de carregamento está ligada ao fato de o fenômeno ser ativado pelo deslocamento diferencial das faces da fissura provenientes destes modos de carregamento.

### 2.3.4 Mecânica da fratura não-linear

A Mecânica da Fratura não-linear aplicada a materiais quase-frágeis, fundamenta-se em buscar representar o comportamento de materiais que não apresentam limite de plastificação bem definido e que, a zona de plastificação é significativa em relação ao tamanho da fissura.

Shahet *al* (1995) descreve dois extremos para descrição do comportamento de materiais. No primeiro, o material ao atingir uma tensão limite tem uma queda súbita na tensão, Figura 2-13 (a), que leva a propagação catastrófica da falha, com provável ruptura brusca do elemento estrutural, dependendo das características geométricas, condições de contorno e de carregamento. O segundo caso trata de um material quase-

frágil, Figura 2-13 (b), onde a distribuição de tensão pode depender da definição do comportamento da zona de fissura a frente da ponta de fissura.

A curva tensão-alongamento na tração para materiais quase-frágeis, como o concreto, se caracteriza por ser considerada proporcional, linear elástica, apenas em um ramo inicial até  $f_y$ , como na Figura 2-13 (b). Apresentando em seguida um patamar onde a degradação é uniforme gerando o início das deformações localizadas, ou seja, uma propagação de fissura estável. Após esse patamar existe uma propagação de defeitos de forma instável até  $f_t$ , Figura 2-13 (b), onde há abertura de fissuras macroscópicas, seguida de uma perda de capacidade de suporte pela propagação e abertura de fissuras principais em detrimento de outras fissuras, que normalmente sofrem uma descarga e portanto, fechamento. Com a continuidade do deslocamento as fissuras principais irão abrir ao ponto de não ter mais capacidade de suporte, e assim provocar o colapso.

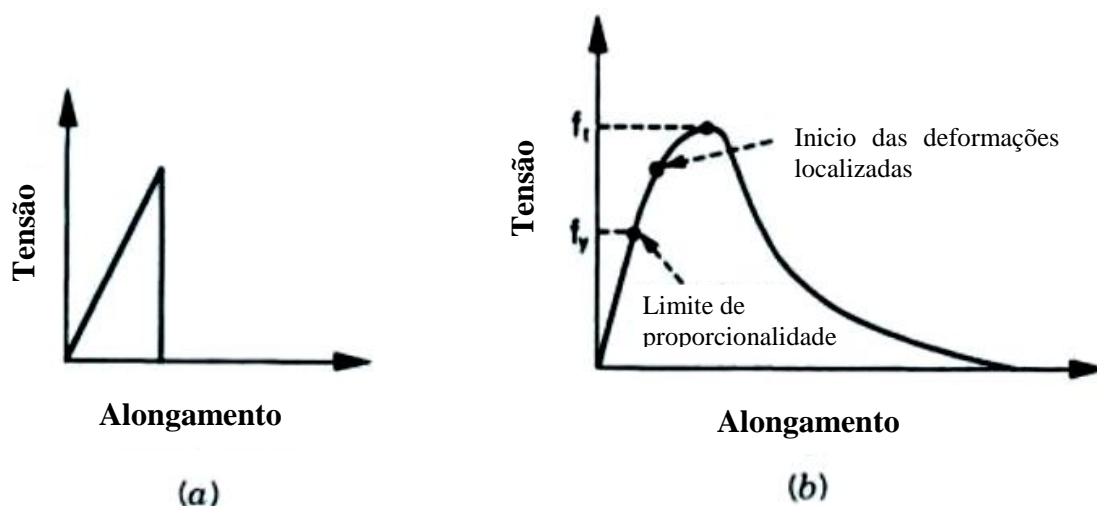


Figura 2-13 Curva tensão-alongamento (a) material frágil linear elástico (b) material quase-frágil (fonte: Adaptado de Shah et al, 1995)

Para a modelagem do fenômeno, se não for considerada a microfissuração na ponta da fissura, a concentração de tensão na ponta de fissura se elevará até atingir o valor  $f_t$ , assim dando início a abertura da fissura que, ao longo da zona de processo de fissuração, decairá até a fissura estar totalmente aberta e não mais permitir o fluxo de tensões de uma face a outra (Figura 2-14). Por outro lado quando a microfissuração é considerada na ponta de trinca, a tensão cai para o patamar  $f_y$ , Figura 2-15, no limite da zona de fissuração, caracterizando a propagação instável de fissura que precede a formação da macrofissura.

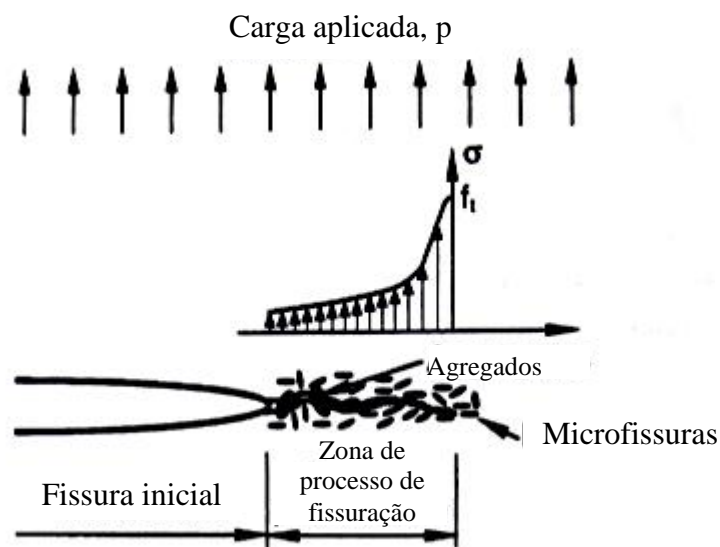


Figura 2-14 Aspecto geral da fissura em concreto e da zona de processo de fissuração sem incluir o efeito da microfissuração (fonte: adaptado de Shahet *al*, 1995)

Para se compor uma previsão numérica do fenômeno de fissuração, Shahet *al* (1995) fazem as seguintes considerações: a zona inelástica em um material quase-frágil, deve associar a fissura inicial e a zona de processo de fissuração com um comprimento  $a$ , como na Figura 2-16. Os mecanismos resistentes, associados ao enrijecimento na ponta da fissura, são modelados por uma tensão coesiva  $\sigma(w)$  em sentido contrário a abertura de fissura e será descrita como uma função dependente da abertura de fissura.

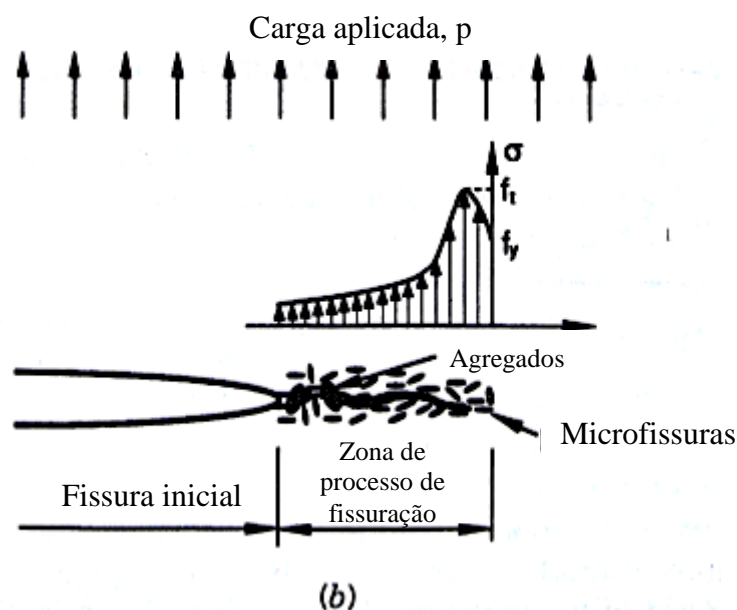


Figura 2-15 Aspecto geral da fissura em concreto e da zona de processo de fissuração incluindo o efeito da microfissuração (fonte: adaptado de Shahet *al*, 1995)



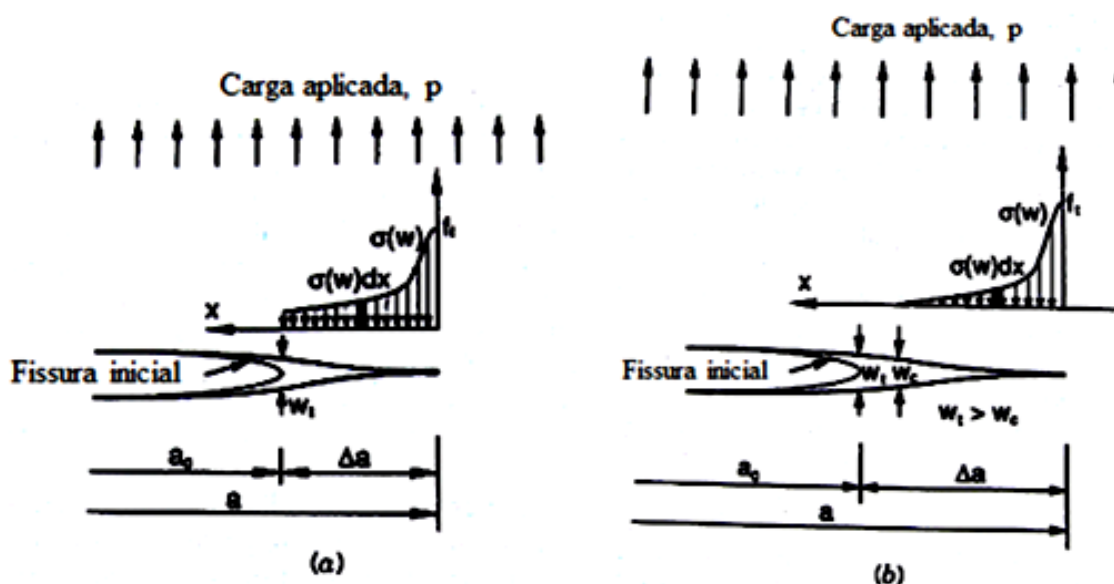


Figura 2-16 Modelo para material quase-frágil de fratura coesiva (a) com toda a superfície de fratura em contato,  $w_t < w_c$ , (b) com superfície de fratura parcialmente separada,  $w_t > w_c$  (fonte: adaptado de Shah *et al*, 1995)

Será considerado que na ponta de trinca, ou seja, quando  $w=0$ , a função  $\sigma(w)$  será igual a  $f_t$ ; portanto, desconsidera-se a microfissuração. Shah *et al* (1995), afirmam que isso é válido por conta de que o tamanho da zona de microfissuração é muito pequena em relação a  $a$ .

Assim, quando o elemento composto por material quase-frágil for submetido a tensões que excedam o  $f_t$ , uma taxa de liberação de energia  $G_q$  deve ser inserida na energia total do sistema. Segundo Shah *et al* (1995), o  $G_q$  pode ser dividido em duas partes, uma referente a energia necessária para criar as duas superfícies de fissura  $G_{Ic}$  e outra associada a energia necessária para superar as tensões de coesão, na zona de processo de fissuração  $G_\sigma$ . Assim  $G_q$  pode ser escrito como

$$G_q = G_{Ic} + G_\sigma \quad (2-5)$$

onde  $G_{Ic}$  é calculado em função dos conceitos da MFLE, e  $G_\sigma$  é descrito por Rice (1968) como sendo, a energia necessária para vencer as tensões coesivas por uma unidade de comprimento de fissura em uma estrutura com uma espessura unitária.

De acordo com Shah *et al* (1995) embora a propagação de fissura para materiais quase-frágeis possa ser descrita pela  $G_q$ , apenas um mecanismo pode ser aplicado de cada vez para obter a energia dissipada pela fissura. O primeiro modelo é baseado na teoria de Griffith, nomeado por Shah *et al* (1995) como modelo de Griffith-Irwin ou

modelo de aproximação por fissura elástica efetiva. O segundo modelo embora nomeado de modelo de Dugdale-Barenblatt, foi desenvolvido por Dugdale(1960) e posteriormente por Barenblatt (1962), que embora sejam similares, os autores trabalharam de forma independente, este modelo pode ser nomeado também como de aproximação por fissura fictícia.

Cabe destacar que, ao se admitir apenas o primeiro modelo representado pelo termo  $G_{Ic}$ , assume-se que  $\sigma(w)=0$ , ou então admitir apenas o segundo modelo representado pelo termo  $G_{\sigma}$ , assume-se que  $G_{Ic}=0$ .

### 2.3.4.1 Energia dissipada para o Modelo de fissura fictícia

O modelo de fissura fictícia, Figura 2-17, segundo Shah *et al* (1995), assume que a energia para formação de uma fissura é muito menor que a energia para separar as faces da fissura, portanto assume-se  $G_{Ic}=0$ . Assim, supõe-se que a distribuição de tensão na proximidade da fissura não deve se alterar.

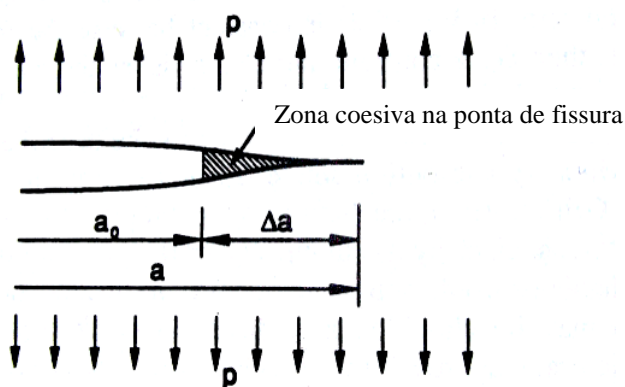


Figura 2-17 Representação de modelo de fissura fictícia, zona coesiva com  $G_{Ic}=0$  (fonte: adaptado de Shah *et al*, 1995)

Para o exemplo de placa infinita com fissura submetida à tração, acrescenta-se um comprimento fictício que representa a zona coesiva na ponta de fissura. Portanto, a taxa de liberação de energia  $G_q$  fica

$$G_q = \int_0^{w_t} \sigma(w) dw \quad (2-6)$$

Lembrando que essa equação só é válida para estruturas de espessura constante. Se  $w_t > w_c$  deve ser substituído o limite superior da integral por  $w_c$ . Para o modelo de fissura fictícia, assume-se que, a fissura se propaga assim que a tensão atingir o limite de resistência do material  $f_t$ .

Segundo Shah et al. (1995) o modelo de Hillerborget al(1976), foi a primeira abordagem do modelo de fissura fictícia. O modelo assume que as deformações antes do pico são uniformemente distribuídas no elemento estrutural, Figura 2-18 (a). Contudo, as deformações pós pico causam uma descontinuidade nos deslocamentos no ponto onde o limite de resistência do material é alcançado, Figura 2-18 (b).

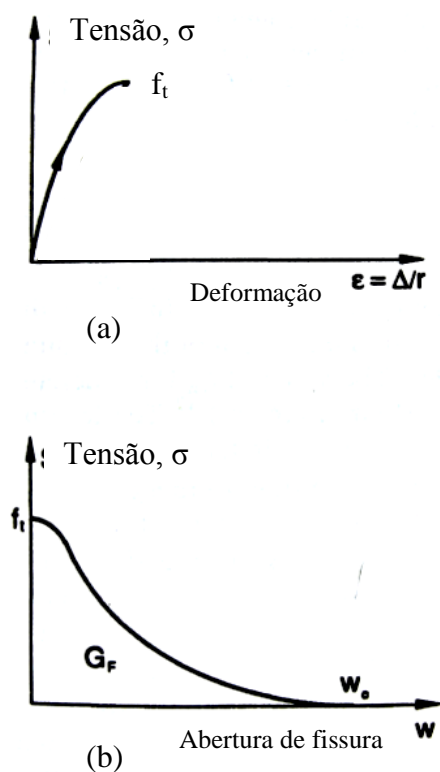


Figura 2-18 Consideração do modelo de fissura fictícia de Hillerborget al (1976) (a) tensão-deformação para material íntegro (b) tensão-abertura de fissura para a seção fissurada (fonte: adaptado de Shah et al, 1995)

A energia dissipada neste ponto deve ser considerada como função não mais da deformação, como na mecânica do contínuo, mas em função da abertura de fissura  $\sigma(w)$ , e pode ser escrita como

$$G_f = \int_0^{w_c} \sigma(w) dw \quad (2-7)$$

onde  $G_f$  é a energia de fratura, por unidade de área de fratura, sendo admitida como uma propriedade do material.

Outro modelo importante baseado no modelo de fissura fictícia é o modelo de Bažant e Oh (1983), que considera que a zona de processo de fissura pode ser contínua e uniformemente distribuída sobre uma largura fixa, Figura 2-19, nomeada de largura de banda de fissuração  $h_c$ . A propagação de fissura estável é simulada pela propagação de microfissuras, a qual é descrita por uma relação tensão-deformação. O deslocamento por abertura de fissura é igual ao produto da deformação de fratura pela largura de banda de fissura. Assim a energia de fratura  $G_f$ , Eq. (2-8), pode ser obtida, com a área do gráfico tensão-deformação, multiplicada pela largura de banda de fissura,  $h_c$ , como ilustrado na Figura 2-20.

$$G_f = h_c W = h_c \left(1 - \frac{E}{E_t}\right) \frac{f_t'^2}{2E} \quad (2-8)$$

onde  $f_t'$  é a resistência a tração do material,  $E$  é o módulo de elasticidade do material e  $E_t$  é o módulo de elasticidade de amolecimento (na equação deve ser aplicado positivo).

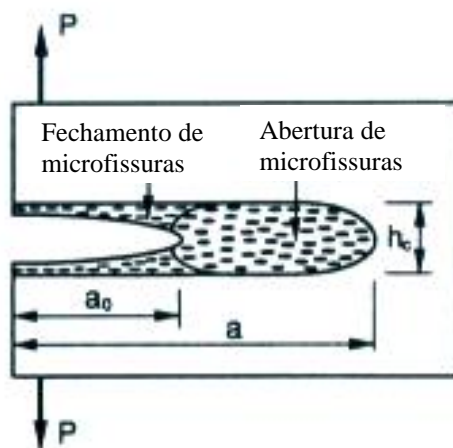


Figura 2-19 Representação do modelo de banda de fissuração (fonte: adaptado de Shahet *al*, 1995)

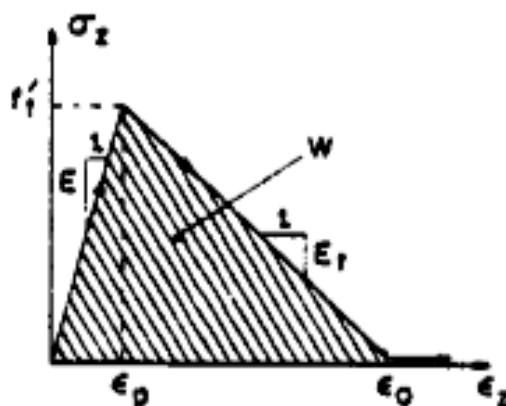


Figura 2-20 Diagrama tensão deformação para a zona de processo de fissura, onde  $W$  é a área abaixo do gráfico (fonte: Bažant e Oh, 1983)

O modelo considera que a fissura pode ser inserida dentro de um elemento representativo de volume, que possa englobar uma quantidade representativa de material e a fissura. A Figura 2-21 (a) apresenta o caminho de uma fissura num elemento estrutural flexionado bem como a matriz e o agregado. A dimensão da largura de banda de fissuração é mensurada analisando as tensões atuantes ao redor da fissura. Analisando a seção A-A da Figura 2-21 (a), no local circulado identifica-se, que as fissuras não são linhas retas e sim tortuosas, por conta da fissura avançar pelo contorno dos agregados, nas zonas de interface, matriz-agregado, e também na direção dos defeitos na matriz. As tensões no local circulado, na direção da seção A-A, são representadas em Figura 2-21 (b) onde é proposta uma linha de suavização para a concentração de tensões, advindas da degeneração mecânica na área a ser numericamente representada. O modelo representa as fissuras, que são tortuosas, como linhas retas. Entretanto, a aproximação de representar como bandas de fissuração, Figura 2-21 (d), é mais coerente que inserir discretamente uma fissura Figura 2-21 (c) ou uma fileira de fissuras alinhadas, para uma condição de propagação de fissura estável (BAŽANT e OH, 1983).

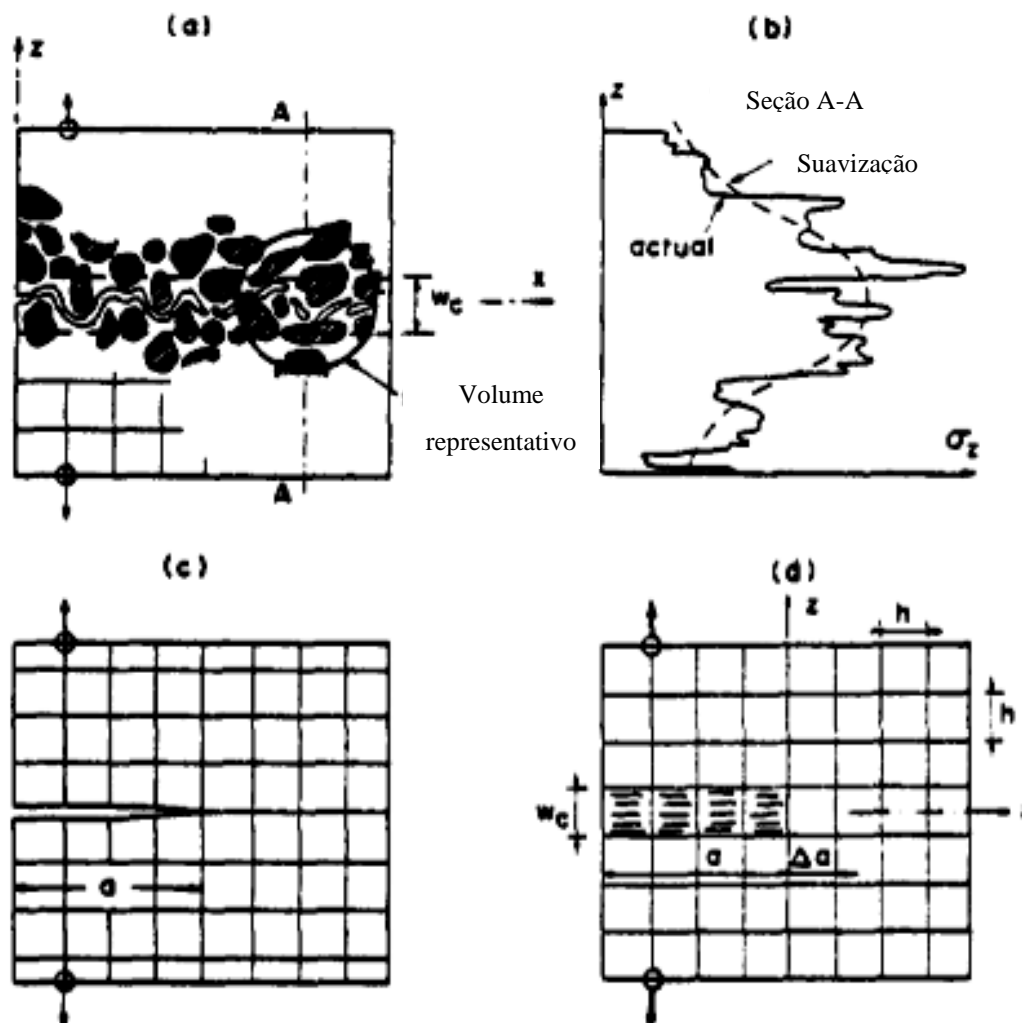


Figura 2-21 (a) Morfologia da fissura atual (b) tensão atuantes e linhas suavizada para a seção A-A (c) fissura discreta em linha (d) modelo de banda de fissuração (fonte: adaptada de Bažant e Oh, 1983)

Uma das vantagens do método é que a largura de banda de fissuração é independente da geometria, carregamento e condição de contorno, sendo assumida como uma característica do material. Contudo não exclui a necessidade de correlação com ensaios experimentais, de resistência do material, mas, que podem ser obtidos de forma consistente com ensaios simples e acessíveis.

Cabe ressaltar que no presente trabalho foi apresentado, de forma mais abrangente, o modelo fictício de fissura, pois é o modelo que o software computacional da TNO, o DIANA<sup>®</sup> faz uso.

### 2.3.4.2 Energia dissipada para o modelo de fissura elástica efetiva

Um meio de modelar a zona de processo de fissura do concreto é pelo modelo de fissura elástica efetiva. Segundo Shahet *al* (1995), o modelo simples de Griffith e Irwin pode ser usado para essa tarefa, assumindo para os mecanismos de dissipação de energia  $\sigma(w)=0$ . Para isso é modelada a zona de processo de fissura por uma fissura elástica equivalente livre de tração. Portanto, o modelo é governado pelos critérios da LEFM. Assim a taxa de energia por uma fissura elástica efetiva no modo I pode ser escrita como

$$G_q = G_{Ic} \quad (2-9)$$

O  $G_q$  será função da geometria e tamanho da estrutura, das cargas aplicadas, bem como do comprimento da fissura elástica efetiva, e o  $G_{Ic}$  é a taxa crítica de energia liberada assim como  $G_f$  do modelo de fissura fictícia. Uma limitação do modelo é que o comprimento da fissura elástica efetiva deve ser ajustado empiricamente para cada forma e geometria das estruturas, não podendo ser utilizado como um critério independente para a fratura.

### 3 MODELAGEM DA FRATURA DO CONCRETO USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)

Desde a sua concepção a Mecânica da Fraturagem sendo auxiliada pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), como expõem Álvares (1993), Santos (2009) e Penna (2011), e o seu desenvolvimento apresenta dois modelos básicos. O primeiro a ser apresentado, é o de fissuração discreta onde as fissuras são inseridas de forma discreta na malha de elementos finitos criando uma condição cinemática, que deve ser atualizada para acompanhamento de sua propagação.

Segundo Álvares (1993), para a aplicação do primeiro modelo, há um alto custo computacional, então, em 1984, De Borst apresentou um método de fissuração distribuída com um custo computacional consideravelmente menor. No método o material foi tratado de forma contínua equivalente, e as fissuras inseridas de forma contínua, ou seja, são inseridas alterando as propriedades mecânicas do elemento finito afetado. Este modelo foi nomeado de Modelo de Fissura Contínua Equivalente.

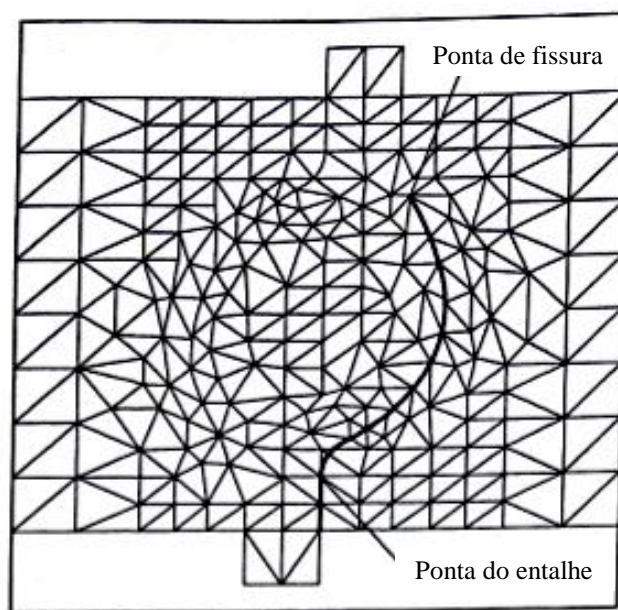
#### 3.1 ABORDAGEM DE FISSURA DISCRETA

Um dos princípios básicos da fissura discreta é que o caminho de fissuração, a priori, deve ser compatibilizado com a malha de elementos finitos, para que o caminho coincida com o bordo dos elementos. Para aplicar o modelo de fissura discreta, Shahet *al* (1995) elencam três problemas que devem ser respondidos. Primeiro, determinar o local e a direção de início da fissuração; segundo, como irá se propagar; e por fim, em que direção irá se propagar.

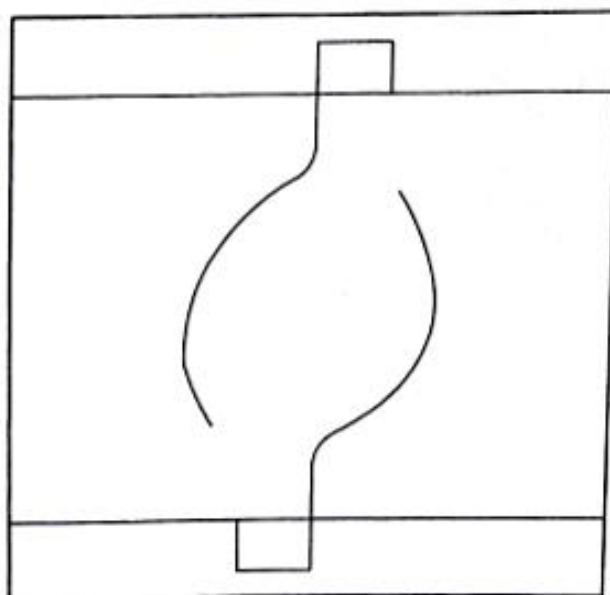
Para o primeiro, a solução é relativamente simples, pois ocorrerá onde incidir a máxima tensão. O problema está no fato que, após ser identificado o local e o limite crítico ser vencido, a malha deve ser redefinida para incluir a descontinuidade. Para o segundo, diz respeito às suposições iniciais. Por exemplo: se o modelo definido será válido para a nova geometria, ou se a regra de amolecimento é eficiente para descrever a forma de propagação. A terceira é encontrada com o estudo do estado tensional, onde a direção de propagação segue normalmente perpendicular a direção da tensão principal de tração, todavia, como as fissuras devem seguir o contorno dos elementos, a direção de propagação fica muito dependente da malha (Figura 3-1).



Segundo *Shahet al* (1995), os problemas do uso da aproximação por fissura discreta são: a necessidade de redefinição da malha, que eleva muito o custo computacional e de tempo; a dependência com a malha para obtenção de resultados confiáveis; e a dificuldade na descrição de múltipla fissuração, a qual é a forma de melhor aproveitamento das estruturas.



(a)



(b)

Figura 3-1 Zoom no ponto de aplicação de carga para um modelo de ensaio de corte (a) padrão de malha para acompanhamento de fissura (b) padrão de fissura (fonte: Adaptado de *Shahet al*, 1995)

### 3.2 APROXIMAÇÃO POR FISSURAÇÃO DISTRIBUÍDA

Para Rots e Blaauwendraad (1989) e Shahet *al* (1995), o conceito da aproximação por fissuração distribuída é, representar as fissuras no sólido por meio de alterações nas propriedades físicas do material, todavia, sem a necessidade de alterações na geometria como na fissuração discreta. Segundo esses autores, o primeiro a apresentar um modelo para incorporar o processo de fissuração à rigidez do material foi Rashid em 1968.

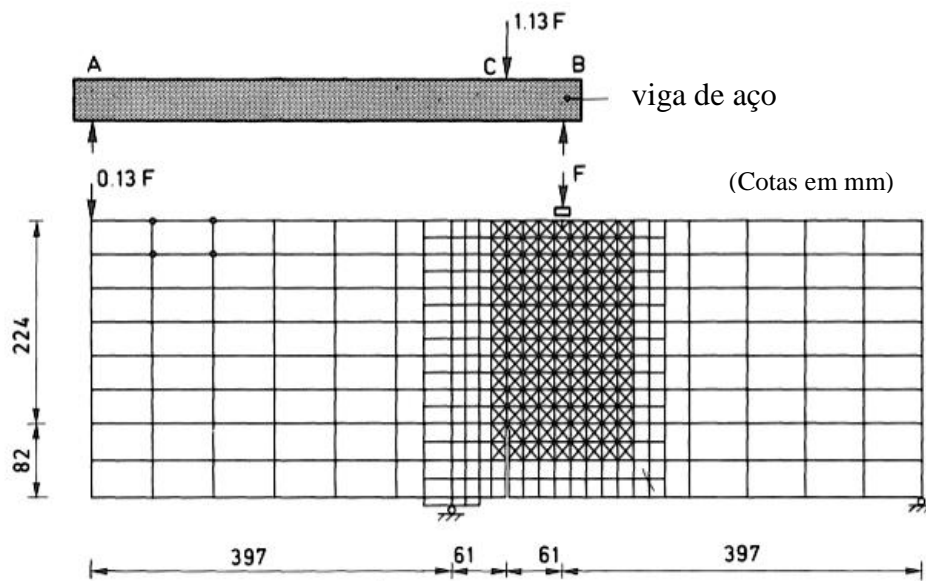
Um modelo posterior é o de Bažant e Oh (1983) que difere o de Rashid por relacionar a energia de fratura a uma largura de banda de fissuração como já foi dito no item 2.3.4.1. O modelo de largura de banda de fissuração de Bažant e Oh (1983), representa o concreto fissurado por meio de um volume representativo de largura  $h_c$ , (Figura 2-19). Esse volume representativo deve englobar a fissura, uma porção da matriz e o maior elemento não homogêneo da estrutura, o agregado graúdo. A partir desse volume representativo é possível estabelecer uma média das propriedades baseadas no comportamento macroscópico do material em função da direção da fissura (SHAH *et al*, 1995).

Para Rots e Blaauwendraad (1989), o procedimento é atrativo tanto pelo fato de não haver a necessidade de redimensionamento da malha de elementos finitos, quanto por não restringir a orientação das fissuras, bem como poder modelar o efeito da propagação sinuosa da fissura (Figura 2-21 (a) e (d)).

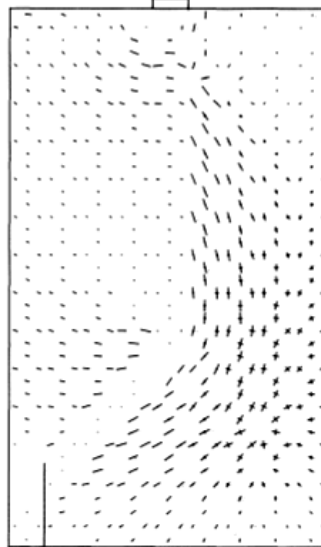
O modelo de Bažant e Oh (1983), considera a largura de banda de fissuração  $h_c$  como uma propriedade do material, entretanto essa aproximação faz a malha ser dependente da largura de banda de fissuração. Uma abordagem alternativa é relacionar a energia de fratura ao elemento finito porque para Shahet *al* (1995), quando há no concreto fissuras paralelas, densas e uniformes, a  $h_c$  deve ser menor ou igual a distância entre duas fissuras paralelas. Por isso  $h_c$  deve ser menor que a menor dimensão do elemento finito utilizado, pois, deve relacionar a energia de fratura com dimensão do elemento finito. Portanto  $h_c$  é dependente da malha e não o inverso com no modelo de Bažant e Oh (1983). Essa abordagem segundo Shahet *al* (1995), evita problemas de convergência na solução numérica com a variação da dimensão da malha.

Vários trabalhos já foram realizados utilizando esse método, como Bažant e Oh (1983), Rots e Blaauwendraad (1989) e Lima (2009). O DIANA<sup>®</sup> disponibiliza em sua estrutura o modelo de fissuração distribuída, conforme ilustrado a seguir com o auxílio

da Figura 3-2, que apresenta resultados obtidos por Rots e Blaauwendraad (1989), usando o DIANA<sup>®</sup> para simular uma viga em flexão de quatro pontos.



(a) fissuração distribuída rotacional



(b)

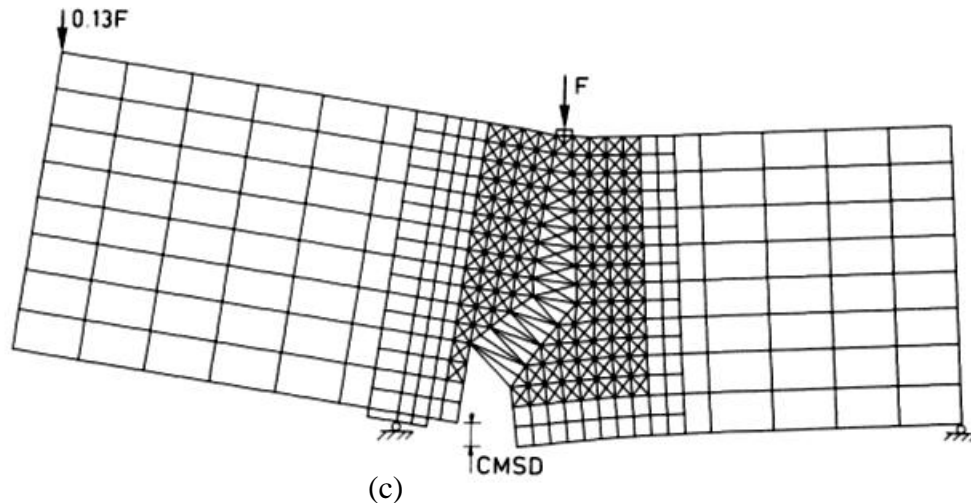


Figura 3-2 Viga em flexão de quatro pontos (a) malha de elementos finitos (b) tensões principais e travamento ao cisalhamento para a fissuração distribuída rotacional (c) deformação final (fonte: Adaptado de Rots e Blaauwendraad, 1989).

### 3.2.1 Modelo fixo de fissuração distribuída

Segundo Rots e Blaauwendraad (1989), tradicionalmente a lei de tensão-deformação para o material fissurado é dada referente aos eixos principais de ortotropia,  $\mathbf{n}, \mathbf{s}$  e  $\mathbf{t}$ , Figura 3-3, onde  $\mathbf{n}$  é a direção da normal à fissura, portanto, referente ao modo I de fissuração, e  $\mathbf{s}$  e  $\mathbf{t}$  são as direções referentes a direções tangenciais de fissuração no modo II e III. Neste contexto, as matrizes tensão-deformação completas ficam

$$\begin{bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{ss} \\ \sigma_{tt} \\ \sigma_{ns} \\ \sigma_{st} \\ \sigma_{tn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{nn} & E_{ns} & E_{nt} & 0 & 0 & 0 \\ E_{ns} & E_{ss} & E_{st} & 0 & 0 & 0 \\ E_{nt} & E_{st} & E_{tt} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{ns} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{st} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{nt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{nn} \\ \varepsilon_{ss} \\ \varepsilon_{tt} \\ \gamma_{ns} \\ \gamma_{st} \\ \gamma_{tn} \end{bmatrix} \quad (3-1)$$

Entretanto as primeiras versões eram simplificadas com o uso dos termos  $E_{nn}$ ,  $E_{ns}$ ,  $E_{nt}$ ,  $E_{nt}$ ,  $G_{ns}$  e  $G_{nt}$  iguais a zero, o que levava a tensões associadas  $\sigma_{nn}$ ,  $\sigma_{ns}$  e  $\sigma_{tn}$  zerarem após o limite de fissuração. Como expõe Rots e Blaauwendraad (1989), essa é uma aproximação muito rude do comportamento de materiais heterogêneos e levava a ampliar problemas de convergência numérica. Posteriormente, foram reinseridos os termos  $G_{ns}$ ,  $G_{nt}$  com o auxílio de uma equação de proporcionalidade com o módulo de elasticidade transversal  $G$ . Ainda segundo Rots e Blaauwendraad (1989) em 1983, Bazant e Oh reinseriram o termo  $E_{nn}$ , com o auxílio de uma equação de

proporcionalidade com o módulo de elasticidade longitudinal E. Outra modificação foi sobre os termos do módulo de rigidez transversal, que não mais zeraram, por conta da inserção da contribuição do efeito do coeficiente de Poisson no material fissurado.

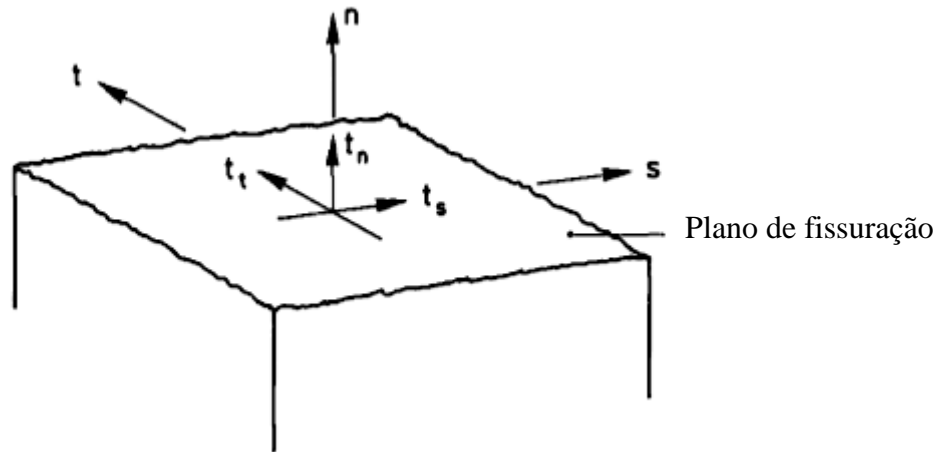


Figura 3-3 Sistema de coordenadas locais e tração através de uma fissura (fonte: Adaptado de Rots e Blaauwendraad, 1989)

Uma relação tensão-deformação para material fissurado em estado plano fica:

$$\begin{bmatrix} \Delta\sigma_{nn} \\ \Delta\sigma_{tt} \\ \Delta\sigma_{tn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mu E}{1-\nu^2\mu} & \frac{\nu\mu E}{1-\nu^2\mu} & 0 \\ \frac{\nu\mu E}{1-\nu^2\mu} & \frac{E}{1-\nu^2\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_{nn} \\ \Delta\varepsilon_{tt} \\ \Delta\gamma_{tn} \end{bmatrix} \quad (3-2)$$

onde, novamente, E é o módulo de elasticidade longitudinal,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson,  $\beta$  o fator de retenção ao cisalhamento e  $\mu$  é o fator de redução de rigidez no modo I.

### 3.2.2 Modelo fixo de fissuração distribuída com decomposição das deformações

Os modelos de fissuração distribuída com decomposição das deformações, ou modelos de deformação total de fissura, segundo o DIANA<sup>®</sup> (2012), foram desenvolvidos seguindo a Teoria de Campos de Compressão Diagonal Modificado de

Vecchio e Collins (1986) e tanto os modelos baseados na deformação total de fissura, o fixo e o rotacional, quanto o modelo multidirecional de fissuração distribuída, seguem o modelo de fissuração distribuída por energia de fratura.

As relações tensão-deformação apresentadas no tópico anterior não distinguem as deformações provenientes da fissuração distribuída, da deformação do concreto íntegro entre fissuras. Isso, segundo Rots e Blaauwendraad(1989), é um problema por não ser possível analisar os resultados de maneira transparente. Portanto, a solução é decompor as deformações globais totais  $\Delta\varepsilon$ , em deformação global de fissura  $\Delta\varepsilon^{cr}$  e deformação global do concreto íntegro entre fissuras  $\Delta\varepsilon^{co}$ .

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^{cr} + \Delta\varepsilon^{co} \quad (3-3)$$

Como relata Rots (1988), o objetivo de decompor as deformações é aproximar o conceito do modelo de fissuração distribuída do modelo de fissura discreta, que obtém o valor de abertura de fissura pela separação dos elementos finitos, bem como, aproximar dos ensaios experimentais onde pode-se monitorar a abertura de fissura. Assim, a deformação global de fissura  $\Delta\varepsilon^{cr}$ , pode ser representada por um vetor de deformação de fissura global que pode ser escrito em função de seis componentes:

$$\Delta\varepsilon^{cr} = [\Delta\varepsilon_{xx}^{cr} \quad \Delta\varepsilon_{yy}^{cr} \quad \Delta\varepsilon_{zz}^{cr} \quad \Delta\gamma_{xy}^{cr} \quad \Delta\gamma_{yz}^{cr} \quad \Delta\gamma_{zx}^{cr}]^T \quad (3-4)$$

onde  $xyz$  é o sistema de coordenadas globais e  $T$  denota a transposta do vetor.

Quando se incorpora as leis tração-deformação de fissura, é conveniente definir os eixos  $nst$  alinhados com a superfície da fissura. Definindo que  $\Delta\varepsilon^{cr}$  se refere à deformação local de fissura, o vetor pode ser escrito como

$$\Delta\varepsilon^{cr} = [\Delta\varepsilon_{nn}^{cr} \quad \Delta\gamma_{ns}^{cr} \quad \Delta\gamma_{nt}^{cr}]^T \quad (3-5)$$

onde  $\Delta\varepsilon_{nn}^{cr}$ , é a deformação em modo I normal a fissura e  $\Delta\gamma_{ns}^{cr}$  e  $\Delta\gamma_{nt}^{cr}$  são as deformações do modo II e III, respectivamente. Como informa Rots (1988), as três outras componentes do sistema local não têm sentido físico e podem ser omitidas.

A relação entre as deformações globais e locais pode ser obtida por uma matriz de transformação linear  $\mathbf{N}$ :

$$\Delta \epsilon^{cr} = \mathbf{N} \Delta \epsilon^{cr} \quad (3-6)$$

A principal característica dessa matriz transformação para o modelo de fissuração fixa é o fato de permanecer constante após a fissuração. Para um modelo tridimensional essa matriz pode ser escrita como:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} l_x^2 & l_x l_y & l_z l_x \\ m_x^2 & m_x m_y & m_z m_x \\ n_x^2 & n_x n_y & n_z n_x \\ 2l_x m_x & l_x m_y + l_y m_x & l_z m_x + l_x m_z \\ 2m_x n_x & m_x n_y + m_y n_x & m_z n_x + m_x n_z \\ 2n_x l_x & n_x l_y + n_y l_x & n_z l_x + n_x l_z \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

onde  $l_x$ ,  $m_x$  e  $n_x$  são os cossenos diretores do eixo de coordenada local  $\mathbf{n}$  em relação ao sistema global, bem como os subscritos  $y$  e  $z$  indicam os cossenos diretores para os eixos locais  $s$  e  $t$  respectivamente. Portanto, pode-se definir para o sistema local os incrementos de tensão sobre as fissuras pela expressão

$$\Delta t^{cr} = [\Delta t_n^{cr} \quad \Delta t_s^{cr} \quad \Delta t_t^{cr}]^T \quad (3-8)$$

onde  $\Delta t_n^{cr}$  indica o incremento de tensão normal de tração no modo I e  $\Delta t_s^{cr}$  e  $\Delta t_t^{cr}$  são os incrementos de tensões cisalhantes no modo II e III, respectivamente. Usando a matriz de transformação é possível estabelecer a relação entre as tensões locais  $\Delta t^{cr}$ , e globais  $\Delta \sigma$  como

$$\Delta t^{cr} = \mathbf{N}^T \Delta \sigma \quad (3-9)$$

Para continuar o estudo do modelo é necessário haver um modelo constitutivo para o concreto íntegro e um para o concreto fissurado. Para o concreto íntegro entre fissuras, a equação tem a seguinte estrutura

$$\Delta \sigma = \mathbf{D}^{co} \Delta \epsilon^{co} \quad (3-10)$$

para  $\mathbf{D}^{co}$  a matriz rigidez para concreto íntegro entre fissuras.

Ao relacionar a deformação de fissura no sistema de coordenadas locais com as tensões locais, obtêm-se:

$$\Delta t^{cr} = \mathbf{D}^{cr} \Delta e^{cr} \quad (3-11)$$

sendo que a matriz  $\mathbf{D}^{cr}$ , agrupa o modo I, II e III, bem como seus respectivos acoplamentos do modo misto de carregamento, para as propriedades da fissura.

Algumas relações úteis podem ser obtidas ao combinar as Eqs. (3-3), (3-6), (3-9), (3-10) e (3-11). Assim a relação tensão-deformação para o concreto fissurado em relação ao sistema de coordenadas globais pode ser desenvolvido, substituindo a Eq. (3-3) na Eq. (3-6) e em seguida Eq. (3-3) em (3-10).

$$\Delta \sigma = \mathbf{D}^{co} [\Delta \varepsilon - \mathbf{N} \Delta e^{cr}] \quad (3-12)$$

Pré-multiplicando por  $\mathbf{N}^T$  a Eq. (3-12) e substituindo a relação tensão-deformação de fissura [Eq. (3-11)] e a relação entre as tensões locais e globais na equação Eq. (3-12) obtêm-se a relação entre as deformações locais de fissura e as deformações globais.

$$\Delta e^{cr} = [\mathbf{D}^{cr} + \mathbf{N}^T \mathbf{D}^{co} \mathbf{N}]^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{D}^{co} \Delta \varepsilon \quad (3-13)$$

Por fim pode ser obtida a relação entre as tensões globais e as deformações globais substituindo a Eq. (3-13) na Eq. (3-12)

$$\Delta \sigma = \left[ \mathbf{D}^{co} - \mathbf{D}^{co} \mathbf{N} [\mathbf{D}^{cr} + \mathbf{N}^T \mathbf{D}^{co} \mathbf{N}]^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{D}^{co} \right] \Delta \varepsilon \quad (3-14)$$

Para estudo em processos incrementais, Rots (1988), expõe que haverá dois problemas. O primeiro que os resultados da Eq. (3-14) ficarão linearizados ao redor do estado de início de fissuração, portanto os incrementos de tensão calculados apenas convergem para a solução se  $\mathbf{D}^{co}$  e  $\mathbf{D}^{cr}$  permanecerem constantes durante o incremento de deformação. Como ambas as matrizes podem ser não constantes, se



houverplasticação do concreto ou ativação das funções não-lineares de fratura, a Eq. (3-14) serve apenas como uma aproximação de primeira ordem.

Portanto, uma correção na lei constitutiva é necessária ou para o concreto íntegro ou para a tensão-deformação de fissura. Como o foco é a Mecânica da Fratura, apenas o  $\mathbf{D}^{cr}$  é estudado e uma forma de contornar é usando laços internos para repetir a resolução das Eqs. (3-12) e (3-13) usando o módulo secante de rigidez de fissura e seguindo como o modelo tangente de rigidez de fissura.

O segundo problema é relacionado a variações no estado do sólido devido ao surgimento, propagação e fechamento de fissuras. Quando os critérios para início, propagação e fechamento de fissura são ativados, a deformação incremental global  $\Delta\epsilon$  deve ser dividida em deformação de pré-transição  $\Delta\epsilon^a$  e deformação de pós-transição  $\Delta\epsilon^b$ :

$$\Delta\epsilon = \Delta\epsilon^a + \Delta\epsilon^b \quad (3-15)$$

Assim as tensões podem ser escritas em função das deformações de transição. Por exemplo, quando o concreto muda do estado não fissurado para o fissurado, isso é caracterizado em duas situações: primeiro quando o concreto íntegro fissura; segundo quando uma fissura totalmente fechada reabre:

$$\Delta\sigma = \mathbf{D}^{co} \Delta\epsilon^a + \mathbf{D}^{crco} \Delta\epsilon^b \quad (3-16)$$

onde

$$\mathbf{D}^{crco} = \left[ \mathbf{D}^{co} - \mathbf{D}^{co} \mathbf{N} \left[ \mathbf{D}^{cr} + \mathbf{N}^T \mathbf{D}^{co} \mathbf{N} \right]^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{D}^{co} \right] \quad (3-17)$$

Ainda quando se passa do estado fissurado para o estado não fissurado, por fechamento de uma fissura:

$$\Delta\sigma = \mathbf{D}^{crco} \Delta\epsilon^a + \mathbf{D}^{co} \Delta\epsilon^b \quad (3-18)$$

Os critérios de fechamento e abertura de fissura são definidos em função das deformações totais locais de fissura ou das tensões totais locais de fissura. Como para o

modelo fixo de fissuração distribuída, a direção local das fissuras permanece inalterada e a quantificação da fissuração é rapidamente avaliada pelo somatório acumulado dos incrementos. Esse conceito é uma característica de destaque do modelo fixo de fissuração distribuída e é nomeado como memória permanente da orientação do dano (Rots, 1988).

Para a aplicação do modelo o DIANA<sup>®</sup> assume que, assim que a tensão principal exceder um limite, uma fissura deve surgir. Com a progressão do estado tensional pós fissura a mesma não mudará sua direção, portanto, haverá um desalinhamento da direção das tensões principais com as deformações principais. Só será criada uma nova fissura se a direção da tensão principal for perpendicular à direção da fissura inicial. Entretanto, a memória do dano da fissura anterior é totalmente apagada e dá início a degeneração da rigidez na nova direção como se o material no ponto estivesse totalmente íntegro. Essa suposição é plausível do ponto de vista que uma fissura não interfere significativamente na rigidez do material na direção do plano da fissura, entretanto, apagar a memória da danificação após o surgimento da nova fissura não teria efeito de fechamento na fissura inicial, que pode causar discrepâncias se houver uma reabertura da fissura inicial.

### 3.2.3 Modelo multidirecional de fissuração distribuída

Para Rots (1988) um meio avançado de análise é decompor a deformação total em deformação no concreto, e em deformação de fissura, e ainda, permitir a sub-decomposição destas. Como a sub-decomposição da deformação do concreto íntegro não é relevante, assim só será levada em consideração a deformação de fissura, que deve ser separada em várias contribuições para as multidireções de fissura, que podem ocorrer em um ponto de estudo.

$$\Delta \varepsilon^{cr} = \Delta \varepsilon_1^{cr} + \Delta \varepsilon_2^{cr} + \Delta \varepsilon_3^{cr} + \dots \quad (3-19)$$

onde  $\Delta \varepsilon_1^{cr}$  é o incremento de deformação global de fissura devido a primeira fissura e assim sucessivamente.

Segundo Rots (1988), a ideia do modelo multidirecional é que, para cada fissura fixa, é atribuído seu próprio vetor de deformação local de fissura  $e_i^{cr}$ , seu próprio vetor

de tração  $t_i^{cr}$  e sua própria matriz de transformação  $N_i$  de acordo com as Eqs. (3-5), (3-8) e (3-7) respectivamente. Por conveniência é possível alocar todas essas em vetores e matrizes únicas.

$$\Delta \hat{\epsilon}^{cr} = [\Delta \hat{\epsilon}_1^{cr} \quad \Delta \hat{\epsilon}_2^{cr} \quad \Delta \hat{\epsilon}_3^{cr} \quad \dots]^T \quad (3-20)$$

$$\Delta \hat{t}^{cr} = [\Delta \hat{t}_1^{cr} \quad \Delta \hat{t}_2^{cr} \quad \Delta \hat{t}_3^{cr} \quad \dots]^T \quad (3-21)$$

$$\hat{N} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad \dots]^T \quad (3-22)$$

onde  $\hat{\epsilon}$  denota a montagem para o modelo multidirecional de fissura.

Para obter a deformação global ou deformação equivalente de múltipla fissura, pode-se usar a matriz de transformação multidirecional, substituindo a Eq. (3-6) na Eq. (3-19). Assim

$$\Delta \epsilon^{cr} = \hat{N} \Delta \hat{\epsilon}^{cr} \quad (3-23)$$

De forma análoga para a relação em uma fissura para tração-deformação local Eq. (3-11), pode-se expandir para a relação equivalente de múltipla fissura por

$$\Delta \hat{t}^{cr} = \hat{N}^{cr} \Delta \hat{\epsilon}^{cr} \quad (3-24)$$

ou na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \Delta \hat{t}_1^{cr} \\ \Delta \hat{t}_2^{cr} \\ \Delta \hat{t}_3^{cr} \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^{cr} & D_{12}^{cr} & D_{13}^{cr} & \dots \\ D_{21}^{cr} & D_{22}^{cr} & D_{23}^{cr} & \dots \\ D_{31}^{cr} & D_{32}^{cr} & D_{33}^{cr} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \epsilon_1^{cr} \\ \Delta \epsilon_1^{cr} \\ \Delta \epsilon_1^{cr} \\ \dots \end{bmatrix} \quad (3-25)$$

Análogo ao que foi feito para o modelo fixo de fissuração distribuída, pode-se obter a relação tensão-deformação global para o modelo multidirecional.

$$\Delta \sigma = \left[ \mathbf{D}^{co} - \mathbf{D}^{co} \hat{N} \left[ \hat{\mathbf{D}}^{cr} + \hat{N}^T \mathbf{D}^{co} \hat{N} \right]^{-1} \hat{N}^T \mathbf{D}^{co} \right] \Delta \epsilon \quad (3-26)$$

Para Rots (1988), é importante ressaltar que a análise de mudança de estados que ocorrem com a abertura, fechamento e reabertura da fissura também é válida para o modelo multidirecional e deve ser considerada para cada fissura em um mesmo ponto de estudo separadamente. Para isso a magnitude do incremento de deformação de pré-transição  $\Delta\varepsilon^a$ , deve ser dimensionada para que satisfaça as três condições de abertura, fechamento e reabertura, com razoável precisão.

A mudança de estado de uma fissura provoca alteração de estado em outras; por exemplo: se uma fissura nova se abre em um ponto a fissura pré-existente tende a fechar. As regras para o modelo são, que quando várias fissuras se abrem em um mesmo incremento de deformação, a de maior magnitude é tratada como a principal e as outras serão regidas pelo incremento de deformação de pós-transição  $\Delta\varepsilon^b$ . É possível também, que para casos particulares seja necessário priorizar a fissura principal e deixar a mudança de estado das outras fissuras para o próximo incremento. A priorização da fissura principal não é consistente e deve ser evitado, pois, o estado tensional pode evoluir e produzir deformações de fissuras temporariamente negativas, o que é fisicamente sem significado (ROTS, 1988).

O significado do modelo multidirecional de fissuração distribuída só é apreciável em estados biaxiais e triaxiais de tensão. Uma importante aplicação desse modelo é estudar estados mistos de tração e cisalhamento. Quando, por exemplo, uma viga está sujeita a estados biaxiais de tensão devido à flexão, poderá haver fissuração por conta da atuação da tração e do cisalhamento, modo I e II, respectivamente. Em um mesmo ponto a progressão da fissura leva-a a atuar em modo misto.

Este comportamento evidencia a variação de ângulo entre os eixos principais de tensão e de deformação após a fissura. Demonstrando uma disparidade ao uso do modelo fixo de fissuração distribuída, corroborando para a importância do uso de modelos que acompanhem essa variação, quando essa é acentuada. Entretanto, o modelo rotacional de fissuração distribuída que é apresentado a seguir no item 3.2.4, modelo que mantém as fissuras coaxiais, considera uma única fissura em cada ponto, assim, desconsiderando totalmente a perda de rigidez da fissura na direção anterior (ROTS, 1988).

Portanto, o modelo multidirecional de fissuração distribuída é uma alternativa importante, mesmo gerando equações muito mais complexas que os outros modelos como o rotacional, o mais simples por exigir uma matriz de transformação única e constante. Mais simples também que o modelo fixo que igualmente ou rotacional solicita

uma única matriz de transformação, entretanto, variável, por depender dos cossenos diretores da direção local da fissura em relação à direção global.

As premissas deste modelo para o DIANA<sup>®</sup> são: poderá haver ângulo de inclinação entre as tensões principais e as deformações principais e, várias fissuras podem existir em um ponto de estudo respeitando um determinado ângulo limite  $\alpha$ , como simplificado na Figura 3-4. Para estabelecer o surgimento de fissuras seguem-se dois limites: se a tensão principal exceder a tensão limite estabelecida; e, no segundo se o ângulo limite for vencido. Deve-se notar que após o surgimento da primeira fissura, Rots (1988) constatou que, enquanto o ângulo limite não é vencido, a tensão pode atingir valores até três vezes maior que o valor limite.

Para a múltipla fissuração e em estruturas de concreto, considerando-se, em um mesmo ponto a energia liberada final não deve exceder a energia contida no elemento finito. Portanto, é necessário estabelecer condições mais brandas para o limite de tensão nas fissuras subsequentes.

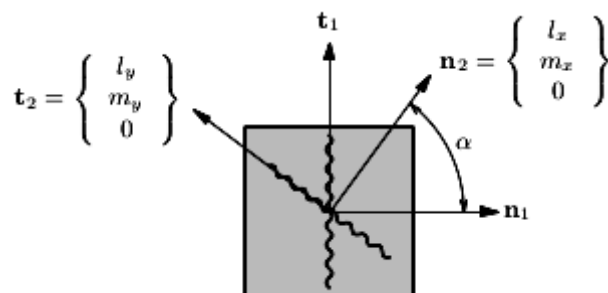


Figura 3-4 Modelo multidirecional de fissuração distribuída (fonte: DIANA<sup>®</sup>, 2012)

A Figura 3-5 apresenta a memória de transferência de modo I para o modelo multidirecional de fissuração distribuída, e a avaliação da energia e a tensão de pico para cada incremento no número de fissuras.

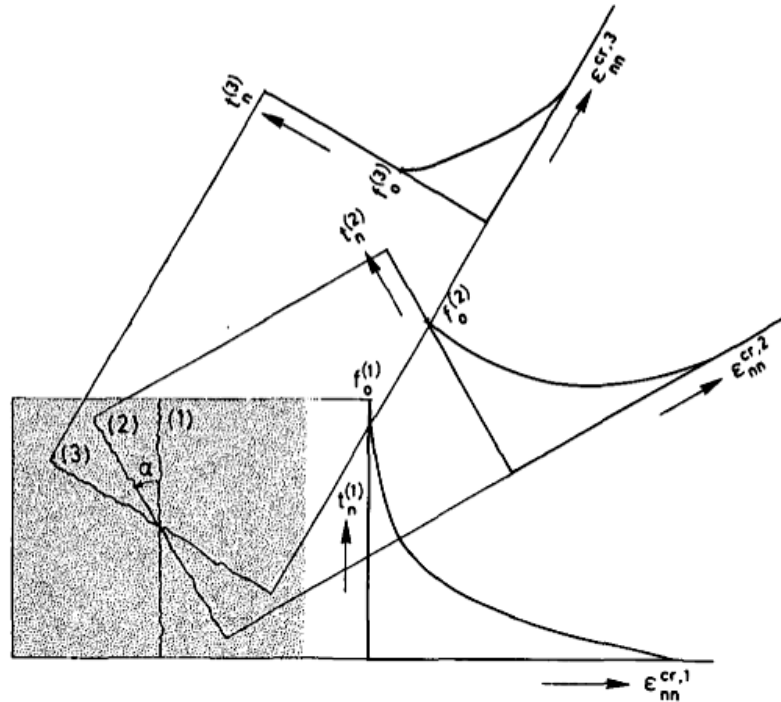


Figura 3-5 Memória de transferência em modo I de amolecimento para o modelo multidirecional de fissuração distribuída (fonte: Rots, 1988)

A cada incremento, a energia disponível para ser consumida é igual à energia total, menos a energia consumida pela fissura anterior. Portanto, a energia de fratura consumida,  $g_f$ , pelo sistema de  $n$  fissuras em fechamento é assim avaliada:

$$g_f = h \sum_{i=1}^{i=n} \int_0^{\epsilon_{nn}^{cl,i}} t_n^i d\epsilon_{nn}^{cl,i} \quad (3-27)$$

onde  $\epsilon_{nn}^{cr,i}$  é a deformação normal da fissura  $i$ ,  $\epsilon_{nn}^{cl,i}$  é a deformação normal da fissura  $i$  em fechamento,  $t_n^i$  é a tração normal à fissura  $i$  e  $h$  é a largura de banda de fissuração que é assumida igual para todas as fissuras.

Para cada nova fissura um novo patamar de tensão limite é definido. O valor da tensão limite é calculado utilizando a energia de fratura restante. Para um modelo de amolecimento a tração pré-definido, a função geral que representa o diagrama de amolecimento é assumido como constante durante a múltipla fissuração, sendo possível então, obter a nova tensão limite. Por exemplo, se assumido que o modelo de amolecimento será linear a função de redução de tensão limite pode ser dada pela equação(3-28).

$$f_t = \sqrt{2 \frac{G_f^I E}{h}} \quad (3-28)$$

onde  $f_t$  é a tensão limite  $G_f^I$  é a energia de fratura restante.

As equações para redefinição dos novos parâmetros, para a múltipla fissuração, são os mesmos que definem os parâmetros iniciais, e que dependerão do modelo de amolecimento pré-definido pelo usuário, assim como será exposto no item 4.1.4 mais a frente neste trabalho.

### 3.2.4 Modelo rotacional de fissuração distribuída

O modelo rotacional de fissuração distribuída considera que a matriz de transformação é única e constante, o que implica em, as tensões principais de fissuração e as deformações principais de fissuração estarão sempre alinhadas. Essa aproximação, segundo Rots (1988), é interessante por permitir obter, sem o uso de artifícios, o gráfico tensão-deformação para os eixos principais. Outra vantagem do modelo em comparação aos modelos fixo e multidirecional de fissuração distribuída, é sua simples implementação, por gerar equações simplificadas.

Para Bažant e Oh (1983) deve haver cautela ao se usar essa aproximação, pois, o material assumido como ortotrópico geralmente implica em não alinhamento entre as tensões e deformações principais. Por conta disso, o uso da curva tensão-deformação das tensões e deformações principais se torna inconsistente, comparado ao fenômeno real.

Será então feita algumas considerações sobre a aplicação do modelo apresentando uma importante condição que impõe a tensão e a deformação principal serem coaxiais. Assim, considerando uma configuração bidimensional, e as direções principais sendo nomeadas como 1 e 2, em um material ortotrópico com a tensão e a deformação inicialmente alinhadas. De acordo com o círculo de Mohr para a deformação, um pequeno incremento de deformação cisalhante faz a direção principal de deformação girar um ângulo  $\Delta\theta_e$ , conforme

$$\tan 2\Delta\theta_\varepsilon = \frac{\Delta\gamma_{12}}{2(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})} \quad (3-29)$$

se  $|\Delta\gamma_{12}| \ll |(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})|$ . Onde  $\Delta\gamma_{12}$  é o incremento de deformação cisalhante nos eixos de referência 1 e 2, e  $\varepsilon_{11}$  e  $\varepsilon_{22}$  são as deformações principais. Analogamente pode ser obtido para a tensão  $\Delta\theta_\sigma$

$$\tan 2\Delta\theta_\sigma = \frac{\Delta\tau_{12}}{(\sigma_{11}-\sigma_{22})} \quad (3-30)$$

se  $|\Delta\tau_{12}| \ll |(\sigma_{11}-\sigma_{22})|$ . Onde  $\Delta\tau_{12}$  é o incremento de tensão cisalhante nos eixos de referência 1 e 2, e  $\sigma_{11}$  e  $\sigma_{22}$  são as tensões principais.

Segundo Rots (1988), para preservar o alinhamento entre a tensão e deformação principal é necessário que  $\Delta\theta_\varepsilon = \Delta\theta_\sigma$ . A condição é satisfeita se o módulo de elasticidade transversal for

$$G_{12} = \frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22})}{2(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})} \quad (3-31)$$

Assim para um estado tridimensional a forma do sistema tensão-deformação principal 1 2, a Eq. (3-1) pode ser escrita para a matriz constitutiva do modelo rotacional de fissura distribuída como

$$\begin{bmatrix} \Delta\sigma_{11} \\ \Delta\sigma_{22} \\ \Delta\sigma_{33} \\ \Delta\sigma_{12} \\ \Delta\sigma_{23} \\ \Delta\sigma_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{11}} & \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{22}} & \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\varepsilon_{11}} & \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\varepsilon_{22}} & \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\varepsilon_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial\varepsilon_{11}} & \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial\varepsilon_{22}} & \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial\varepsilon_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(\sigma_{11}-\sigma_{22})}{2(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(\sigma_{22}+\sigma_{33})}{2(\varepsilon_{22}-\varepsilon_{33})} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(\sigma_{33}+\sigma_{11})}{2(\varepsilon_{33}-\varepsilon_{11})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_{11} \\ \Delta\varepsilon_{22} \\ \Delta\varepsilon_{33} \\ \Delta\gamma_{12} \\ \Delta\gamma_{23} \\ \Delta\gamma_{31} \end{bmatrix} \quad (3-32)$$



Para aplicação do modelo rotacional ao DIANA<sup>®</sup> assume-se que deverá iniciar uma fissura assim que a tensão limite de resistência à tração do material for atingida. Entretanto, diferente do modelo fixo, a fissura iniciada mudará sua direção, acompanhando a direção da tensão principal, isso por que se estabelece que  $\Delta\theta_\varepsilon = \Delta\theta_\sigma$ , eliminando as deformações por cisalhamento. Deste modo, para o modelo rotacional o DIANA<sup>®</sup> assume que o valor da retenção ao cisalhamento,  $\beta$ , é igual a 1.

O ângulo limite para o modelo rotacional é assumido como 0 (zero), entretanto, é errado concluir que no DIANA<sup>®</sup> aplicar 0(zero) ao ângulo limite, no modelo multidirecional, reduziria-o para o modelo rotacional. Segundo Rots (1988), para que isso seja verdade devem ser cumpridas algumas condições:

- A condição de ângulo limite é a única condição de controle para a direção de fissura, sem que seja necessário atingir a máxima tensão limite;
- As fissuras anteriores devem ser rigorosamente inativas e apagadas da memória, e sua influência sobre a nova fissura. Assim uma única fissura ativa deve existir no ponto;
- A lei tração x deformação da fissura ativa deve considerar que a memória do defeito anterior seja contabilizada a nova fissura, e que o efeito do cisalhamento não provoque distorções, ou seja, não invalide a condição de alinhamento dos eixos principais.

## 4 DIANA

O *software* comercial DIANA<sup>®</sup> (nome derivado da junção das iniciais **D**isplacement**A**nalysis), da TNO foi o programa utilizado na presente dissertação por ter grande aporte teórico para estudo de comportamento de estruturas, principalmente com foco em concreto. O programa é uma das melhores ferramentas de análise em elementos finitos do mercado, aplicando teorias para estudo de não linearidade física do concreto que vão da Plasticidade a Mecânica da Fratura.

O mesmo tem suporte para definição de reforços para o concreto de forma incorporada, e discreta, bem como modelos constitutivos não-lineares para o reforço. O concreto pode ser descrito por vários modelos de compressão e de tração a exemplo de linear, elastoplástico perfeito, frágil, Hordijk, entre outros. Há ainda grande aporte de elementos finitos uni, bi e tridimensionais, desde elementos de barras, vigas, cascas, elementos de interface até elementos sólidos. Cabe destacar também que para representar a não linearidade física do concreto, a partir da Mecânica da Fratura, é possível aplicar na modelagem fissuras discretas ou fissuração distribuída.

### 4.1 APLICAÇÃO DOS MODELOS DE FISSURAÇÃO DISTRIBUÍDA NO DIANA

#### 4.1.1 Modelo fixo de fissuração distribuída para o DIANA<sup>®</sup>

Para o estudo estático não linear físico é possível utilizar dois métodos para o comportamento do material. O primeiro segue as normatizações estabelecidas pelo CEB-FIP 1990, e ao usuário só é dada a opção de escolher a classe do concreto utilizado e o diâmetro máximo do agregado. No segundo o usuário insere dados para definir características por meio de alguns modelos, os quais são; a tração, elástico, elastoplástico perfeito, frágil, linear, exponencial, o modelo de Cornelissen, Hordijk, e Reinhardt (1986) nomeado de modelo de Hordijk e por fim o multilinear, sendo que, neste último o usuário deve inserir através de uma folha de dados, a curva tensão-deformação do material, normalmente obtida por meio de ensaios experimentais. Para a compressão há suporte para modelos elástico, elasto-plástico, Thorenfeldt, linear com endurecimento, multilinear, saturação e parabólico.

Em seguida deve ser estabelecido o modelo para o comportamento em confinamento, e se há ou não efeito de confinamento lateral na estrutura. E por fim o comportamento ao cisalhamento, que é definido pelo fator beta, que pode ser constante, variável ou multilinear e um modelo de redução da rigidez cisalhante com a mesma regra aplicada a rigidez normal após o limite de tensão, nomeado de dano baseado na retenção ao cisalhamento, que também deve ser adicionado pelo usuário por meio de um arquivo externo.

#### 4.1.2 Modelo multidirecional de fissuração distribuída para o DIANA®

Para o estudo estático não linear do material, em regime de modelo multidirecional de fissuração distribuída, é necessário definir primeiramente entre dois critérios para início da fissuração: o primeiro: denominado constante, Figura 4-1, estabelece que a fissuração inicie quando a tensão principal exceder o limite de resistência à tração  $f_t$ ; o segundo é utilizado para simular confinamentos laterais, e nesse caso a tensão principal deve exceder o limite  $f$  antes de iniciar a fissuração, qual seja:

$$f_t < f < \left(1 + \frac{\sigma_{\text{lateral}}}{f_c}\right) \quad (4-1)$$

onde  $\sigma_{\text{lateral}}$  é a tensão principal lateral e  $f_c$  é a tensão de resistência a compressão.

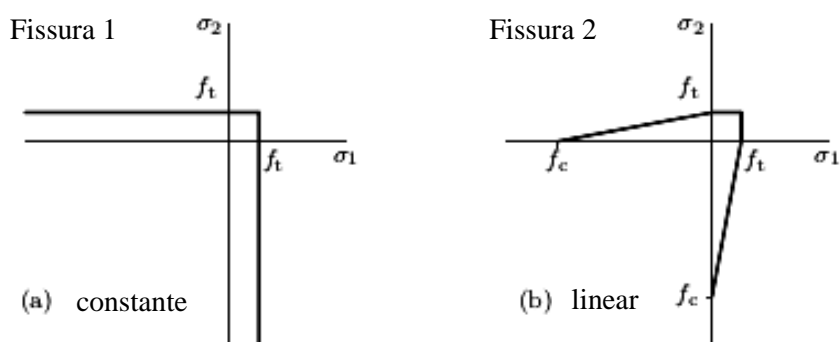


Figura 4-1 Tensão limite em espaço de tensão principal bidimensional (fonte: Adaptado de, DIANA®, 2012)

Em seguida deve ser estabelecido o modelo para o comportamento à tração que pode ser frágil, linear, multilinear, Moelands e Hordijk. Mais adiante deve ser definido o comportamento ao cisalhamento, que é dado pelo fator de retenção de cisalhamento  $\beta$ ,

podendo ser total, onde não há redução do módulo de cisalhamento ou constante, com a multiplicação de uma equação constante ao módulo de cisalhamento. Para o comportamento à compressão há suporte para o linear elástico e para modelos da plasticidade isotrópica, de Von Mises, Tresca, Mohr e Drucker-Prager, todos associados a modelos de plasticidade com endurecimento ou elastoplástico perfeito.

#### 4.1.3 Modelo rotacional de fissuração distribuída para o DIANA<sup>®</sup>

Para a aplicação do modelo rotacional de fissuração distribuída em estudo estático não linear físico, dispõe-se dos mesmos modelos de comportamento do material que o modelo fixo de fissuração distribuída, item 4.1.1. Exceto que, não há modelos disponíveis para definição, pelo usuário, do parâmetro de retenção ao cisalhamento, assumido como total, ou seja, sem degradação da rigidez transversal.

#### 4.1.4 Relações de amolecimento a tração

Segundo o manual do DIANA<sup>®</sup> (2012), a relação tensão de fissura  $\sigma_{nn}^{cr}$  e a deformação de fissura  $\varepsilon_{nn}^{cr}$ , podem ser escritas como

$$\sigma_{nn}^{cr}(\varepsilon_{nn}^{cr}) = f_t y \left( \frac{\varepsilon_{nn}^{cr}}{\varepsilon_{nn.ult}^{cr}} \right) \quad (4-2)$$

onde  $f_t$  é a resistência a tração,  $\varepsilon_{nn.ult}^{cr}$  é a deformação última de fissura e  $y$  é a função que descreve o diagrama do comportamento de amolecimento.

Se o comportamento de amolecimento está relacionado com o modo I da energia de fratura,  $G_f^I$ , e for escrita em função da largura de banda de fissuração  $h$ , pode-se definir a seguinte relação:

$$G_f^I = h \int_{\varepsilon_{nn}^{cr}=0}^{\varepsilon_{nn}^{cr}=\infty} \sigma_{nn}^{cr}(\varepsilon_{nn}^{cr}) d\varepsilon_{nn}^{cr} \quad (4-3)$$

Substituindo a Eq. (4-2) na Eq. (4-3) e trabalhando a mesma têm-se:

$$G_f^I = hf_t \int_{\varepsilon_{nn}^{cr}=0}^{\varepsilon_{nn}^{cr}=\infty} y\left(\frac{\varepsilon_{nn}^{cr}}{\varepsilon_{nn,ult}^{cr}}\right) d\varepsilon_{nn}^{cr} \quad (4-4)$$

onde  $y$  é a função geral que representa o diagrama de amolecimento. A integral pode ser substituída pelo fator  $\alpha$

$$\alpha = \int_0^{\infty} y(x) dx \quad (4-5)$$

Para a forma da função que descreve o amolecimento  $y$ , o DIANA<sup>®</sup> permite vários modelos dependendo também do modelo de fissuração distribuída escolhido.

#### 4.1.4.1 Modelo de amolecimento frágil à tração

Caracterizada pela queda brusca da tensão pós-pico, Figura 4-2, a energia dissipada envolve apenas a deformação pré-pico,  $\varepsilon_{nn}^{peak}$ , e a largura de banda de fissuração  $h$ .

$$G_f = \frac{1}{2} f_t \varepsilon_{nn}^{peak} h \quad (4-6)$$

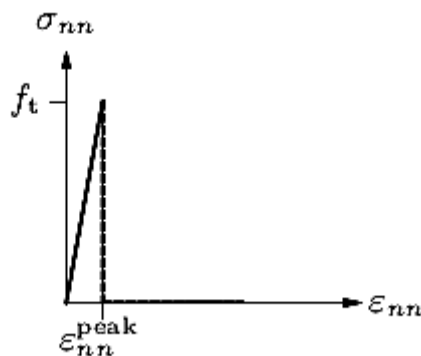


Figura 4-2 Comportamento frágil de fratura (fonte: DIANA<sup>®</sup>, 2012)

Como antes do pico toda a deformação existente é elástica a deformação de pico  $\varepsilon_{nn}^{peak}$ , é igual  $f_t/E$ .

#### 4.1.4.2 Modelo de amolecimento linear a tração

Para o modelo linear de amolecimento a tração, Figura 4-3, a relação da tensão de fissura é dada por:

$$\frac{\sigma_{nn}^{cr}(\varepsilon_{nn}^{cr})}{f_t} = \begin{cases} 1 - \frac{\varepsilon_{nn}^{cr}}{\varepsilon_{nn.ult}^{cr}} & \text{se } 0 < \varepsilon_{nn}^{cr} < \varepsilon_{nn.ult}^{cr} \\ 0 & \text{se } \varepsilon_{nn.ult}^{cr} < \varepsilon_{nn}^{cr} < \infty \end{cases} \quad (4-7)$$

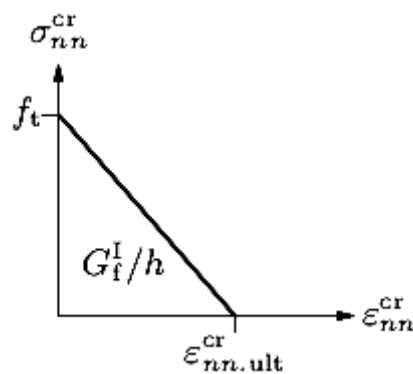


Figura 4-3 Comportamento linear de fratura (fonte: DIANA®, 2012)

A deformação última de fissura do modelo é dada pela equação

$$\varepsilon_{nn.ult}^{cr} = 2 \frac{G_f}{hf_t} \quad (4-8)$$

#### 4.1.4.3 Modelo de amolecimento multilinear a tração

O modelo multilinear é completamente definido pelo usuário, através do conjunto de pontos indicado na Figura 4-4:

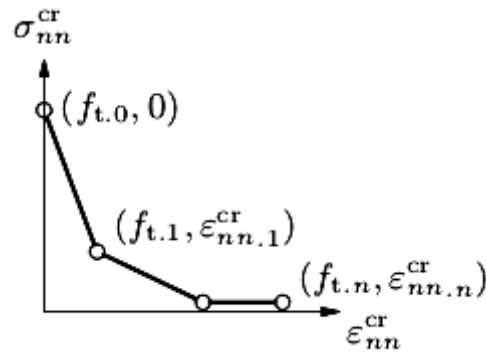


Figura 4-4 Comportamento multilinear de fratura (fonte: DIANA®, 2012)

A única restrição é que a inclinação do amolecimento inicial deve seguir a seguinte regra:

$$\frac{f_{t.1} - f_{t.0}}{\varepsilon_{nn.1}^{cr}} \geq -E \quad (4-9)$$

Isso porque, inclinações mais acentuadas que a rigidez elástica podem provocar *snap-back*, fenômeno onde as deformações inicialmente crescentes em um dado ponto tornam-se decrescentes, com conseqüente fuga da resposta das equações da Mecânica da Fratura. Há de ressaltar que, de acordo com a representação apresentada na Figura 4-4, o usuário deve subtrair as deformações elásticas das deformações a serem inseridas.

#### 4.1.4.4 Modelo de amolecimento não linear a tração de Moelands e Reinhardt

O modelo de amolecimento proposto por Moelands e Reinhardt, é uma modificação do modelo linear de amolecimento a partir da regra a seguir

$$\frac{\sigma_{nn}^{cr}(\varepsilon_{nn}^{cr})}{f_t} = \begin{cases} 1 - \left( \frac{\varepsilon_{nn}^{cr}}{\varepsilon_{nn.ult}^{cr}} \right)^{c_1} & \text{se } 0 < \varepsilon_{nn}^{cr} < \varepsilon_{nn.ult}^{cr} \\ 0 & \text{se } \varepsilon_{nn.ult}^{cr} < \varepsilon_{nn}^{cr} < \infty \end{cases} \quad (4-10)$$

onde  $c_1=0,31$  e o fator  $\alpha$  para a deformação última  $\varepsilon_{nn.ult}^{cr}$ , descreve a Figura 4-5.

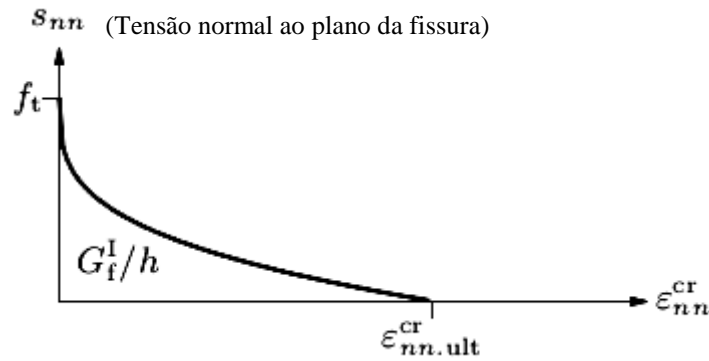


Figura 4-5 Comportamento não linear de amolecimento de Moelands (fonte: DIANA<sup>®</sup>, 2012)

A deformação última para o modelo Moelands e Reinhardt é dada por

$$\epsilon_{nn.ult}^{cr} = 4.226 \frac{G_f}{hf_t} \quad (4-11)$$

#### 4.1.4.5 Modelo de amolecimento não linear a tração de Hordijk

Segundo o DIANA<sup>®</sup> (2012), Cornelissen, Hordijk, e Reinhardt (1986), propuseram uma expressão para o modelo de comportamento de concreto, que também sempre resulta em tensões de fissuras iguais a zero para a deformação última,  $\epsilon_{nn.ult}^{cr}$ , e a função é descrita por

$$\frac{\sigma_{nn}^{cr}(\epsilon_{nn}^{cr})}{f_t} = \begin{cases} \left(1 + \left(c_1 \frac{\epsilon_{nn}^{cr}}{\epsilon_{nn.ult}^{cr}}\right)^3\right) \exp\left(-c_2 \frac{\epsilon_{nn}^{cr}}{\epsilon_{nn.ult}^{cr}}\right) \dots & \\ - \frac{\epsilon_{nn}^{cr}}{\epsilon_{nn.ult}^{cr}} (1+c_1^3) \exp(-c_2) & \text{se } 0 < \epsilon_{nn}^{cr} < \epsilon_{nn.ult}^{cr} \\ 0 & \text{se } \epsilon_{nn.ult}^{cr} < \epsilon_{nn}^{cr} < \infty \end{cases} \quad (4-12)$$

onde os parâmetros foram definidos experimentalmente por Cornelissen, Hordijk, e Reinhardt (1986); para concreto de densidade normal  $c_1=3$  e  $c_2=6.93$ . Para concreto leve, que o ensaiado pelos autores se caracterizou por substituir o agregado graúdo por agregado leve, e apresentou uma densidade de  $1260 \text{ kg/m}^3$  sendo indicados os valores  $c_1=1$  e  $c_2=5.64$ , Figura 4-6.



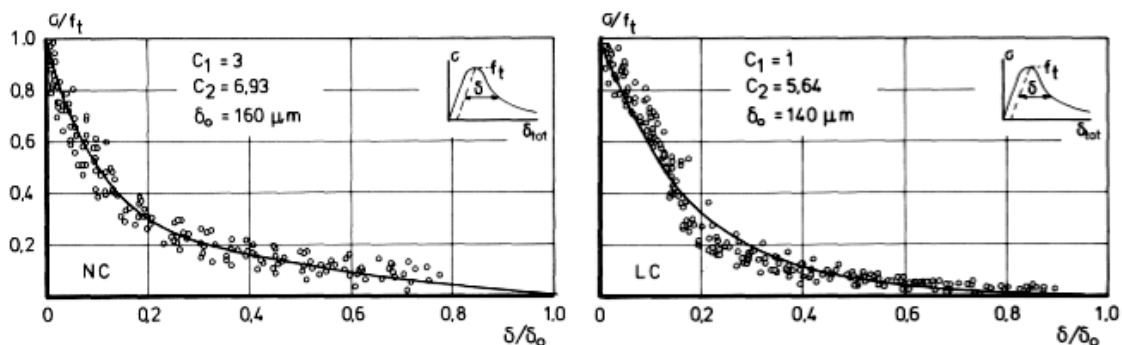


Figura 4-6 Relação tensão-abertura de fissura para concreto de densidade normal, NC e de densidade leve LC (fonte: Cornelissen, Hordijk, e Reinhardt, 1986)

#### 4.1.5 Comportamento a compressão

Os modelos de comportamento a compressão são em geral representados por funções relacionando tensão a deformação. O DIANA<sup>®</sup> permite o uso de funções predefinidas e modelos customizados via sub-rotinas em Fortran. Para os modelos predefinidos, o DIANA<sup>®</sup>, oferece seis modelos, além do linear elástico, Figura 4-7 (a), têm-se: ideal ou elasto-plástico perfeito, Thorenfeldt, linear com endurecimento, multilinear com endurecimento, saturação e parabólico, Figura 4-7.

No ideal, Figura 4-7 (b), deve-se apenas inserir um valor limite  $f_c$  para a resistência a compressão. Para o modelo linear Figura 4-7 (d), assim como o ideal, deve ser estabelecido o valor da resistência a compressão  $f_c$ , acrescido da definição de um valor para o módulo de endurecimento  $E_{har}$ . No modelo multilinear, Figura 4-7 (e), o comportamento a compressão é inserido externamente pelo usuário, por meio de arquivo de dados, que convencionalmente, deve se basear em dados experimentais. Para o modelo de saturação Figura 4-7 (f), quatro termos são solicitados, a tensão resistente inicial,  $f_{c0}$ , a tensão resistente final,  $f_{c\infty}$ , o módulo de endurecimento,  $E_{har}$ , e o fator de decaimento que indica quando o diagrama tocará a direção determinada por  $f_{c\infty}$  e  $E_{har}$ .

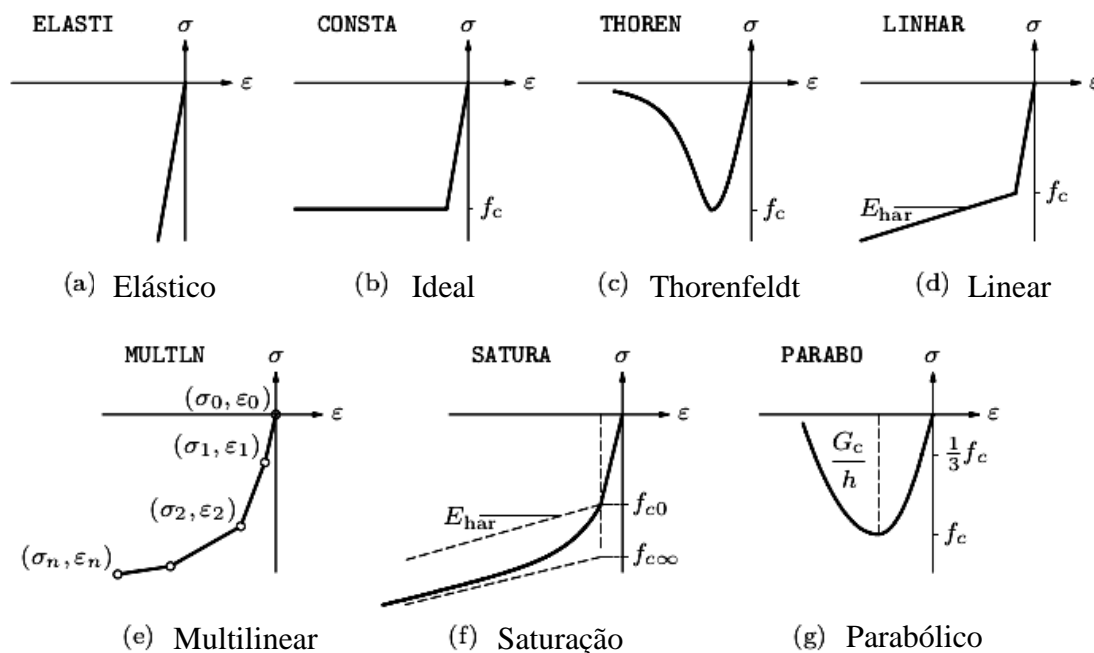


Figura 4-7 Modelos predefinidos de comportamento do concreto a compressão (fonte: DIANA<sup>®</sup>, 2012)

Os modelos parabólico e Thorenfeldt são os únicos com amolecimento para a compressão. Para os modelos a compressão considera-se que, possa haver perda de rigidez por deformação de alongamento excessiva na direção perpendicular e que provoque fissuração. Esse fenômeno reduz à resistência a compressão e a capacidade de deformação, e são expressos pelo DIANA<sup>®</sup> como

$$f_p = \beta_{\sigma_{cr}} f_{cf} \quad (4-13)$$

$$\alpha_p = \beta_{\epsilon_{cr}} \epsilon_p \quad (4-14)$$

onde  $f_p$  e  $\epsilon_p$  são a tensão e a deformação de pico do concreto danificado, respectivamente,  $\beta_{\sigma_{cr}}$  e  $\beta_{\epsilon_{cr}}$  são as funções de minoração da resistência a compressão e a deformação do concreto fissurado, respectivamente. O parâmetro  $f_{cf}$  é a resistência à compressão do concreto e  $\epsilon_p$  é a deformação de pico.

O modelo de Thorenfeldt, Figura 4-8, é descrito pela equação

$$f = -f_p \frac{\alpha}{\alpha_p} \left( \frac{n}{n - \left( 1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha_p} \right)^{nk} \right)} \right) \quad (4-15)$$

onde

$$n = 0.80 + \frac{f_{cc}}{17} \quad (4-16)$$

$$k = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha_p < \alpha < 0 \\ 0.67 + \frac{f_{cc}}{17} & \text{se } \alpha \leq \alpha_p \end{cases} \quad (4-17)$$

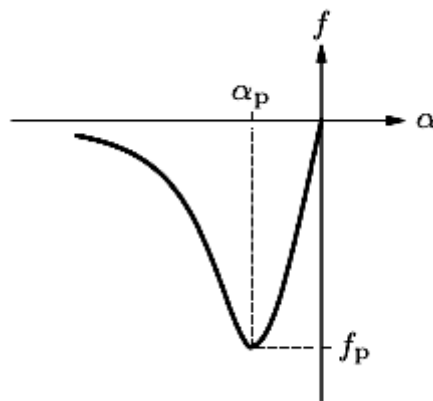


Figura 4-8 Curva de compressão de Thorenfeldt (fonte: DIANA<sup>®</sup>, 2012)

O último modelo é o Parabólico, o qual é o único modelo a compressão do DIANA<sup>®</sup> que é baseado em energia. A este respeito o DIANA<sup>®</sup> (2012), indica que a energia de fratura a compressão  $G_c$  pode ser expressa em uma faixa de 10 a 25 Nmm/mm<sup>2</sup>, o que fica em torno de 50 a 100 vezes maior que a energia de fratura a tração. A curva do modelo está esquematizada na Figura 4-9:

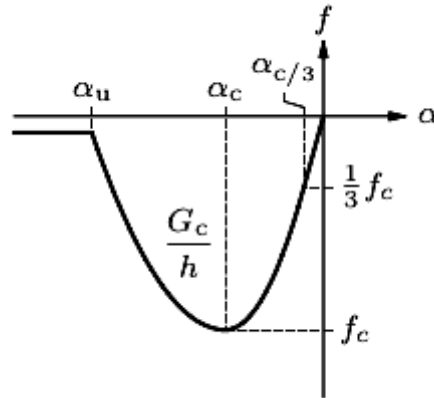


Figura 4-9 Curva de compressão do modelo Parabólico (fonte: DIANA<sup>®</sup>, 2012)

Como entrada de dados do modelo o programa solicita apenas a resistência à compressão,  $f_c$ , a energia de fratura a compressão,  $G_c$ , e a largura de banda de fissuração,  $h$ . Os pontos apresentados na Figura 4-9, são definidos como

$$\alpha_{c/3} = -\frac{1}{3} \frac{f_c}{E} \quad (4-18)$$

onde  $\alpha_{c/3}$  é a deformação quando a tensão atingir 1/3 da tensão de pico  $f_c$ .

Para a deformação em tensão máxima tem-se

$$\alpha_c = -\frac{5}{3} \frac{f_c}{E} = 5\alpha_{c/3} \quad (4-19)$$

Segundo DIANA<sup>®</sup> (2012), os valores de  $\alpha_c$  e  $\alpha_{c/3}$  devem ser mensurados em função do elemento finito ou da energia de fratura.

Para a deformação última  $\alpha_u$  a expressão é

$$\alpha_u = \alpha_c - \frac{3}{2} \frac{G_c}{hf_c} \quad (4-20)$$

A curva pode ser descrita, para o modelo Parabólico de compressão, como

$$f = \begin{cases} -f_c \frac{1}{3} \frac{\alpha_j}{\alpha_{c/3}} & \text{se } \alpha_{c/3} < \alpha_j \leq 0 \\ -f_c \frac{1}{3} \left( 1 + 4 \left( \frac{\alpha_j - \alpha_{c/3}}{\alpha_c - \alpha_{c/3}} \right) - 2 \left( \frac{\alpha_j - \alpha_{c/3}}{\alpha_c - \alpha_{c/3}} \right)^2 \right) & \text{se } \alpha_c < \alpha_j \leq \alpha_{c/3} \\ -f_c \left( 1 - \left( \frac{\alpha_j - \alpha_c}{\alpha_u - \alpha_c} \right)^2 \right) & \text{se } \alpha_u < \alpha_j \leq \alpha_c \\ 0 & \text{se } \alpha_j \leq \alpha_u \end{cases} \quad (4-21)$$

Cabe se ressaltar que em DIANA (2012), não há menção sobre a qual classe de concreto pode ser aplicada ao modelo Parabólico. Portanto, faz-se importante observar, que para concretos de alta resistência os limites que definem a forma da curva podem não se enquadrar com a curva tensão x deformação real. Sendo mais indicado, por exemplo, o uso de Thorenfeldt para essa classe de concreto.

#### 4.1.6 Retenção de cisalhamento

Com a danificação a rigidez ao cisalhamento de um material também é reduzida. O DIANA<sup>®</sup> tem alguns modelos predefinidos para avaliação da rigidez ao cisalhamento. O primeiro estabelece a retenção completa, ou sem redução da rigidez ao cisalhamento

$$D_{\text{secant}}^{\text{II}} = \infty \quad (4-22)$$

O segundo modelo é de retenção constante, onde uma equação em função de  $\beta$  [Eq. (4-23)], afeta a rigidez transversal como forma de compatibilizar sua degradação:

$$D_{\text{secant}}^{\text{II}} = \frac{\beta}{1-\beta} G \quad (4-23)$$

O terceiro é a retenção variável, ou multilinear, com pontos inseridos por meio de uma folha de dados para compor um diagrama multilinear, seguindo a mesma ideia do item 4.1.4.3, exceto pela restrição na inclinação.

O último modelo disponível é um modelo de dano para o módulo de elasticidade transversal baseado no Poisson. Segundo o DIANA<sup>®</sup> (2012), quando o material é fissurado, na fissura não deve atuar o efeito de Poisson, isso porque, as deformações provenientes do alongamento de fissura não levam a variações dimensionais de

encurtamento na direção perpendicular a fissura, como acontece em um material íntegro. Para tanto, uma formulação ortotrópica para o dano é adaptada para os Poisson assim como a equação (4-24).

$$\tilde{\nu} = \mathcal{P}\nu \quad (4-24)$$

onde  $\tilde{\nu}$  é a matriz de Poisson com dano e  $\mathcal{P}$  é a matriz de dano.

Reduzindo assim o módulo de elasticidade transversal que pode ser escrito de forma simplificada como

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad 4-25$$

#### 4.2 APLICAÇÃO DO ELEMENTO DE BARRA INCORPORADA NO DIANA<sup>®</sup>

O elemento de reforço incorporado adiciona a sua rigidez a rigidez dos elementos finitos que o estiver atravessando. O DIANA<sup>®</sup> (2012) descreve as características destes elementos:

- Os reforços incorporados são inseridos nos elementos estruturais, que passam a serem chamados de elementos matriz. Para a aplicação ao DIANA<sup>®</sup>, a área ocupada pelo reforço incorporado é desconsiderada ao ser inserido no elemento matriz e, não contribui com a massa nem diminui a rigidez em função da área ocupada;
- Os elementos incorporados não possuem graus de liberdade próprios;
- As deformações nos elementos incorporados são iguais as dos elementos matriz, implica assim na consideração de que o reforço tem aderência perfeita ao material adjacente.

Para ser possível considerar o escorregamento do reforço é preciso aplicar elementos discretos de viga ou treliça ao reforço. Entre os nós dos elementos de reforço e o material adjacente deve haver elementos de interface, onde são considerados os modelos de escorregamento. Esse método é muito útil quando se precisa modelar o arrancamento das barras de aço de uma matriz de concreto ou a interação da estaca de fundação com o solo ou rocha ao redor.

O elemento de reforço incorporado pode ser aplicado a vários elementos finitos, como vigas, elementos em estado plano de tensão (exceto elemento de membrana tridimensional), sólidos e cascas curvas. Para o eixo do elemento de reforço é definida uma direção sempre tangente à direção do reforço e passando pelo nó do elemento incorporado, para assim definir sua curvatura, se existir, como na Figura 4-10.

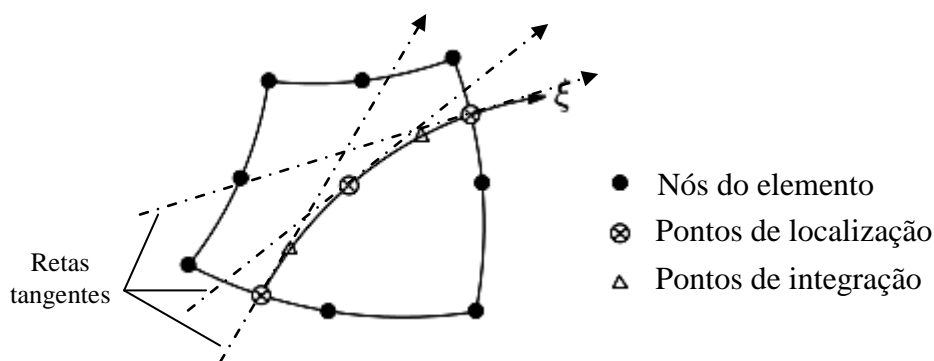


Figura 4-10 Inserção de elemento de reforço incorporado em um elemento finito em estado plano de tensão como identificação dos nós do elemento, os pontos de integração do reforço e os nós do reforço (fonte: Adaptado de DIANA<sup>®</sup>, 2012)

O DIANA<sup>®</sup> tem a ferramenta para calcular automaticamente a posição dos pontos de integração do elemento incorporado que, dependendo da forma da barra, podem ser inseridos mais ou menos pontos de integração no elemento matriz, como está representado na Figura 4-11.

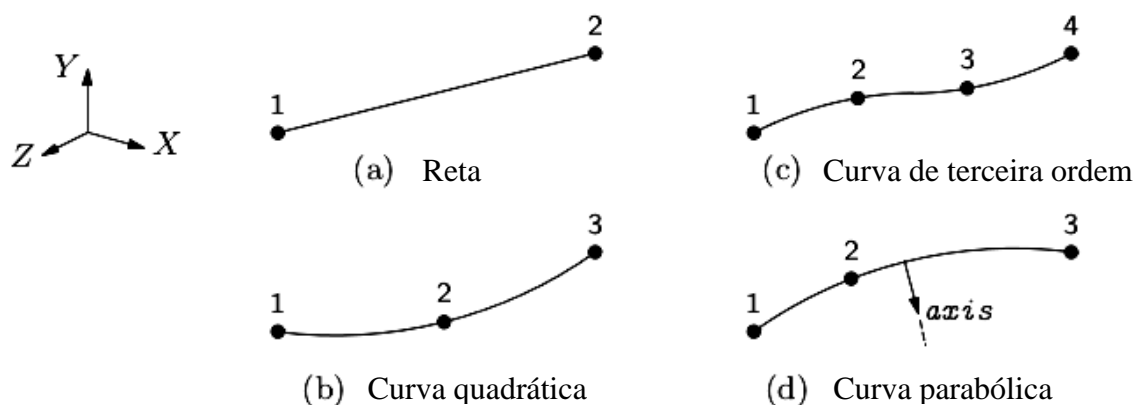


Figura 4-11 Forma das barras e o número de nós correspondentes necessários para descrever sua geometria (fonte: Adaptado de DIANA<sup>®</sup>, 2012)

Na Figura 4-12 é representado sobre o elemento CQ8M do DIANA<sup>®</sup>, de 4 nós em estado plano de tensão, a inserção de uma barra incorporada com duas seções, com

formas diferentes e suas respectivas formas de representação automatizada pelo programa.

Há também no programa, a possibilidade do usuário definir a posição dos pontos de integração, seja pela inserção de nós em posições específicas, seja pela definição das coordenadas dos pontos.

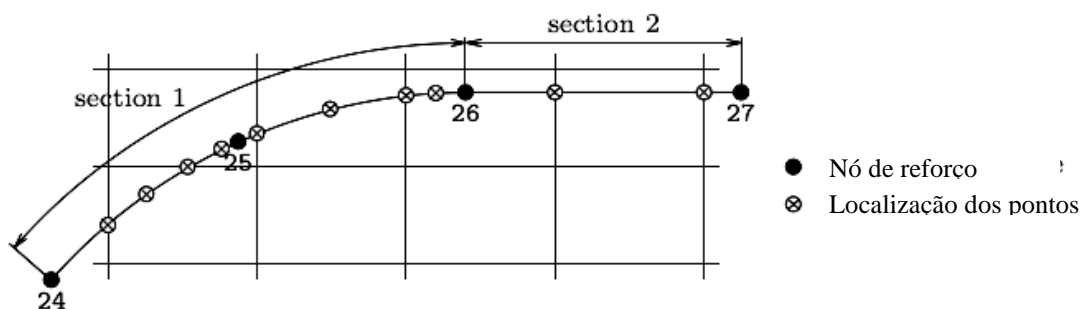


Figura 4-12 Inserção no elemento CQ8M, de barra com duas seções com formas diferentes e os respectivos pontos necessários para análise (fonte: Adaptado de DIANA<sup>®</sup>, 2012)

### 4.3 DESCRIÇÃO E APLICAÇÃO DO ELEMENTO DE SERENDIPITY DE 8 NÓS NO DIANA<sup>®</sup>

#### 4.3.1 Descrição do Elemento regular quadrilátero de oito nós

Esse elemento será descrito devido sua utilização no presente trabalho, no qual, representaram a porção de concreto do elemento estrutural.

Segundo Reddy (1993), o elemento descrito na Figura 4-13 por não possuir um nó no centro, portanto, sem a contribuição da conectividade interelementar devem ser condensados em um novo grupo de elementos de ordem elevada, mas, com a matriz de rigidez reduzida, ou seja, os elementos *serendipity*. Todos os pontos estão nos bordos e as funções de interpolação não podem ser obtidas usando produto de tensores para uma função de interpolação unidimensional.



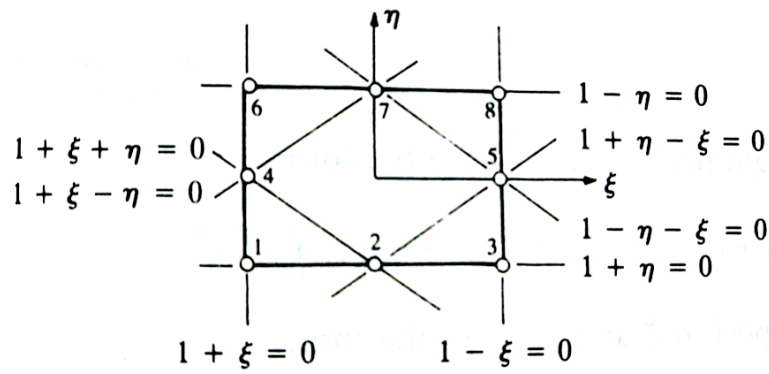


Figura 4-13 Elemento quadrilátero de oito nós da família dos *serendipity* (fonte: Reddy *et al*, 1993)

A função de interpolação deve garantir que no nó de estudo, seu valor seja 1 e 0 (zero) nos outros nós. Assim as funções de forma podem ser descritas por

$$\psi_1(\xi, \eta) = c(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta) \quad (4-26)$$

onde  $c$  é uma constante que deve ser determinada para que  $\psi_1(-1, -1) = 1$ . Portanto, as funções de interpolação para o Elemento quadrilátero de oito nós da família dos *serendipity* são dadas por

$$\psi_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta) \quad (4-27)$$

$$\psi_2(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \quad (4-28)$$

$$\psi_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(-1+\xi-\eta) \quad (4-29)$$

$$\psi_4(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2) \quad (4-30)$$

$$\psi_5(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) \quad (4-31)$$

$$\psi_6(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-1-\xi+\eta) \quad (4-32)$$

$$\psi_7(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \quad (4-33)$$

$$\psi_8(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(-1+\xi+\eta) \quad (4-34)$$

A função de interpolação pode ser expressa para todos os nós do elemento como sendo

$$\psi_i = c_1 + c_2\xi + c_3\eta + c_4\xi\eta + c_5\xi^2 + c_6\eta^2 + c_7\xi^2\eta + c_8\xi\eta^2 \quad (4-35)$$

Esse é um elemento isoparamétrico, portanto, a mesma função de interpolação é usada para definir a forma e os deslocamentos nodais, logo, os deslocamentos também podem ser escritos em função das coordenadas locais como

$$u_i(\xi, \eta) = c_1 + c_2\xi + c_3\eta + c_4\xi\eta + c_5\xi^2 + c_6\eta^2 + c_7\xi^2\eta + c_8\xi\eta^2 \quad (4-36)$$

onde  $u_i$  são todos os deslocamentos.

Uma das vantagens dos elementos com nó entre as arestas é a definição da forma geométrica, que pode ser definida como uma curva, Figura 4-14, facilitando a representação de estruturas de formas complexas e arredondadas.

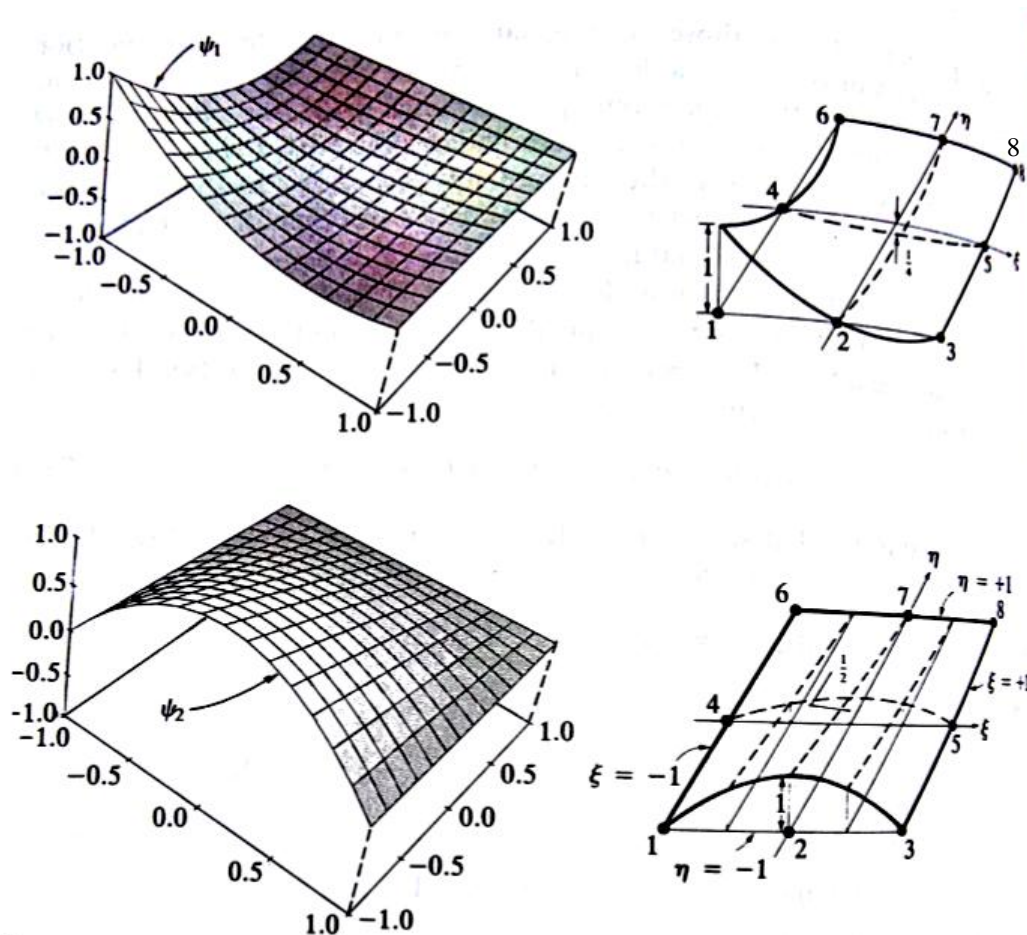


Figura 4-14 Variação de forma com a função de interpolação associada ao nó 1 e 2 do elemento *serendipity* de oito nós (fonte: Reddy, 1993)

#### 4.3.2 Aplicação do Elemento regular quadrilátero de oito nós no DIANA<sup>®</sup>

Segundo o DIANA<sup>®</sup> (2012), o elemento CQ16M, Figura 4-15, é baseado em uma interpolação quadrática e integração por Gauss. De acordo com a definição apresentada em Reddy (1993) item 4.3.1, o elemento CQ16M é classificado como um elemento da família do *serendipity*. O elemento CQ16M é regular e está em estado plano de tensão. O polinômio que descreve os deslocamentos na direção do plano do elemento está descrito na seção 4.3.1. O polinômio para a deformação  $\epsilon_{xx}$ , é linear para  $x$  e quadrático para  $y$ , assim como para a deformação  $\epsilon_{yy}$ , o polinômio é linear para  $y$  e quadrático para  $x$ . Já para as deformações cisalhantes  $\gamma_{xy}$ , é quadrático em ambas as direções. A forma de integração é  $2 \times 2$ , ou seja, 4 pontos de integração por elemento, com a técnica de integração numérica por Quadrática de Gauss como representa a Figura 4-15.

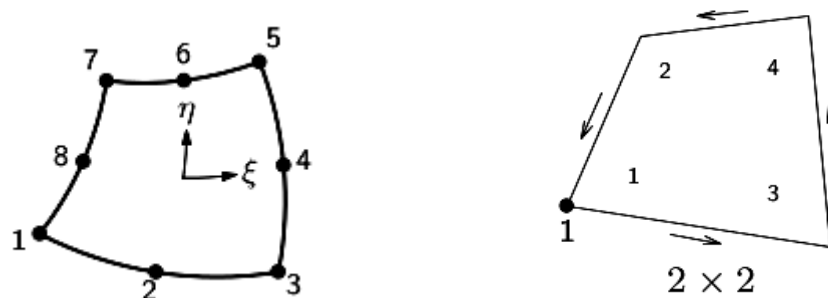


Figura 4-15 Elemento finito quadrilátero de oito nós, CQ16M e forma de integração  $2 \times 2$  por Gauss para um elemento quadrilátero (fonte: DIANA<sup>®</sup>, 2012)

A Figura 4-16 apresenta um comparativo entre as formas de representar as deformações e as distorções com a elevação do refinamento da teoria. As teorias de ordem superior assumem que as equações para descrever as distorções são não lineares, ou seja, de segunda ordem para cima. Em Reddy (2004) há um desenvolvimento para a teoria de Euler-Bernoulli, para Timoshenko, bem como uma equação de terceira ordem, onde o autor a nomeia de Teoria de terceira ordem de Reddy.

Usar o elemento de *serendipity* de 8 nós, CQ16M, para análise de flexão de vigas com discretização em relação a altura, é um modelo de EF avançado, comparado aos modelos analíticos de flexão de viga, como os de Bernoulli da Figura 4-16 (b), e de Timoshenko da Figura 4-16 (c). Pois, avaliando os polinômios que descrevem as deformações desse elemento e o aplicá-lo na discretização de uma viga em função de sua altura, proverá resultados que podem ser comparados a um modelo analítico de viga de segunda ordem, para flexão de vigas, assim como na Figura 4-16 (d).

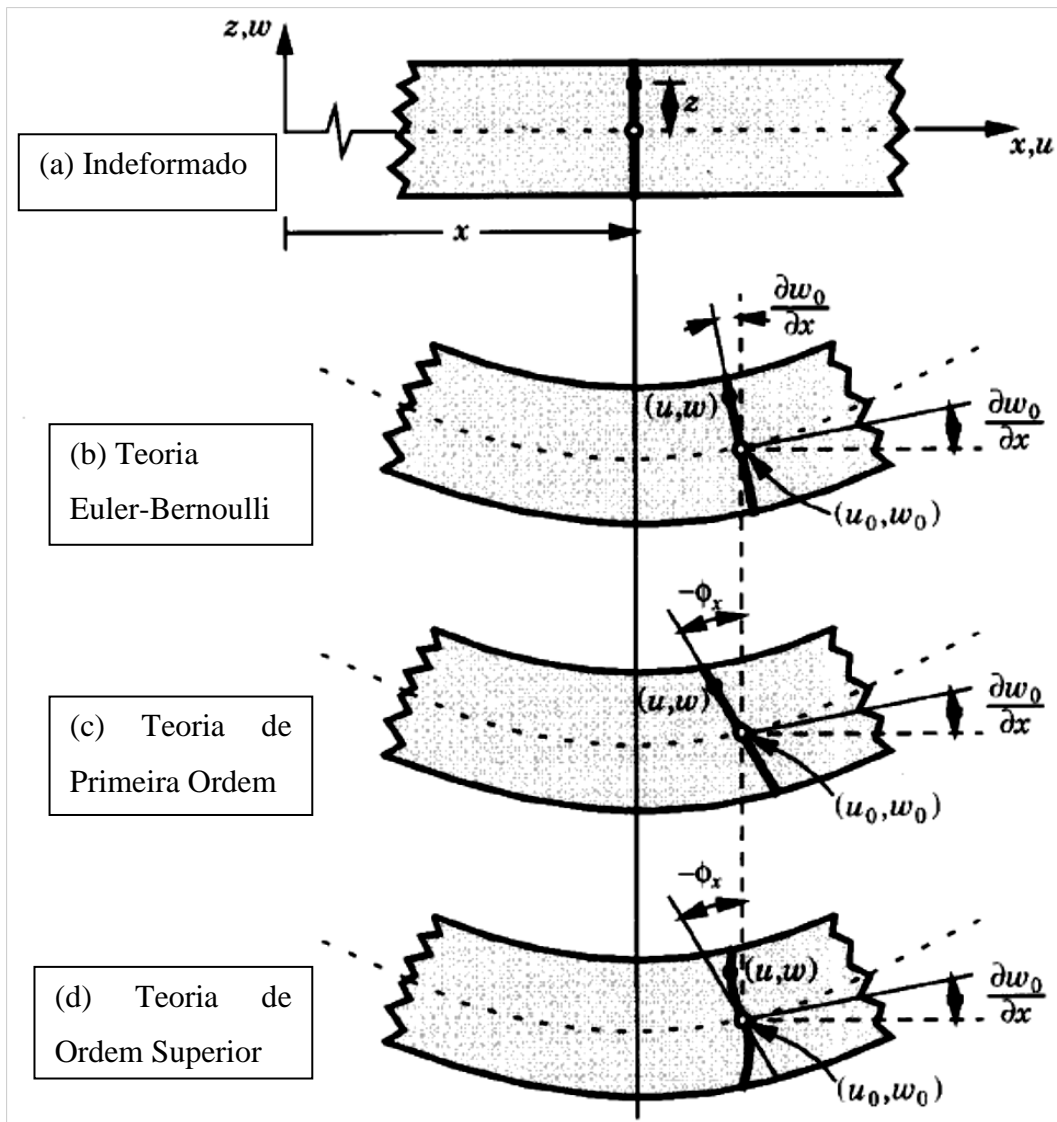


Figura 4-16 Representação a) viga indeformada b) deformações para a teoria Euler-Bernoulli c) Teoria de primeira ordem d) teoria de ordem superior (fonte: Adaptado de Reddy, 2004)

## 5 METODOLOGIA

Foram feitas análises comparativas com os resultados experimentais e teóricos de Álvares (1993) para três vigas sob flexão de quatro pontos, e para alguns exemplares da série de vigas sob flexão de três pontos ensaiadas por Bresler e Scordelis (1963). Para estas últimas foram acrescentados estudos comparativos com simulações apresentadas por Vecchio (2000) e por Gamino (2007).

### 5.1 DESCRIÇÃO DOS MODELOS NUMÉRICOS E ENSAIOS EXPERIMENTAIS UTILIZADOS

Os modelos numéricos descritos, neste capítulo, tiveram seus parâmetros selecionados após estudos de convergência e calibragem. Os parâmetros e hipóteses que não foram diretamente avaliados tiveram sua escolha determinada por análises dos trabalhos aqui avaliados, Bresler e Scordelis, 1963 e Álvares, 1993, e outros autores.

#### 5.1.1 Álvares (1993)

Álvares (1993) projetou e avaliou experimentalmente três vigas de concreto armado submetidas à flexão de quatro pontos, conforme representado na Figura 5-1, com controle de carga. As vigas foram classificadas por Álvares (1993) em pouco armada (caso 1), normalmente armada (caso 2) e superarmada (caso 3), de acordo com a taxa de armadura longitudinal de tração utilizada. Esse critério obedece aos domínios de deformação de ruína, que são definidos atualmente pela NBR 6118:2007, os quais estão representados no diagrama apresentado na Figura 6-2. As armaduras de flexão são caracterizadas para o caso 1 como sub armada, ou seja, dentro dos limites do domínio 3, para o caso 2, normalmente armada, no limite entre o domínio 3 e 4, e para o caso 3, super armada, dentro do domínio 4.

Com relação ao cisalhamento, Álvares (1993) dimensionou as vigas de modo a terem estribos suficientes para garantir o equilíbrio do modelo de treliça de Ritter-Mörsch, suportando assim o máximo esforço cortante entre o apoio e a carga.

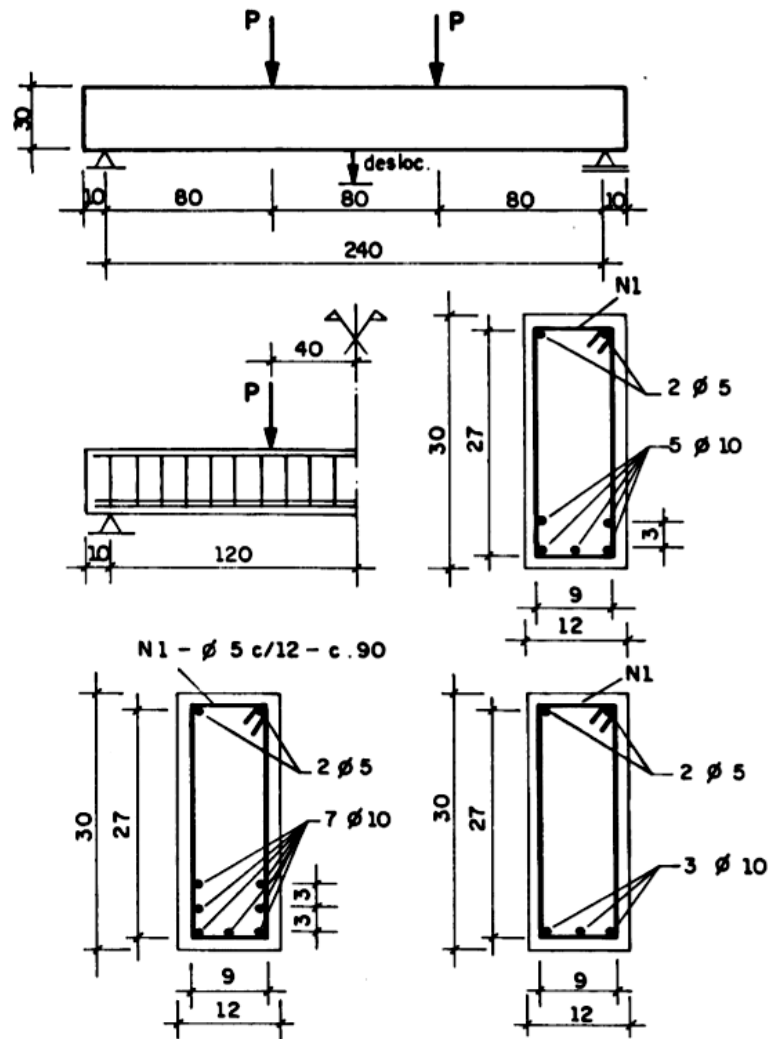


Figura 5-1 Características geométricas e disposição das armaduras para os três tipos de vigas ensaiadas por Álvares (1993) (fonte: Álvares, 1993)

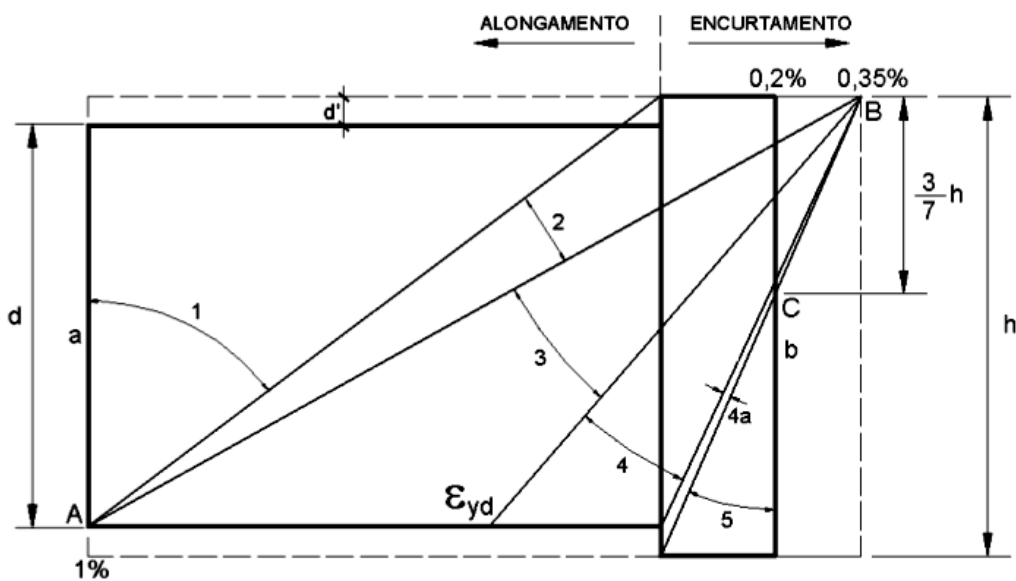


Figura 5-2 Diagrama único dos domínios de deformação na ruína de elementos de concreto armado segundo a NBR 6118 (fonte: Libânio *et al*, 2003)

### 5.1.1.1 Descrição do modelo computacional adotado

#### 5.1.1.1.1 Reforço

O reforço foi modelado como elementos de barras incorporadas na malha de EF de concreto, portanto, como abordado no item 4.2, a aderência será considerada perfeita.

#### 5.1.1.1.2 Elementos finitos

Foi utilizado o elemento finito CU8 CQ16M de 8 nós, quadrilátero e isoparamétrico em estado plano de tensão, que é baseado em uma interpolação quadrática e integração de Gauss. Segundo o DIANA<sup>®</sup> (2012), esse elemento é indicado para análise não linear física de vigas com discretização em relação à altura, pela prerrogativa de que usar elementos mais simples, como os de interpolação linear Q8MEN ou Q8OME (elementos de quatro nós), pode causar falsos modos cinemáticos.

O modelo de EF usado é o modelo avançado comparado aos modelos de flexão de viga como os de Bernoulli ou de Timoshenko. Diferente dos modelos de flexão de vigas, não considera as cargas e condições de apoio aplicadas na superfície média e sim onde realmente são aplicadas, nas faces superior e inferior, respectivamente. A seção transversal não precisa ser simétrica, podendo assim analisar vigas de diversas geometrias. Permite a consideração de barras de armaduras e, como discretiza a altura, mesmo para elementos mais simples que o CQ16M, se for utilizada uma discretização densa, pode-se obter resultados bastante precisos, mesmo em situações onde as deformações do elemento são como na Figura 4-16 (d).

#### 5.1.1.1.3 Malha

A partir de análises de convergência descritas no item 6.1, foi adotada uma malha formada por elementos com as dimensões entre nós de 30 mm (comprimento) por 15 mm (altura), como mostra a Figura 5-3.



```

Model: CAS01
Analysis: DIANA
Model Type: Structural 2D

```

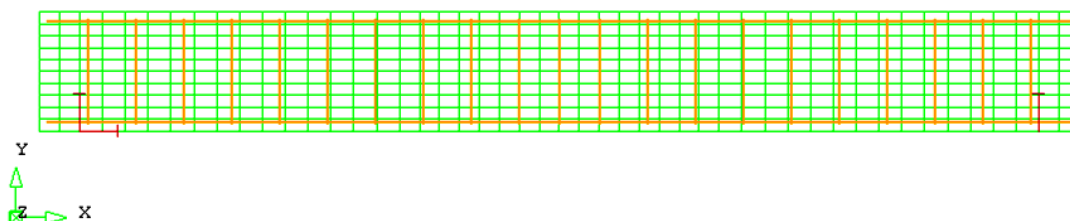


Figura 5-3 Representação da densidade da malha, condições de apoio e posição das armaduras para o modelo adotado

#### 5.1.1.1.4 Materiais

Para o concreto foi utilizado o modelo de fissuração distribuída multidirecional, com tensão de fissuração constante e modelo constitutivo com amolecimento a tração segundo o modelo de Hordijk. E para o concreto comprimido adotou-se o regime elastoplástico perfeito com critério de von Mises. Para a consideração do cisalhamento foi aplicado o valor de 0,2 para a retenção ao cisalhamento, como indicado por Bažant e Oh (1983).

O aço foi tratado como elastoplástico perfeito, sendo que a tensão de escoamento foi adotada com valor de 500 MPa, tanto para as barras de flexão quanto para as barras de cisalhamento.

#### 5.1.1.1.5 Condições de contorno

As condições de contorno foram aplicadas diretamente nos nós dos elementos finitos envolvidos, satisfazendo tanto as condições cinemáticas quanto as naturais. Cada carga foi distribuída sobre os nós superiores de 2 elementos finitos, 5 nós no total, como forma de evitar modos de deformação irrealis por conta da concentração de tensões.

#### 5.1.1.1.6 Técnicas de processamento

A solução não linear foi obtida por meio de incremento de carga, e processo iterativo de Newton-Raphson regular (controle de carga) com *arc-length*. Para o critério de convergência utilizou-se a norma dos deslocamentos com tolerância de  $10^{-2}$ .

Foi aplicado controle de carga, sendo o valor de P (carga aplicada em cada terço médio) de 10000N, utilizando um incremento de carga de 0,1 ou 10% e um ângulo limite (*thresholdangle*) de 45 graus para abertura de nova fissura no modelo multidirecional.

### 5.1.1.2 Descrição das características físicas e geométricas

Os dados para o modelo constitutivo da armadura estão na Tabela 5-1.

Tabela 5-1 Dados físicos e geométricos das armaduras de Álvares (1993).

Aço				
Barra	Diâmetro(mm)	Área(mm <sup>2</sup> )	fy(MPa)	Es(MPa)
Φ 10	10,00	78,54	500	196000
Φ 5	5,00	19,63	500	196000

As características geométricas, seção transversal e comprimento da viga, bem como a disposição das armaduras para cada modelo, estão apresentados na Figura 5-1. É pertinente observar que a única diferença entre as vigas está na quantidade de armadura à flexão.

As características do concreto utilizado para o modelo constitutivo estão descritas na Tabela 5-2. As informações foram obtidas de Álvares (1993) e por meio de equações de correlação da NBR 6118:2007 e do CEB-FIP 90 (1990).

Tabela 5-2 Dados característicos do concreto para modelo numérico no DIANA<sup>®</sup>

Dados			
Resistência característica a compressão	Fck=	26,77	MPa
Diâmetro máximo do agregado	Dmax=	12	mm
Segundo a NBR 6118			
Módulo de elasticidade longitudinal	Eci=	28974,25	MPa
Resistência à tração média	Fctm=	2,68	MPa
Resistência característica a tração mínima	Fctk,min=	1,88	MPa
Resistência característica a tração máxima	Fctk,max=	3,49	MPa
Coefficiente de Poisson	ν=	0,2	
Obs: Não há informações sobre a Energia da fratura (Gf) no código NBR 6118, portanto, segundo o CEB-FIP 1990			
Energia de fratura	Gf=	0,04166	N/mm

### 5.1.2 Bresler e Scordelis (1963)

Esses autores ensaiaram doze vigas de concreto armado visando estabelecer uma melhor compreensão sobre a resistência desses elementos estruturais ao cisalhamento. Para efeito de nomenclatura os autores as separaram em quatro séries de três vigas, que variavam desde as dimensões da geometria até as taxas de armadura, longitudinal e transversal. A este respeito cabe destacar que a primeira série de vigas, OA-1, OA-2 e OA-3, não dispunham de armadura transversal (estribos). Todas as doze vigas foram submetidas à flexão de três pontos com carga aplicada no centro do vão. Para evitar concentração de tensão nos apoios, foram utilizadas chapas metálicas sobre blocometálico de rolamento esférico de um lado, e do outro um cilindro metálico, com a função de simular apoios de primeiro e segundo gênero para as vigas. O carregamento foi aplicado por meio de equipamento com controle de carga. Para os fins do presente trabalho serão simuladas apenas as vigas OA-3, A-1 e C-1, as quais estão representadas na Figura 5-4.

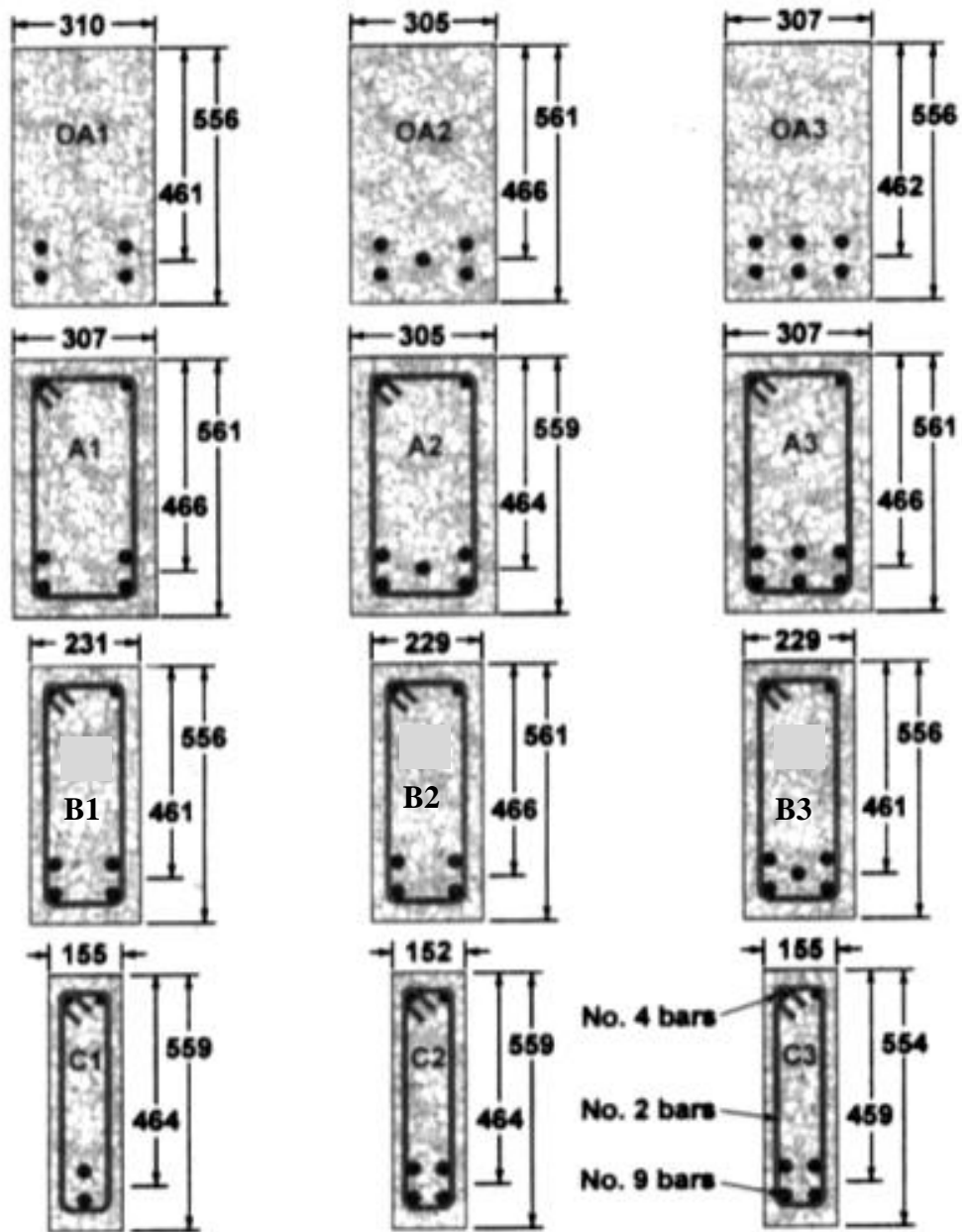


Figura 5-4 Seção transversal e disposição das armaduras para todas as vigas de Bresler e Scordelis (1963) (fonte: adaptado de Vecchio e Shim, 2004)

### 5.1.2.1 Descrição do modelo computacional

#### 5.1.2.1.1 Reforço

O reforço foi modelado como elementos de barras incorporadas na malha de EF de concreto, assim as barras tiveram comportamento de aderência perfeita, similar ao que foi buscado pelos autores Bresler e Scordelis (1963), ao fixar a chapa metálica na extremidade das barras longitudinais, impedindo a falta de coesão e deste modo uma falha por escorregamento das armaduras.

#### 5.1.2.1.2 Elementos finitos

O elemento finito utilizado para o presente modelo foi o CU8 CQ16M, como já descrito no item 5.1.1.2. Foram utilizados dois EF em cada apoio para representar o suporte metálico utilizado por Bresler e Scordelis (1963) em seus ensaios, como mostra o modelo em EF representado na Figura 5-5.

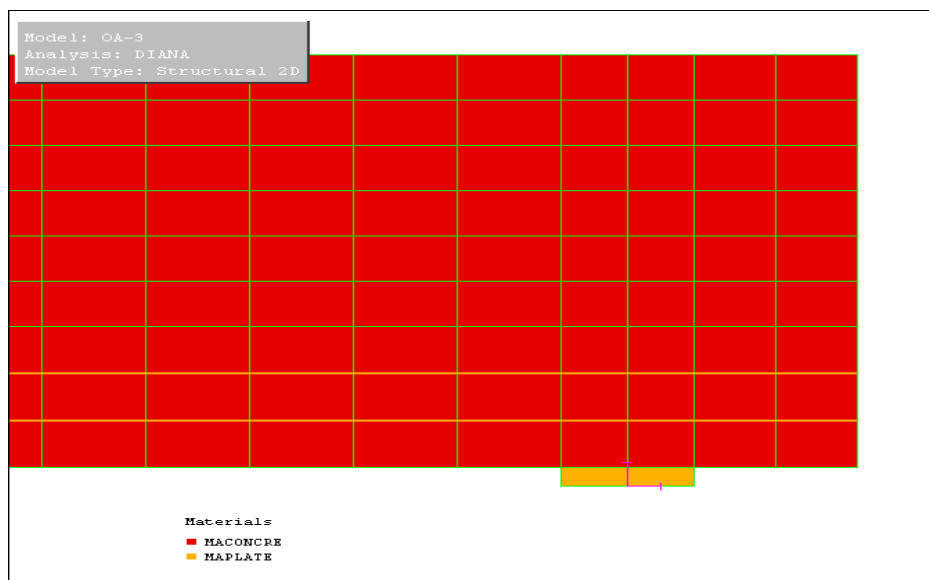


Figura 5-5 Representação da chapa acima do apoio, para reproduzir o arranjo experimental de Bresler e Scordelis(1963).

### 5.1.2.1.3 Malha

A partir de análises de convergência descritas no item 6.1, foi utilizada uma malha de elementos finitos formada por elementos com 50 mm de comprimento e 30 mm de altura.

### 5.1.2.1.4 Materiais

O modelo constitutivo dos materiais desta análise numérica segue as mesmas características do item 5.1.1.1.4. Para o modelo do aço distingue apenas que foi assumida a tensão limite de escoamento para cada tipo de barra como indicada na Tabela 5-3 e de acordo com Bresler e Scordelis (1963).

### 5.1.2.1.5 Condições de contorno

As condições cinemáticas foram aplicadas diretamente nos nós dos EF.

### 5.1.2.1.6 Técnicas de processamento

Similar à utilizada no item 5.1.1.1.6.

## 5.1.2.2 Descrição das características físicas e geométricas

Os dados informados por Bresler e Scordelis (1963), e que foram utilizadas para construção do modelo de EF e do modelo constitutivo das armaduras, estão na Tabela 5-3, que descreve o diâmetro das barras, a área de seção transversal, a tensão de escoamento  $f_y$ , a tensão última  $f_u$ , e o módulo de elasticidade secante  $E_s$ .

Tabela 5-3 Dados físicos e geométricos das armaduras utilizadas por Bresler e Scordelis (1963).

Aço					
Barra	Diâmetro(mm)	Área(mm <sup>2</sup> )	$f_y$ (MPa)	$f_u$ (MPa)	$E_s$ (MPa)
n° 9	28,7	645	555	933	218000
n° 4	12,7	127	345	542	201000
n° 2	6,4	32,2	325	430	190000

As informações referentes à geometria e as propriedades físicas das vigas avaliadas por Bresler e Scordelis (1963) estão na Tabela 5-4 e Tabela 5-5, respectivamente. Segundo Bresler e Scordelis (1963), as resistências apresentadas na Tabela 5-5 se referem à resistência à tração na flexão,  $f_t$ , obtido em ensaio de flexão de três pontos e a resistência característica a compressão,  $f'_c$ , obtida em ensaio de compressão axial de corpo de prova cilíndrico.

Tabela 5-4 Dados geométricos das vigas de Bresler e Scordelis (1963).

Viga	bw(mm)	h(mm)	d(mm)	L(mm)	Vão(mm)	As	A's	Asw/s
OA3	307	556	461	6840	6400	6 n° 9	---	---
A1	307	561	466	4100	3660	4 n° 9	2 n° 4	no 2 c/ 210
C1	155	559	464	4100	3660	2 n° 9	2 n° 4	no 2 c/ 210

Tabela 5-5 Resistência à compressão e a tração por flexão das vigas de Bresler e Scordelis (1963).

Viga	$f_c$ (MPa)	$f_t$ (MPa)
OA3	37,6	4,35
A1	24,1	3,86
C1	29,6	4,22

Os dados utilizados para o modelo constitutivo do concreto da viga OA-3, A-1 e C-1 estão descritos nas Tabela 5-6, Tabela 5-7 e Tabela 5-8, respectivamente.

Tabela 5-6 Dados característicos do concreto para modelo numérico da viga OA-3 no DIANA®

Dados			
Resistência característica a compressão	Fck=	37,6	MPa
Diâmetro máximo do agregado	Dmax=	20	mm
Segundo a NBR 6118			
Módulo de elasticidade longitudinal	Ec=	34338,55	MPa
Resistência à tração média	Fctm=	3,37	MPa
Resistência característica a tração mínima	Fctk,min=	2,36	MPa
Resistência característica a tração máxima	Fctk,max=	4,38	MPa
Obs.: Não há informações sobre a Energia da fratura (Gf) no código NBR 6118, portanto segundo o CEB-FIP 1990			
Energia de fratura	Gf=	0,06136	N/mm

Tabela 5-7 Dados característicos do concreto para modelo numérico da viga A-1 no DIANA®

Dados			
Resistência característica a compressão	Fck=	24,1	MPa
Diâmetro máximo do agregado	Dmax=	20	mm
Segundo a NBR 6118			
Módulo de elasticidade longitudinal	Ec=	27491.38	MPa
Resistência à tração média	Fctm=	2.50	MPa
Resistência característica a tração mínima	Fctk,min=	1.75	MPa
Resistência característica a tração máxima	Fctk,max=	3.25	MPa
Obs.: Não há informações sobre a Energia da fratura (Gf) no código NBR 6118, portanto segundo o CEB-FIP 1990			
Energia de fratura	Gf=	0,05458	N/mm

Tabela 5-8 Dados característicos do concreto para modelo numérico da viga C-1 no DIANA®

Dados			
Resistência característica a compressão	Fck=	29.6	MPa
Diâmetro máximo do agregado	Dmax=	20	mm
Segundo a NBR 6118			
Módulo de elasticidade longitudinal	Ec=	30467.29	MPa
Resistência à tração média	Fctm=	2.87	MPa
Resistência característica a tração mínima	Fctk,min=	2.01	MPa
Resistência característica a tração máxima	Fctk,max=	3.73	MPa
Obs.: Não há informações sobre a Energia da fratura (Gf) no código NBR 6118, portanto segundo o CEB-FIP 1990			
Energia de fratura	Gf=	0,05753	N/mm

## 5.2 ESTUDO DE CONVERGÊNCIA

A convergência foi realizada com objetivo de encontrar o limite entre a qualidade do resultado e o tempo de processamento. Então foram testadas várias malhas de EF para a resposta linear elástica e não linear física do material e para as variáveis que influenciam a resposta incremental como: o passo de carga e a tolerância adotada para indicar a convergência da solução não linear de equilíbrio. Assim, foi estabelecido o valor ótimo de cada parâmetro, quando se percebia que qualquer refinamento adicional não traria ganho significativo à resposta.



### 5.3 CALIBRAÇÃO DOS MODELOS

Para os modelos foram testadas as influências dos parâmetros de retenção ao cisalhamento  $\beta$ , que variou de 0,999 a 0,1 e o ângulo limite, com os valores 30°, 45° e 60°.

### 5.4 ANÁLISE DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO COM DIFERENTES TIPOS DE FALHA

Serão apresentados os resultados pertencentes à análise do modelo de EF aplicando o modelo multidirecional de fissuração distribuída com as características descritas no item 5.1

#### 5.4.1 Flexão

Apresentação dos resultados obtidos com o modelo apresentado no item 5.1.1. As três vigas, casos 1, 2 e 3, desenvolveram falhas por flexão. Os dados checados para avaliação das análises foram: o gráfico carga-deslocamento; o monitoramento das tensões e deformações, no concreto e nas armaduras longitudinais; as tensões nas armaduras transversais; e o padrão de fissuração.

#### 5.4.2 Cisalhamento

Foram estudadas as vigas OA-3 e A-1 de Bresler e Scordelis (1963), apresentadas no item 5.1.2 que apresentaram falha por cisalhamento. Para tanto os estudos se concentraram nos seguintes resultados: gráfico carga-deslocamento; monitoramento das tensões e deformações no concreto, e nas armaduras longitudinais; as tensões nas armaduras transversais; e o padrão de fissuração.

## 5.5 ESTUDO DOS MODELOS DE FISSURAÇÃO

Os modelos de fissuração distribuídas para a Mecânica da Fratura são defendidos por vários autores como Bazant e Oh (1983), van Mier (1987), Rots (1988; 1989), e Vecchio (2004). Entretanto, como há poucos estudos comparativos sobre esses modelos tal lacuna será aqui abordada, visando estabelecer mais de perto as interferências de cada modelo de fissuração sobre a previsão do comportamento. Nesse sentido, os modelos de fissuração distribuída fixo, rotacional e multidirecional serão comparados nas análises de vigas de concreto armado com falha por flexão, a viga normalmente armada (caso 2) de Álvares (1993), e com falha ao cisalhamento e falhas a flexão-cisalhamento, vigas OA-3 e A-1, respectivamente, de Bresler e Scordelis (1963). Foram comparados também os resultados obtidos com os resultados de outros autores como Gamino (2007), que construiu modelos numéricos com o modelo fixo de fissuração e Vecchio (2000) que utilizou o modelo rotacional de fissuração.

## **6 RESULTADOS E DISCUSSÕES**

### **6.1 ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA E NORMA DE TOLERÂNCIA**

Foram testados para análise de convergência da malha de EF um primeiro modelo onde os materiais permaneciam no estado linear elástico, um segundo para os materiais não-lineares, em seguida uma análise de convergência avaliando o passo de carga e por fim uma verificação da tolerância para resolução do sistema linear. Para tanto foi utilizado o modelo para viga OA-1 de Bresler e Scordelis (1963) descrita no item 5.1.2.

#### **6.1.1 Convergência de malha para material linear**

Foi efetuada a avaliação de convergência da linha elástica da viga para uma condição dos materiais em estado lineares elásticos. Para esse fim foi construído o modelo da viga OA-1 de Bresler e Scordelis (1963), como descrito no item 5.1.2.

Como resultado da avaliação pode-se afirmar que uma malha com 10 elementos na horizontal e 3 na vertical já alcançou uma convergência em centésimos de milímetros.

#### **6.1.2 Convergência de malha para análise em material não linear físico**

A convergência não-linear física teve a função de avaliar a capacidade da resposta e o tempo para processar as respostas em função da densidade de cada malha. Portanto, avaliando o número de EF em função do tempo do programa para efetuar a análise, na malha de elementos de 10 mm de aresta que possui 5724 elementos, Figura 6-1e levou em torno de 4 horas e 30 minutos enquanto que a malha de 30 mm tem 634 elementos, levou apenas 15 minutos. Foram testadas malhas de 10mm a 200mm de aresta, sendo que os elementos foram calculados para ter a forma mais próxima de um quadrado.

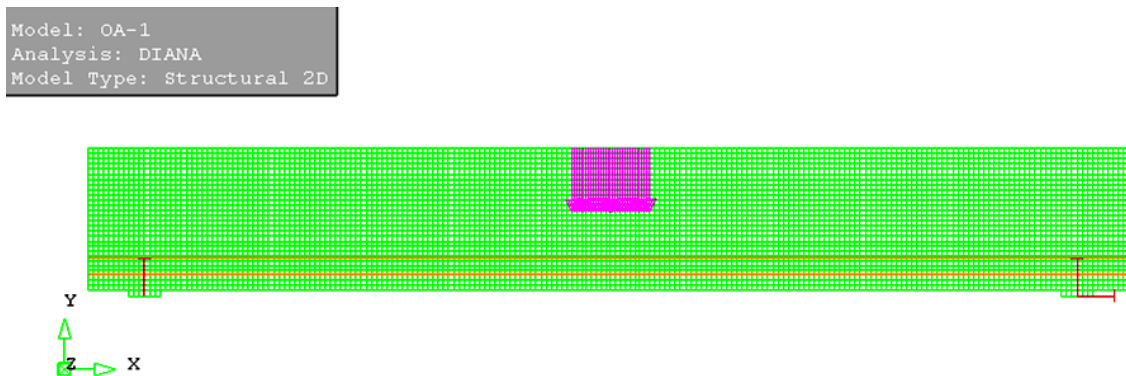


Figura 6-1 Representação de malha de EF com elemento de 10 mm de aresta, malha com 5724 elementos

Como todas as malhas testadas convergiram para o mesmo resultado, o critério para construção da malha em cada modelo seguiu as recomendações dadas por DIANA<sup>®</sup> (2012), para evitar que toda a rigidez da contribuição dos reforços seja aplicada em apenas um elemento finito, portanto, dando preferência a malha de no máximo 30 mm na altura. Outra orientação é a de evitar construir elementos com relações entre as arestas maior que 3 (três), que podem causar modos de deformação inconsistentes.

### 6.1.3 Convergência para passo de carga

Foram testados passos de 0.5 (50 %) a 3.5 (350 %) do passo de carga do ensaio experimental. Todos os passos de carga testados tiveram bons resultados. Exceto para o passo 0.5 onde houve uma pequena dispersão dos outros resultados na parte final da análise.

Para definição do passo de carga foi levado em consideração, que passos de carga maiores levam a quantidades menores de passos totais para atingir a falha. Avaliando apenas o tempo seria interessante optar pelo maior passo, contudo, pode acarretar em problemas para se aproximar dos pontos críticos da análise, como a carga onde ocorre a plastificação das armaduras ou a carga onde há o início da fissuração, por exemplo.

Portanto optou-se pelo passo de carga 1 (100%) que corresponde a efetuar passos de carga de mesma magnitude do experimental de Bresler e Scordelis (1963), e não apresentou problemas quanto a aproximação do momento onde ocorreram eventos importantes para a análise.

### 6.1.4 Verificação da tolerância para resolução do sistema linear

Foi utilizado como critério de convergência a norma por deslocamento, que é uma norma euclidiana para o incremento iterativo de deslocamento. Para verificar a convergência, a norma de deslocamento é verificada em relação a norma dos incrementos de deslocamento na primeira previsão de incremento e, como representado na Figura 6-2 a equação pode ser escrita como

$$\text{Relação de norma de deslocamento} = \frac{\sqrt{\delta \mathbf{u}_i^T \delta \mathbf{u}_i}}{\sqrt{\Delta \mathbf{u}_0^T \Delta \mathbf{u}_0}} \quad (6-1)$$

Com padrão o DIANA<sup>®</sup> (2012) indica o valor de  $10^{-2}$  como valor suficientemente rigoroso para resolução do sistema por norma de deslocamento, para o modelo de EF construído.

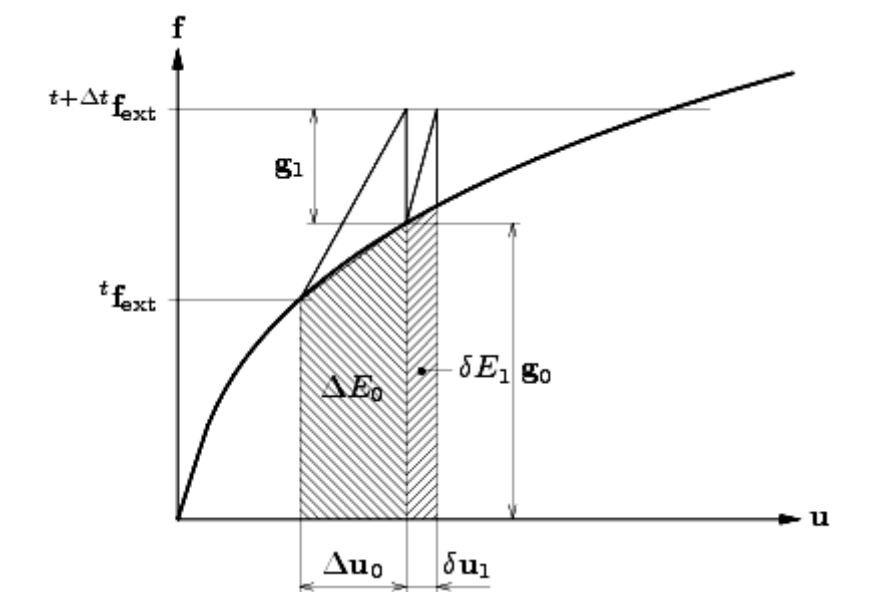


Figura 6-2 Itens para normas de convergência (fonte: DIANA<sup>®</sup>, 2012)

A análise de tolerância foi efetuada para o modelo da viga OA-1 como descrito no item 5.1.2. Normas mais rigorosas que  $10^{-2}$  não trouxeram ganho significativo a resposta; normas menos rigorosas fizeram o modelo saltar o evento da falha por cisalhamento, falhando por flexão. Assim foi assumido para análises posteriores, a tolerância de  $10^{-2}$ , como indicado em DIANA<sup>®</sup> (2012).

## 6.2 CALIBRAÇÃO DOS PARÂMETROS DE RETENÇÃO AO CISALHAMENTO E O ÂNGULO LIMITE

Para se construir um modelo numérico que represente de forma coerente os fenômenos reais, deve-se observá-los e definir ou adaptar uma teoria simplificadora que os descreva, com base no nível de precisão que se quer alcançar e na magnitude dos eventos envolvidos. Daí deve-se definir parâmetros ou equações que representem determinados eventos, de forma a reproduzir o fenômeno na escala desejada.

A importância de se calibrar os parâmetros envolvidos é tanto para criar o entendimento com relação à influência deste parâmetro sobre o modelo utilizado e seus limites de utilização, quanto para definir qual o valor deve ser usado para cada possível variação do evento representado.

Os parâmetros que foram avaliados as faixas de valores e suas influências foram a retenção ao cisalhamento,  $\beta$ , que Bazant e Oh (1983) e Shah et al (1995) a estudam em elementos estruturais contudo, não há uma explícita afirmação sobre sua influência em vigas de concreto armado com falha ao cisalhamento. O segundo termo é o  $\alpha$ , ângulo limite (do inglês, thresholdangle) pode variar de 0 a 90 graus, não sendo definido na literatura valores padrões para o estudo de vigas de concreto armado, ainda que no DIANA<sup>®</sup> seja apresentado, como padrão na entrada, o valor de 60 graus. Diante disso, foi avaliado neste trabalho a influencia deste parâmetro, através da variação de 30, 45 e 60 graus.

Nesta análise, foram mantidos fixos os valores da energia de fratura,  $G_F$ , e a largura de banda de fissuração,  $h$ . Para definir a energia de fratura, foi adotada a equação indicada pelo CEB-FIP (1990), bem como outros valores que foram assumidos dependentes da resistência à compressão e do diâmetro máximo do agregado e, obtidos por meio das definições da NBR 6118:2007. Para a largura de banda de fissuração,  $h$ , foi empregado à equação  $h = \sqrt{A}$ , onde  $A$  representa a área do ponto de integração, portanto, dependente das dimensões da malha de elementos finitos utilizada.

Com a variação do  $\beta$  de 0.999 a 0.15, Figura 6-3, para valores decrescentes houve uma leve redução da rigidez no estágio não linear do elemento estrutural. Valores abaixo de  $\beta=0.15$ , para as características utilizadas, tiveram problema de convergência, com pausa prematura da análise, logo após a formação da macro fissura, a uma carga de aproximadamente 100 kN e uma deflexão próxima de 4 mm.

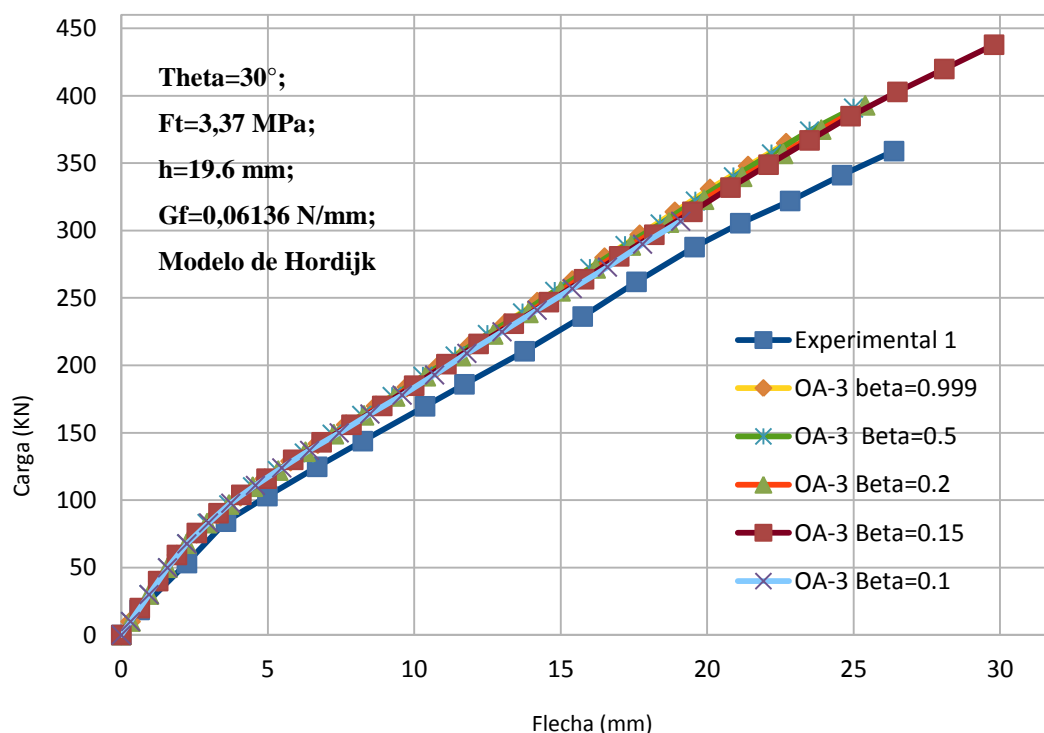


Figura 6-3 Análise de comportamento com a alteração do  $\beta$ , retenção ao cisalhamento na viga OA-3 de Bresler e Scordelis (1963).

Com base nos dados obtidos, foi adotado o valor de 0,2 para o  $\beta$ , por ser o valor indicado em literaturas como Shahet *al* (1995) e DIANA<sup>®</sup> (2012), e estar afastado do valor que provoca instabilidade na resposta numérica.

A Figura 6-4 apresenta a análise do comportamento do modelo da viga OA-3 de Bresler e Scordelis (1963), com a avaliação do ângulo limite. A sua variação provém de uma expressiva alteração de comportamento do modelo para estágios avançados de carregamento. O início de fissuração para todos os modelos se deu a uma carga de 49,9 kN bem como o padrão de fissuração inicial até 90 kN, onde os modelos começam a apresentar diferenças, evidenciadas pela abertura de fissura. Com o ângulo limite em 30 graus o modelo perde capacidade de suporte ao cisalhamento aproximando-se do experimental, bem como no padrão de fissuração que, será apresentado à frente. Essa aproximação deu-se por conta do experimental não ter armadura de suporte a cisalhamento, estribos, assim, a direção das fissuras obtidas, expressavam bem o experimental.

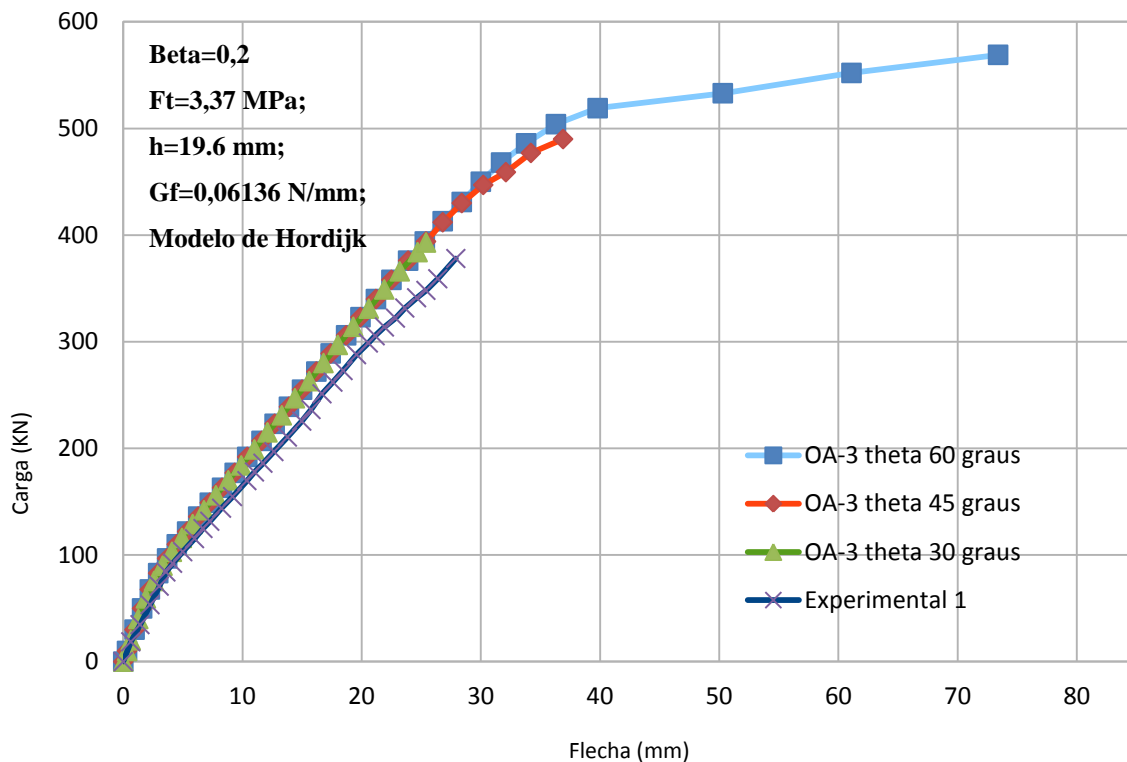


Figura 6-4 Análise de comportamento com a alteração do ângulo limite, para o modelo de fissuração multidirecional na viga OA-3 de Bresler e Scordelis (1963).

Com o ângulo de 45 graus, o modelo se mostrou mais resistente aos esforços cisalhantes, o que se mostrou ideal para representar vigas de concreto armado com estribos verticais, como pode ser visto na Figura 6-5, onde houve ganho de capacidade de suporte sem perder a sensibilidade a ruptura por cisalhamento. Já para o ângulo limite de 60 graus, em ambas as Figura 6-4 e Figura 6-5, pode-se verificar que o modelo perde a sensibilidade à falha por cisalhamento, levando o modelo a apresentar falha por estado limite último, a flexão.



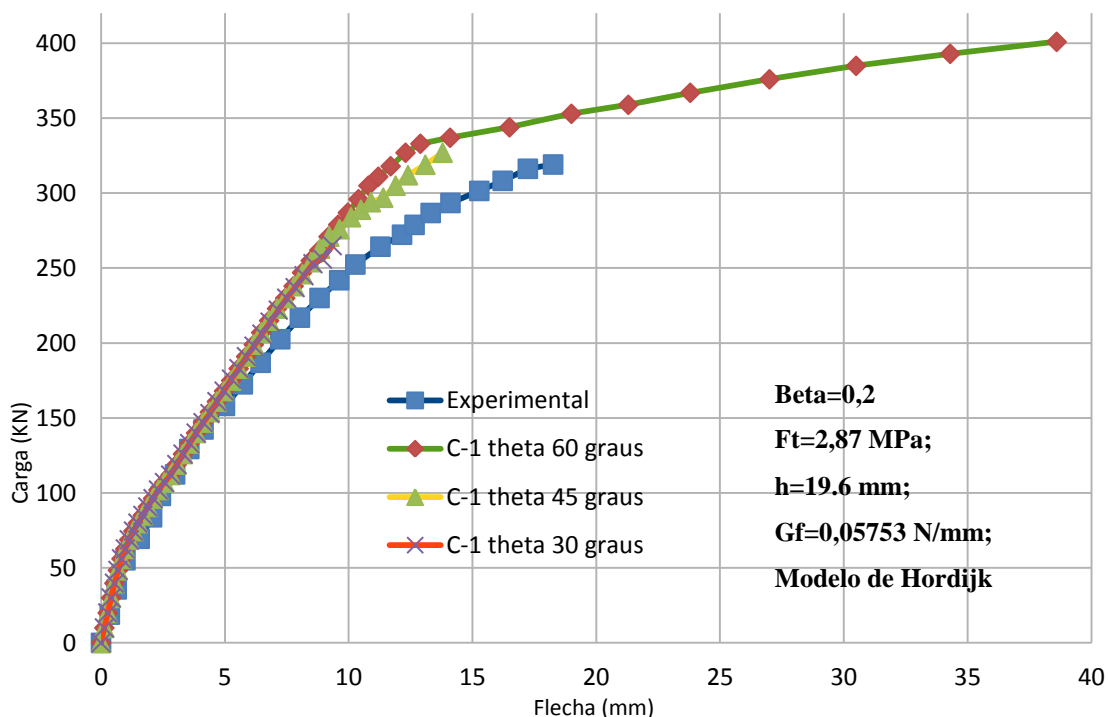


Figura 6-5 Análise de comportamento com a alteração do ângulo limite, para o modelo de fissuração multidirecional na viga C-1 de Bresler e Scordelis (1963).

Com a avaliação dos resultados, será utilizado o ângulo limite de 30 graus para os modelos que representem vigas de concreto armado sem estribos e, o ângulo de 45 graus para vigas de concreto armado com estribos.

### 6.3 AVALIAÇÃO DO MODELO DE VIGAS A FLEXÃO COMPARANDO COM O EXPERIMENTAL DE ÁLVARES (1993)

Com o objetivo de avaliar o modelo numérico proposto no item 5.1.1, será realizada uma comparação com os resultados experimental e numericamente obtidos por Álvares (1993), para as três vigas já referidas no capítulo anterior.

#### 6.3.1 Resultados

Os resultados obtidos para as vigas de Álvares (1993) para carga-deslocamento, tensões normais e cisalhantes, tensões principais, tensões nas armaduras e por fim o mapa de fissuração casos 1, 2 e 3, são apresentados desde a Figura 6-7 até a Figura 6-30.

Para melhor compreender os resultados apresentados nas caixas de diálogo do DIANA®, Figura 6-6, cabe informar que, as linhas referem-se, primeiro, ao nome do arquivo, segundo, indica que as deformações estão ampliadas em 20 vezes, terceiro, a combinação de carga sendo visualizada, quarto, o passo visualizado e a carga atual (onde 3.99 é  $3.99 \times 10^4$  N ou 3.99 tf), quinto, faz referência a informação a ser apresentado que no exemplo, é a tensão nos pontos de Gauss dos elementos finitos na direção XY, seguindo temos no exemplo, as tensões máximas e mínimas em Mpa, e por fim, o tipo de resultado, o qual é um diagrama mapeado dos nós.

```
Model: CAS01-45
Deformation = 20
LC1: Load case 1
Step: 67  LOAD: 3.99
Gauss EL.SXX.G SXY
Max = 6.34
Min = -6.34
Results shown:
Mapped to nodes
```

Figura 6-6 Caixa de diálogo apresentado pelo DIANA®

### 6.3.1.1 Caso 1 (subarmada)

A resposta carga-deslocamento do modelo, Figura 6-7, apresenta boa convergência com o experimental, exceto pelo ramo final (flecha de 7,63 mm), que mostra um patamar horizontal depois da plastificação da armadura. No experimental este trecho é levemente inclinado, com ganho de capacidade de carga. O modelo numérico de Álvares (1993), representado na legenda da Figura 6-7, por EF plano (modelo em elementos finitos planos) e EF tridimensional (modelo em elementos finitos tridimensionais) não evidencia tal variação de inclinação devido às armaduras terem sido consideradas elásticas lineares. Segundo a resposta do modelo proposto o concreto a compressão não esmaga, ou seja, não atinge o ELU a uma deformação de 3,5%. Entretanto, as armaduras plastificam e ainda atingem a deformação de 10%, a uma flecha de 9,71 mm, condizente com um elemento estrutural em domínio 2.

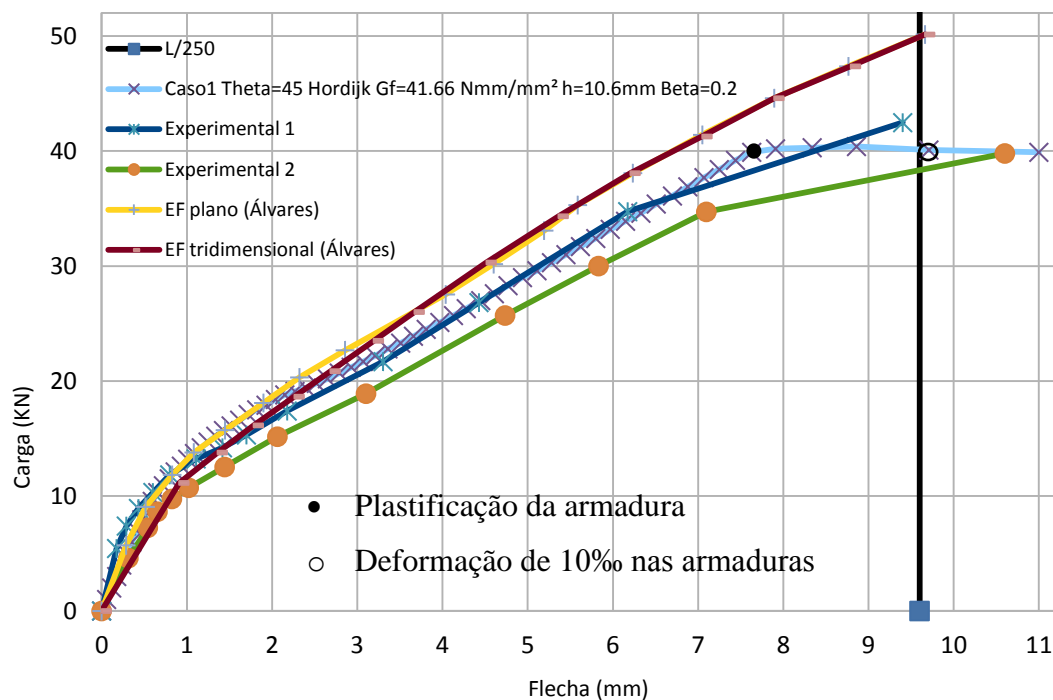


Figura 6-7 Comparativo entre experimental caso 1 Álvares (1993) e modelos numéricos

A Figura 6-8 apresenta as tensões cisalhantes na viga caso 1 de Álvares (1993) a partir do modelo desenvolvido no DIANA<sup>®</sup> apresentado no item 5.1.1. Observa-se que os valores máximos para essas tensões (6,34 e -6,34 MPa) ficaram localizadas nos apoios, e no restante da viga não ultrapassa a faixa de 2.5 MPa a -2.5 MPa. Essa concentração de tensões advém do fato do modelo considerar que os apoios estão aplicados pontualmente no concreto, que normalmente não condiz com o que é executado em um ensaio experimental, onde se utiliza uma chapa sobre um cilindro, para simular um apoio de primeiro gênero e também evitar concentração de tensões.

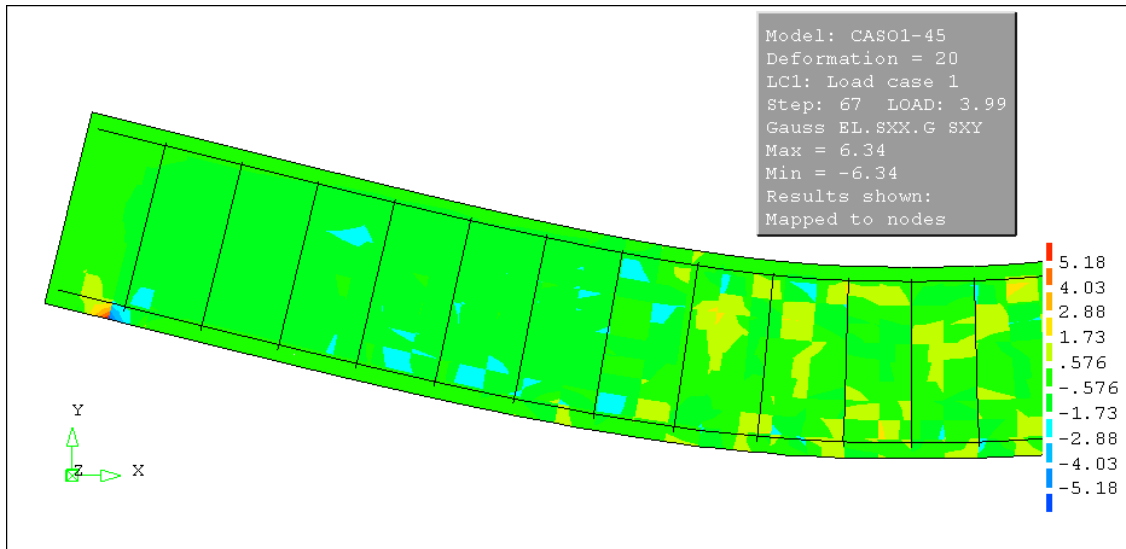


Figura 6-8 Tensões cisalhante  $\sigma_{xy}$  para a carga última do modelo da viga Caso-1 de Álvares (1993).

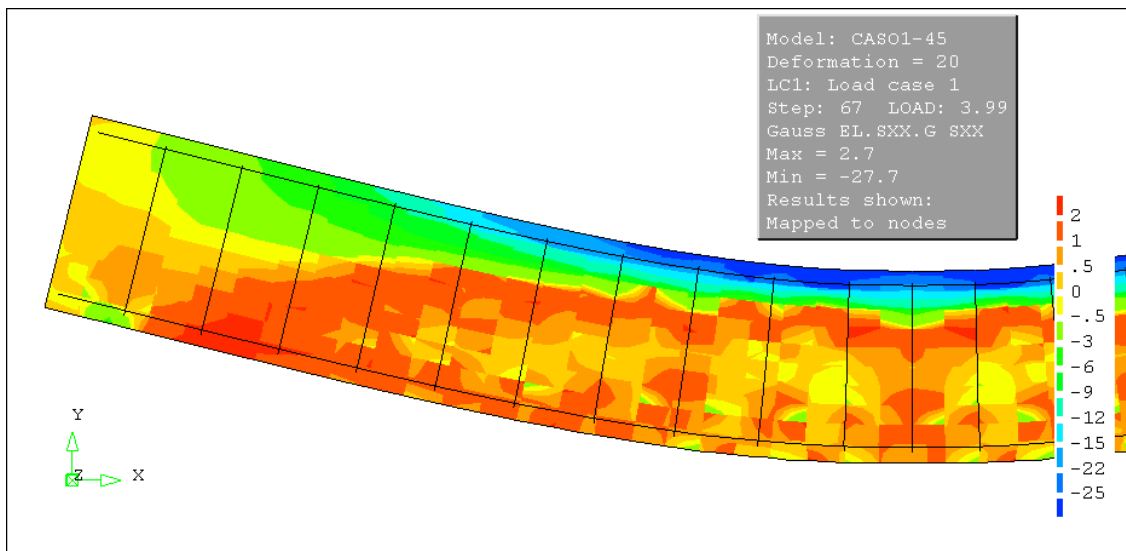


Figura 6-9 Tensões na direção de x para modelo do caso 1 de Álvares (1993).

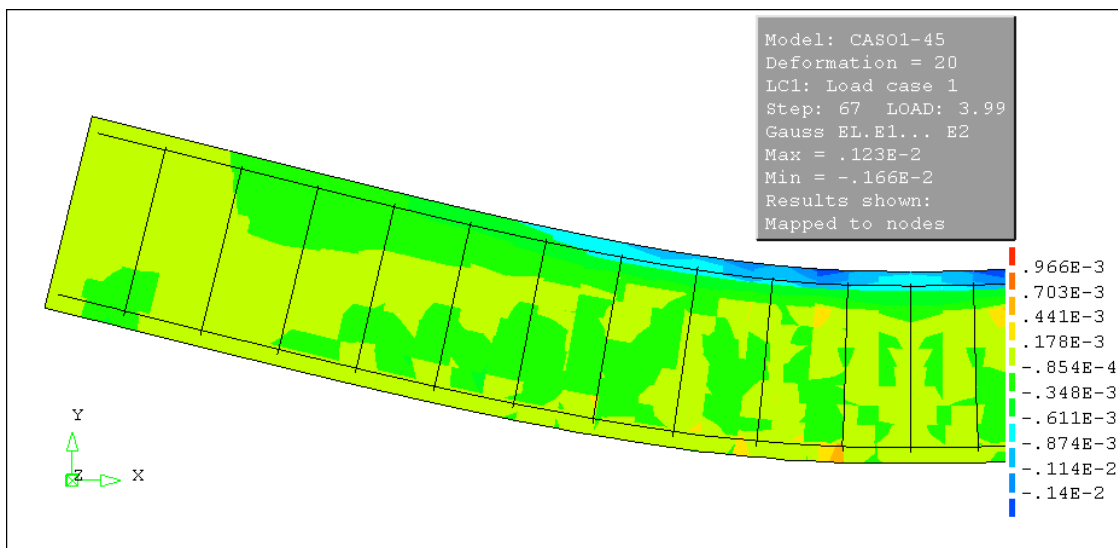


Figura 6-10 Deformação principal para modelo do caso 1 de Álvares (1993).

A partir das tensões na direção de x do elemento estrutural, Figura 6-9, pode-se confirmar que as tensões, em alguns pontos, excedem o limiar de resistência a compressão estabelecido, que foi de 26,77 MPa. Entretanto, com a análise das deformações máximas de encurtamento, verifica-se que não se excedeu o valor de 3,5% (Figura 6-10), que caracteriza o esmagamento no concreto comprimido. Assim, julga-se que o modelo está indicando um comportamento associado a um elemento subarmado.

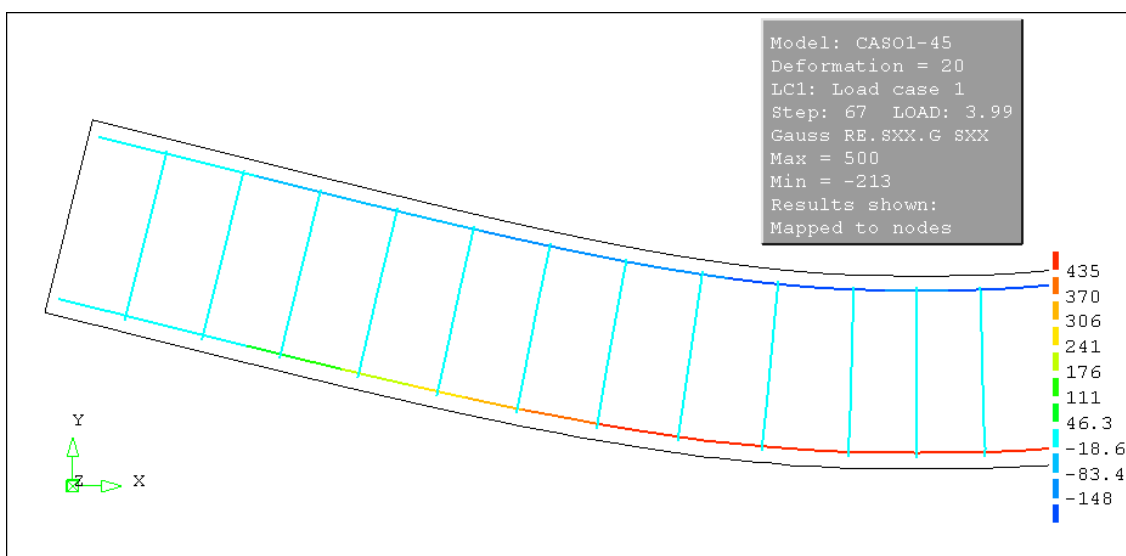


Figura 6-11 Tensões axiais nas armaduras longitudinais do modelo caso 1 de Álvares (1993).

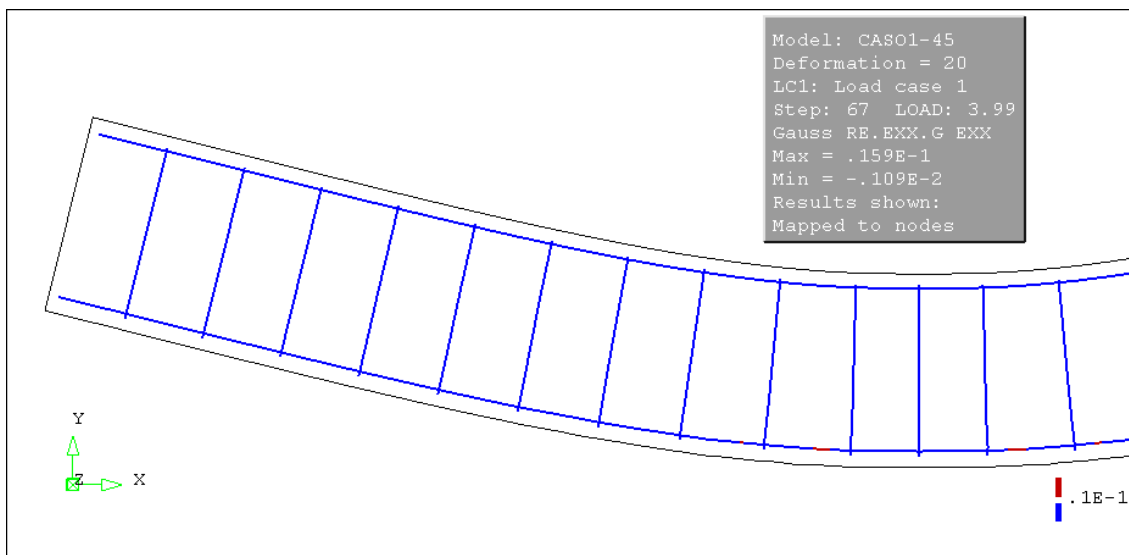


Figura 6-12 Deformação axiais acima do limite de 10‰, nas armaduras longitudinais do modelo caso 1 de Álvares (1993).

As tensões axiais de tração nas barras atingiram a plastificação estabelecida pela tensão de escoamento de 500 MPa, como indica a Figura 6-11. Esta tensão foi atingida no ponto onde houve a mudança rápida de curvatura (deslocamento de 7,5 mm). Pontos das armaduras para a carga última apresentavam uma deformação de 16‰, Figura 6-12, reafirmando que o modelo condiz com o elemento estrutural subarmado (em domínio 2), pois o concreto à compressão está a uma deformação de apenas 1,7‰ para a mesma condição de carregamento.

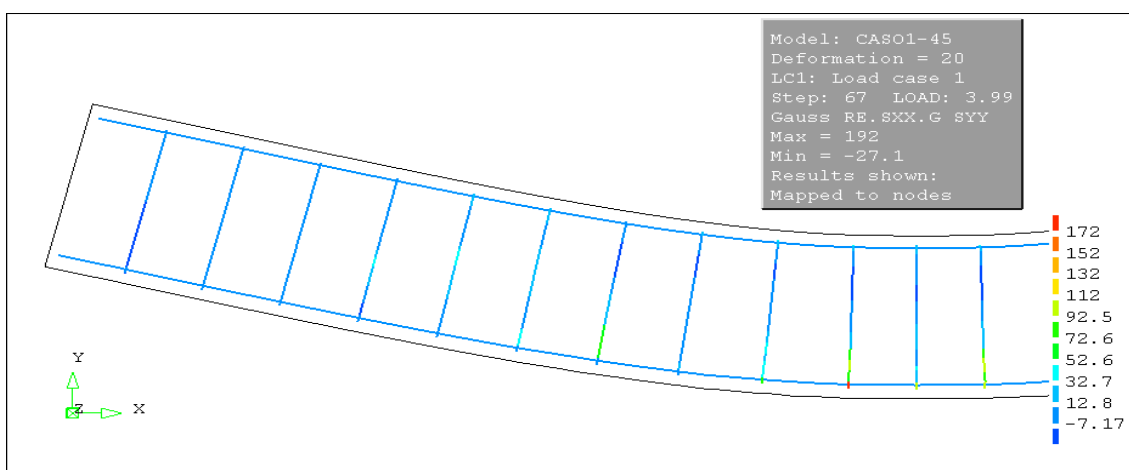


Figura 6-13 Tensões axiais nas armaduras transversais do modelo caso 1 de Álvares (1993).

A tensão nas armaduras transversais, para a carga última, está inferior a tensão de escoamento do aço, segundo o modelo. Na Figura 6-13, vê-se que a tensão máxima foi de 192 MPa, indicando que ainda havia suporte por parte das armaduras transversais.

O mapa de fissuração gerado pelo modelo, Figura 6-14, indica que as fissuras no terço central se propagaram excessivamente, elevando a linha neutra para limites fora do equilíbrio da seção transversal. A abertura máxima de fissura foi de 0,33 mm, pelo modelo, localizada no terço central. Pelo código normativo NBR 6118:2007, para não haver influência significativa na corrosão das armaduras, a máxima abertura de fissura para elementos estruturais de concreto armado sujeitos a classe de agressividade II é de 0,3 mm. Esse valor é apenas uma referência, portanto, pode haver pequenas variações do que é apresentado experimentalmente com as equações que a referida norma indicam, assim assume-se que o dimensionamento de Álvares (1993) está coerente com a análise numérica aqui desenvolvida.

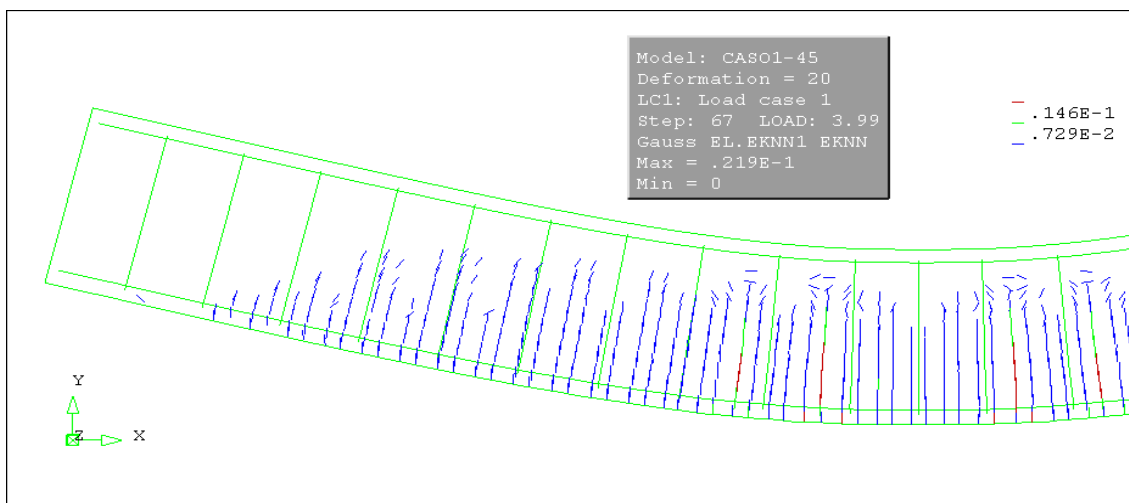


Figura 6-14 Mapa de fissuração para a carga última do modelo do caso 1 de Álvares (1993).

A forma para obter a dimensão da abertura de fissura adotou o seguinte conceito. O elemento finito adotado tem as dimensões 30 de largura por 15 de altura e é o CQ16M que possui 4 pontos de Gauss, como na Figura 4-15. A deformação total é a deformação elástica somada à deformação de fratura, bem como a deformação normal de fratura ( $\epsilon_{nn}^{cr}$ ) representa as deformações por abertura de fissura que são calculadas para cada ponto de Gauss do elemento finito. Avaliando que a fissura do modelo em seu ponto de maior magnitude está localizada no centro da viga e, é vertical ao eixo da viga, as fissuras serão também verticais a largura do elemento finito, 30 mm.

Como a largura de influência de cada ponto de Gauss no CQ16M para o elemento finito adotado é 15 mm, pode-se obter pela equação de deformação, equação (6-2), a abertura de fissura.

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (6-2)$$

onde  $\varepsilon$  será substituído por  $\varepsilon_{mn}^{cr}$ ,  $\Delta l$  será a abertura de fissura  $w$  e  $l$  o comprimento de influência do ponto de Gauss.

### 6.3.1.2 Caso 2 (normalmente armada)

Na resposta carga-deslocamento mostrada na Figura 6-15, verifica-se que o modelo apresenta boa convergência com o experimental. O início da fissuração coincide com a perda de rigidez inicial apresentada no experimental. A inclinação do gráfico carga-flecha do ramo pós fissuração é próxima ao das amostras, bem como o ponto onde as armaduras e o concreto comprimido plastificam. Com a análise dos resultados pode-se confirmar que o modelo prevê ruptura por flexão similar ao comportamento experimental.

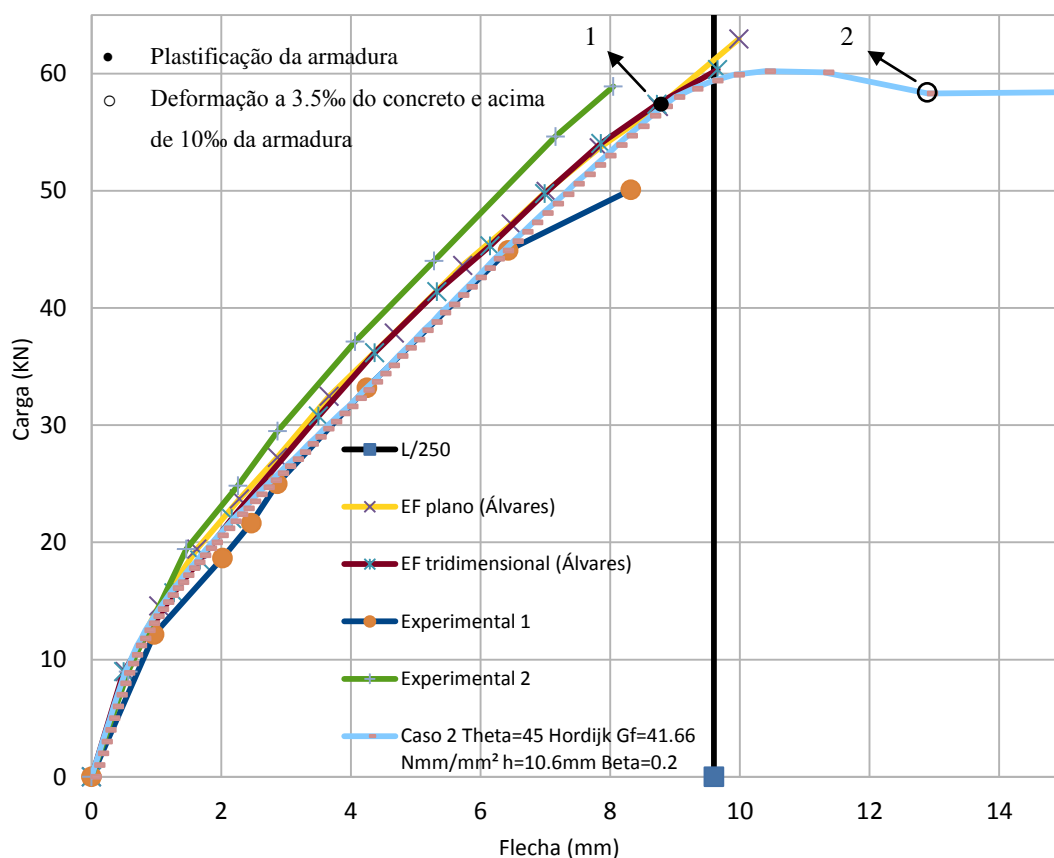


Figura 6-15 Comparativo entre experimental caso 2 Álvares (1993) e modelos numéricos.



A Figura 6-16 apresenta as tensões cisalhantes na viga caso 2 de Álvares (1993) a partir do modelo do DIANA<sup>®</sup> o passo de carga 86 está localizado no ponto 2 da Figura 6-15. Verifica-se que os valores máximos 9,92 e -9,92 MPa, ficaram localizadas nos apoios, no restante da viga a tensão não ultrapassa a faixa 3.5 MPa a -3.5 MPa.

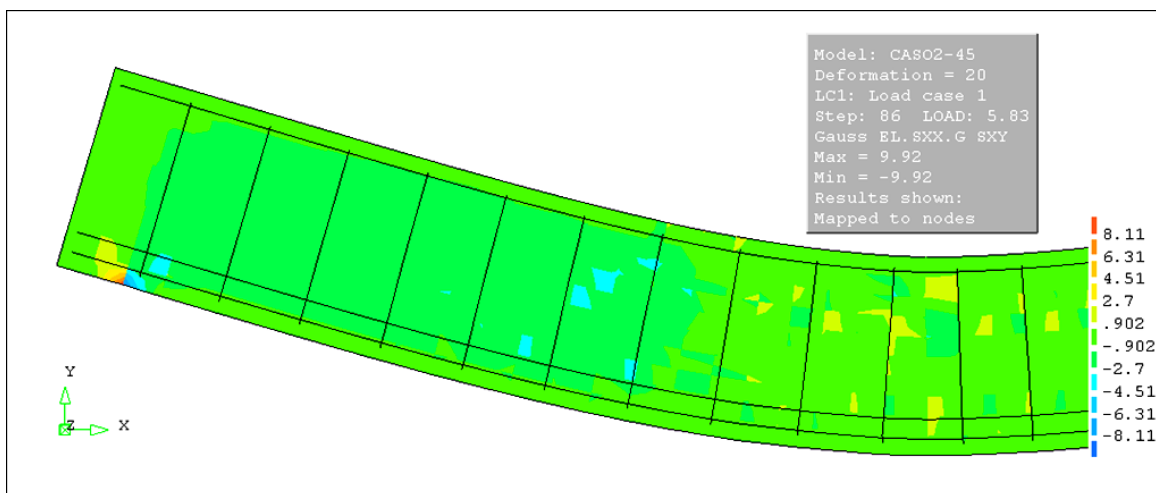


Figura 6-16 Tensões cisalhante  $\sigma_{xy}$  para a carga que caracteriza a falha do modelo da viga Caso-2 de Álvares (1993).

A partir das tensões na direção de x do elemento estrutural Figura 6-17, pode-se confirmar que as tensões, nas camadas superiores do terço central excedem o limiar linear elástico estabelecido. Na análise das deformações máximas de encurtamento verifica-se que neste passo as deformações de encurtamento estão muito próximas de 3,5‰, Figura 6-18, caracterizando que houve esmagamento do concreto comprimido. Nos poucos passos seguintes, o modelo não mais encontra uma condição de equilíbrio, característica da ruptura por flexão.

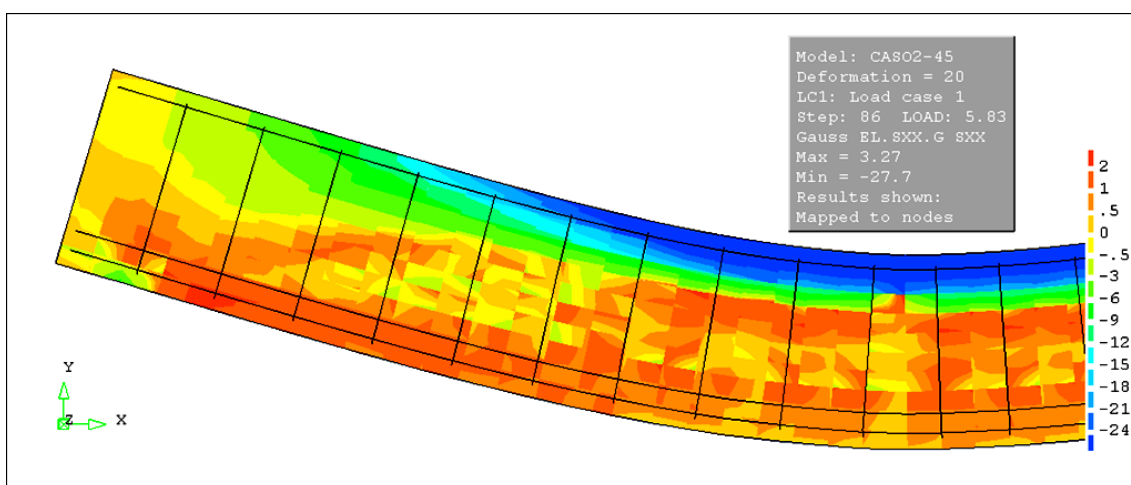


Figura 6-17 Tensões na direção de x para modelo do caso 2 de Álvares (1993).

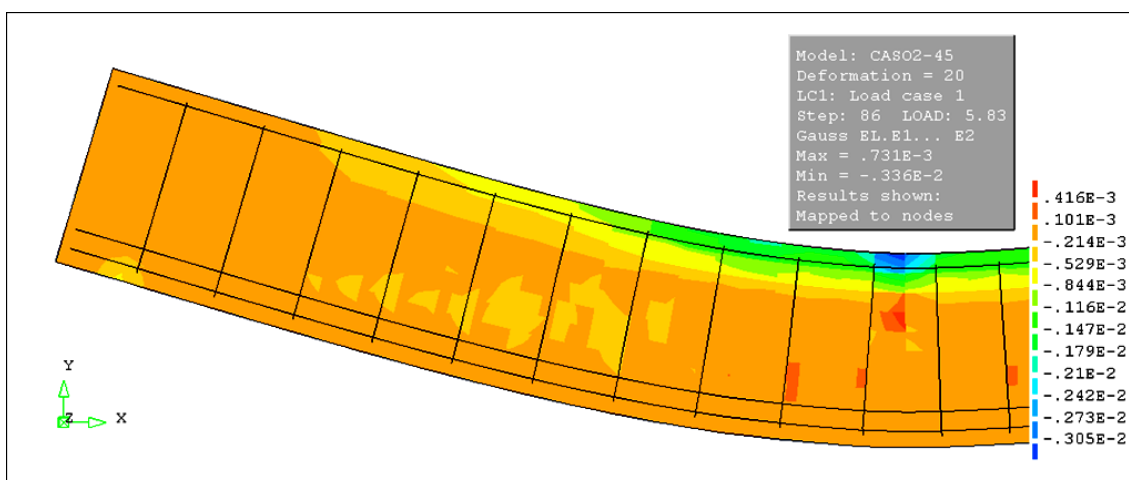


Figura 6-18 Deformação principal para modelo do caso 2 de Álvares (1993).

As armaduras alcançam a tensão de escoamento um pouco antes, numa carga de 57,2 kN (Figura 6-19). Entretanto, a deformação de 10%, (Figura 6-20), só é excedida a 58,3 kN, juntamente com a aproximação da deformação de 3,5% no concreto comprimido, o que condiz com o dimensionamento de um elemento no limite entre o domínio 2 e o domínio 3.

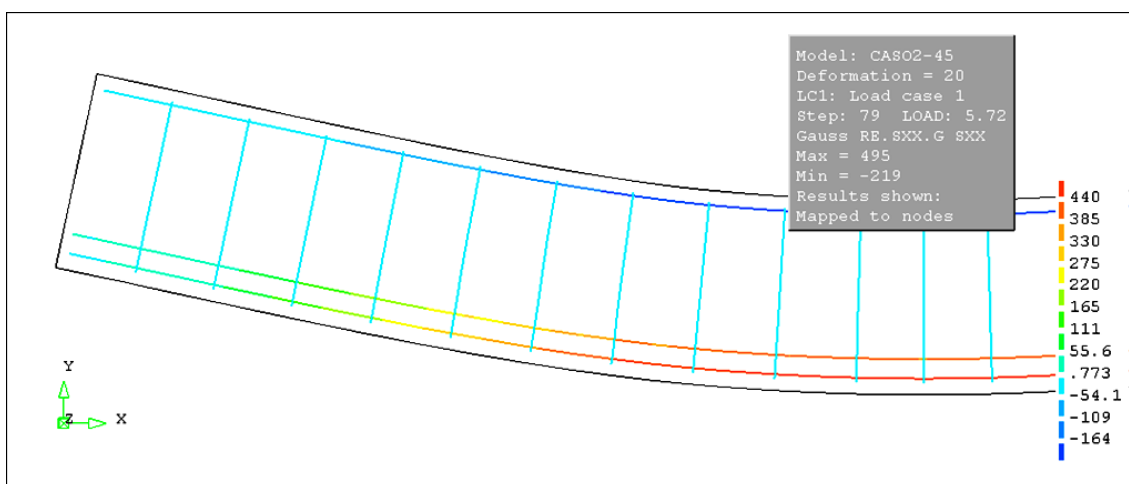


Figura 6-19 Tensões axiais nas armaduras longitudinais ao atingir a tensão de escoamento, do modelo caso 2 de Álvares (1993).

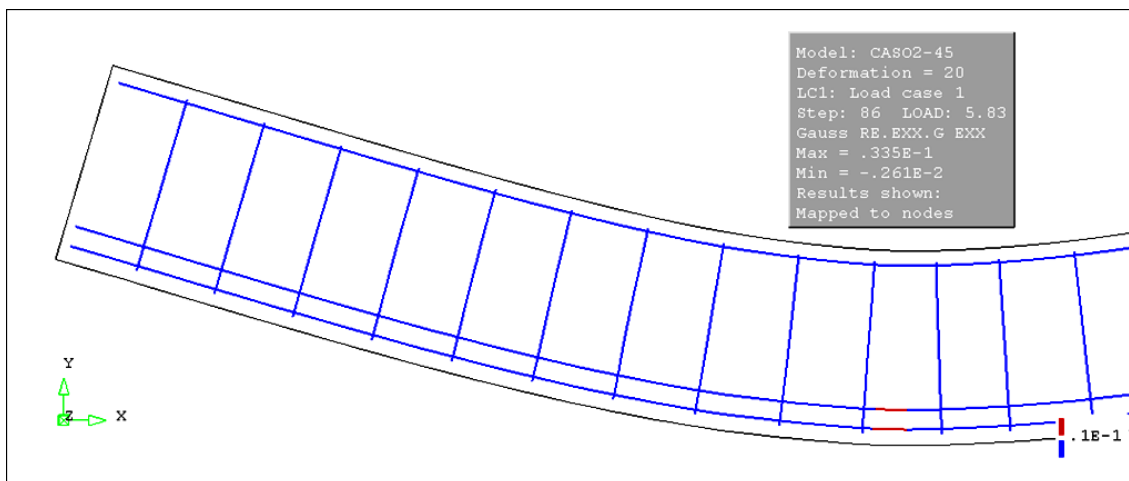


Figura 6-20 Deformação axiais acima do limite de 10%, nas armaduras longitudinais do modelo caso 2 de Álvares (1993).

A tensão nas armaduras transversais no estado limite último (ELU), está inferior à tensão de escoamento das armaduras, segundo o modelo. Na Figura 6-21 a tensão máxima foi de 122 MPa, indicando que ainda havia suporte por parte das armaduras transversais.

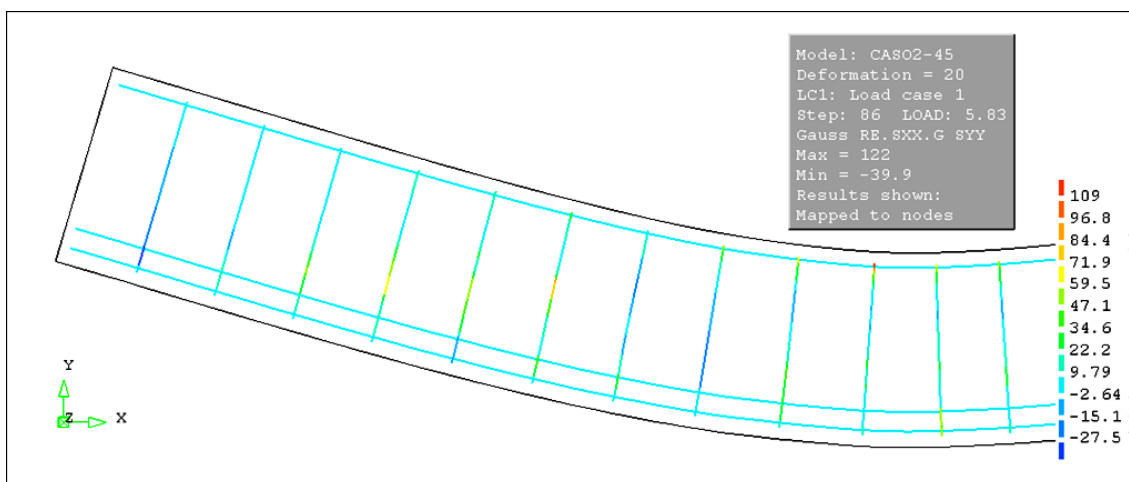


Figura 6-21 Tensões axiais nas armaduras transversais do modelo caso 2 de Álvares (1993).

No ponto de equilíbrio anterior a carga última, a abertura de fissura é de 0,201 mm a 60,1 kN, carga máxima, e a uma deflexão no centro da viga de 11,3 mm. Todavia há um salto na progressão da dimensão da abertura de fissura quando se alcança as deformações limites para o concreto e para aço, 3,5‰ e 10,0‰ respectivamente.

O mapa de fissuração mostrado na Figura 6-22 revela que a propagação da fissura no meio do vão, elevou a linha neutra no local onde a partir das Figura 6-18 e Figura 6-20 apresentam as deformações do ELU. A abertura máxima de fissura no ELU

foi de 0,59 mm, pelo modelo, para uma carga de 58,3 kN a uma deflexão no centro da viga de 12,9 mm. Pelo código normativo, NBR 6118:2007, para não haver influência significativa na corrosão das armaduras à abertura de fissura, para elementos estruturais de concreto armado sujeitos a classe de agressividade II, é de 0,3 mm.

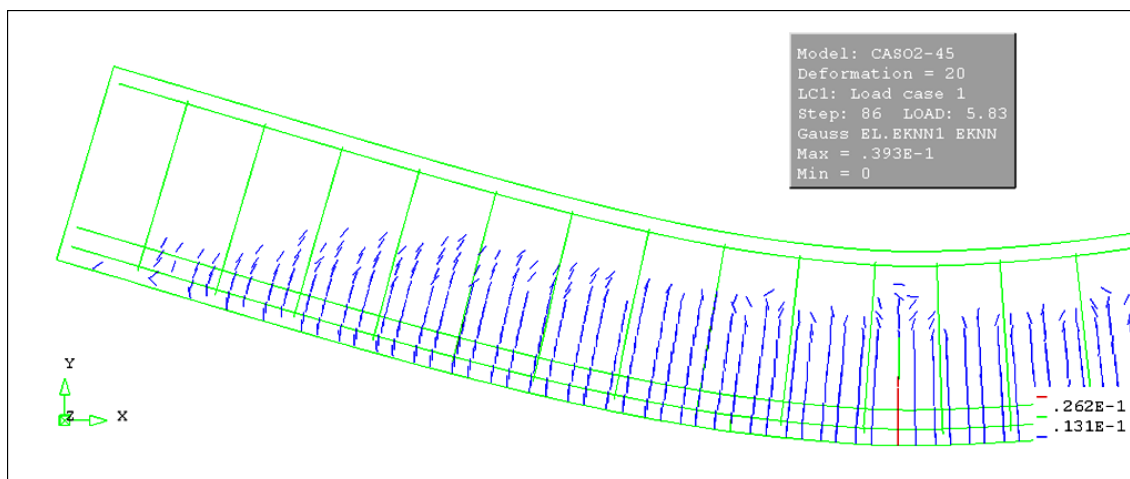


Figura 6-22 Mapa de fissuração para a carga última do modelo do caso 2 de Álvares (1993).

### 6.3.1.3 Caso 3 (superarmada)

O gráfico carga-deslocamento, Figura 6-23, gerado pelo modelo numérico apresenta boa convergência com o experimental. Isso porque o caminho de equilíbrio foi bem caracterizado identificando com precisão adequada, tanto a magnitude quanto o instante das perdas de rigidez devido ao início de fissuração e a plastificação do aço e do concreto comprimido.

A Figura 6-24 apresenta as tensões cisalhantes na viga caso 3 de Álvares (1993), a partir do modelo do DIANA<sup>®</sup>. Mais uma vez em função das características do modelo os valores máximos foram de -13,3 a 13,3 MPa, localizados nos apoios, valores inconsistentes para concreto convencional, caracterizando uma fuga acentuada da realidade, todavia, no restante da viga as tensões não ultrapassam 3.5 MPa a -3.5 MPa.

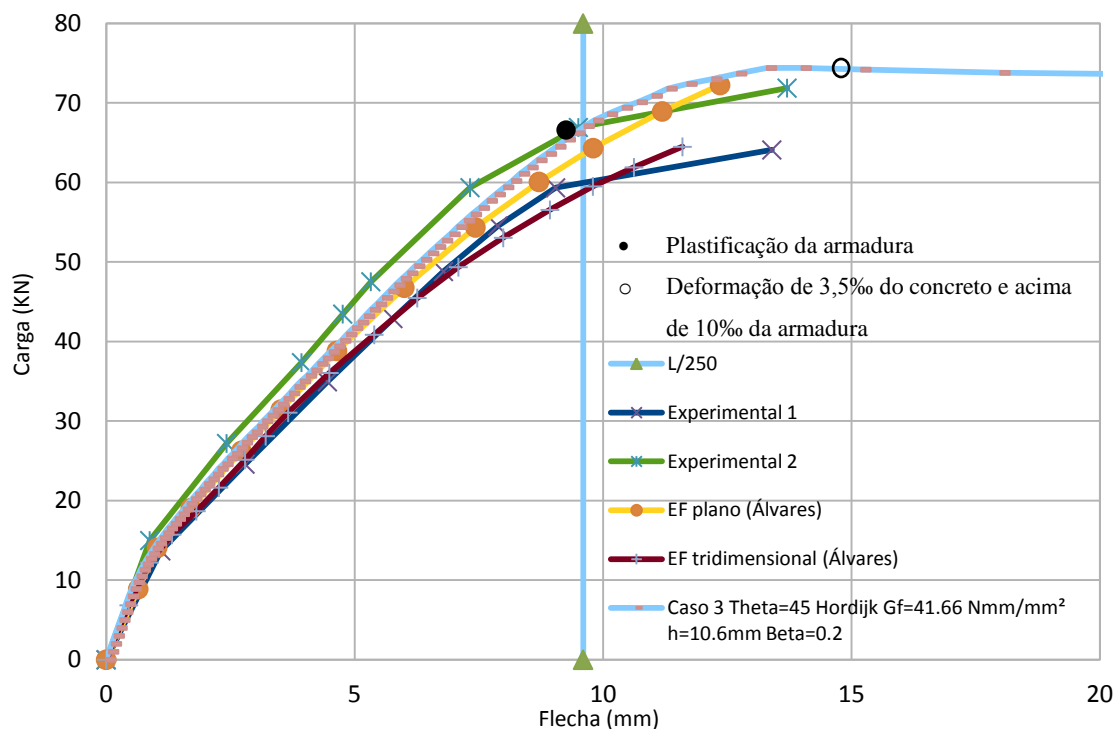


Figura 6-23 Comparativo entre experimental caso 3 Álvares (1993) e modelos numéricos.

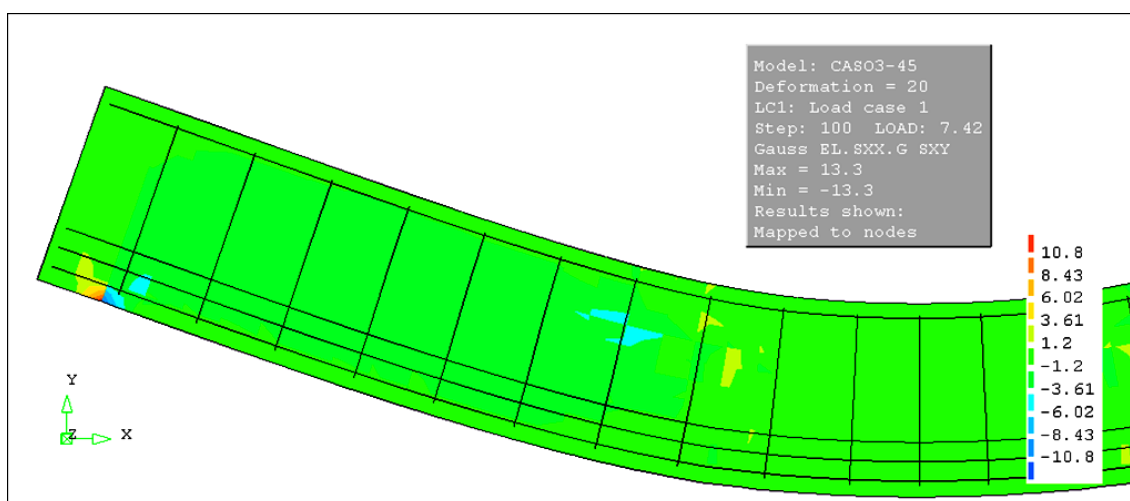


Figura 6-24 Tensões cisalhante  $\sigma_{xy}$  para a carga que caracteriza a falha do modelo da viga Caso-3 de Álvares (1993).

A Figura 6-25 apresenta as tensões na direção do eixo x, com a avaliação das mesmas é possível identificar que as tensões excederam a resistência a compressão para o modelo de plasticidade com critério de von Mises de 26.77 MPa. Na análise das deformações máximas de encurtamento, Figura 6-26, as mesmas alcançam 3,5% a uma carga de 74,2 kN e deflexão de 15 mm, indicando que houve esmagamento no concreto comprimido.

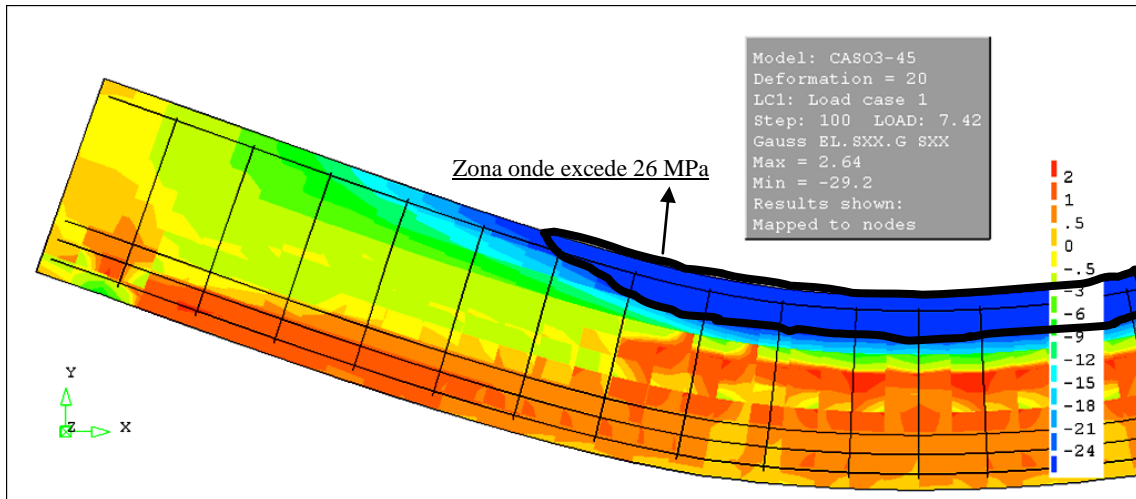


Figura 6-25 Tensões na direção de x para modelo do caso 3 de Álvares (1993).

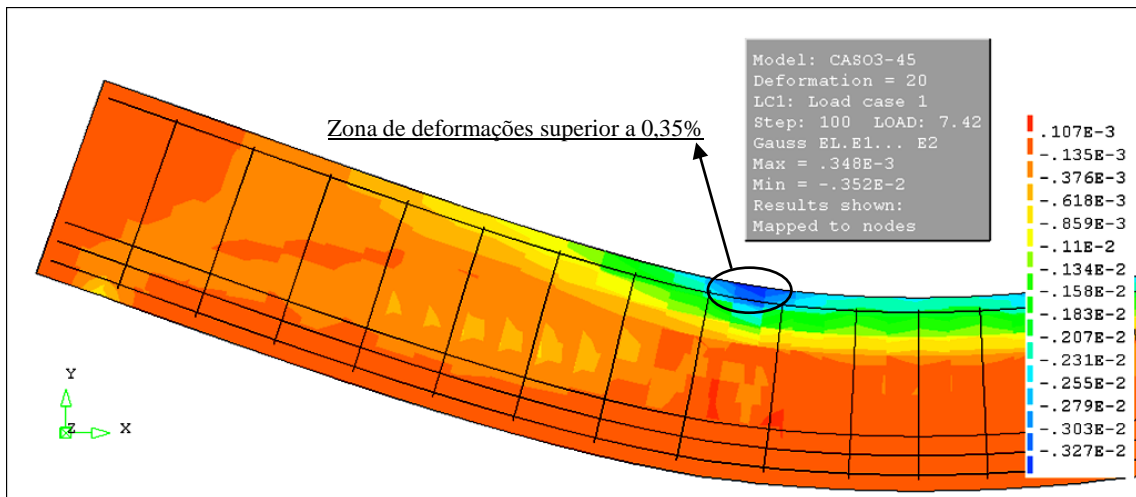


Figura 6-26 Deformação principal para modelo do caso 3 de Álvares (1993).

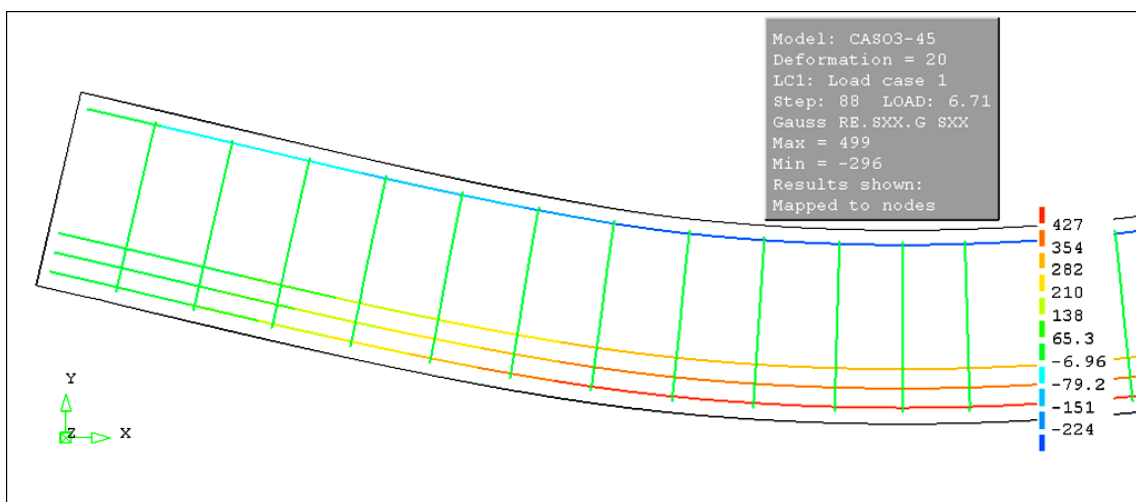


Figura 6-27 Tensões axiais nas armaduras longitudinais ao ser atingido a tensão de escoamento das armaduras no modelo para o caso 3 de Álvares (1993).

As armaduras alcançam a tensão de escoamento um pouco antes do estado limite último para o concreto, numa carga de 67,1kN, onde o concreto apresenta uma tensão já superior ao limite estabelecido contudo com uma deformação inferior a 3,5‰, conforme Figura 6-27. As deformações acima de 10‰ Figura 6-28, só se deram a 74,2kN no centésimo passo de carga efetuado, juntamente com a deformação de 3,5‰ do concreto comprimido. Com a progressão do ensaio numérico, para o modelo, não foi mais possível estabelecer uma condição de equilíbrio, caracterizando uma ruptura por tração na flexão. Portanto, o modelo apresentou uma condição limite entre o domínio 2 e o 3 diferente do previsto no dimensionamento realizado por Álvares (1993).

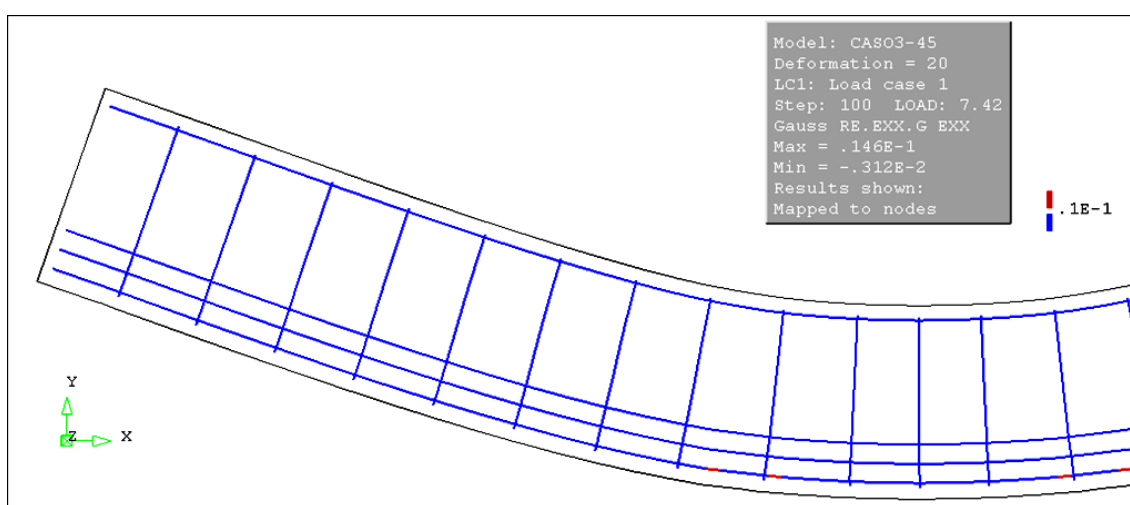


Figura 6-28 Deformações axiais acima do limite de 10‰, nas armaduras longitudinais do modelo caso 3 de Álvares (1993).

De acordo com o apresentado por Álvares (1993), foi previsto para a viga do caso 3 um dimensionamento superarmado, ou seja, em domínio 4, que deve desenvolver deformações de esmagamento no concreto sem que o ELU das armaduras fosse atingido. Contudo, isso é plausível pela simplificação do modelo de dimensionamento que admite um centro geométrico único para o conjunto de barras tracionadas, no cálculo das tensões. Isso se confirma ao analisar as barras da parte mais inferior da viga, essas estão submetidas a tensões muito mais elevadas que as demais, bem como o ELU só é atingido em trechos da mesma.

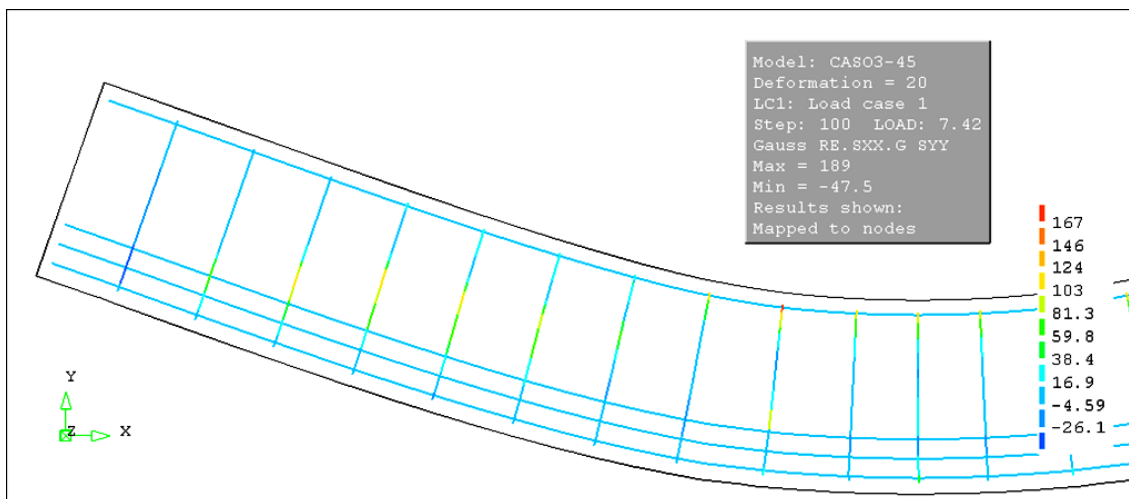


Figura 6-29 Tensões axiais nas armaduras transversais do modelo caso 3 de Álvares (1993).

A tensão nas armaduras transversais no estado limite último está inferior à tensão de escoamento das armaduras, segundo o modelo. Na Figura 6-29a tensão máxima foi de 189 MPa, indicando que ainda havia suporte por parte das armaduras transversais.

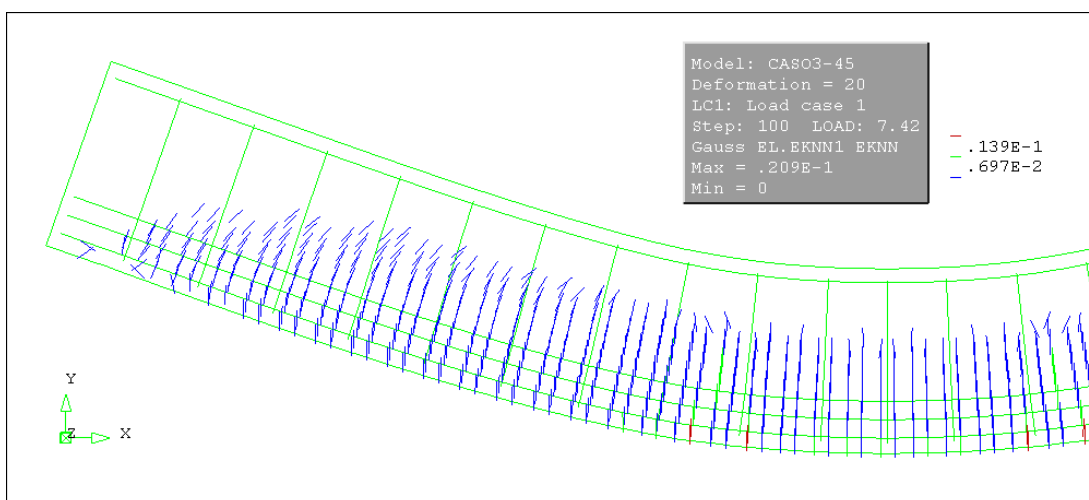


Figura 6-30 Mapa de fissuração para a carga última do modelo do caso 3 de Álvares (1993).

O mapa de fissuração Figura 6-30 apresenta a propagação de fissuras no terço central da viga, elevando a linha neutra e segundo a Figura 6-26e Figura 6-28 apresentam as deformações do ELU do concreto e do aço. A abertura máxima de fissura foi de 0,314 mm, pelo modelo, compatível com o código normativo NBR 6118:2007 que indica 0,3 mm.



### 6.3.2 Considerações

Pela análise dos resultados acredita-se que o modelo numérico teve bom desempenho para prever o comportamento à flexão das vigas analisadas. As cargas de pico, modos de ruptura e comportamento carga-deslocamento foram previstos com boa precisão. Para o estado limite último os resultados numéricos apresentados na Tabela 6-1 a Tabela 6-4 foram bastante promissores. Em função da carga, a variação dos modelos, não foi maior que 15% comparando com as duas respostas experimentais de cada viga. Para o deslocamento exceto para o caso 2, onde houve variação maior que 15%, chegando a aproximadamente 38% de variação em relação aos experimentais.

Tabela 6-1 Carga última para experimental e numéricos de Álvares (1993), e carga para estado limite último do modelo no DIANA<sup>®</sup>

Viga	Carga última (kN)				
	Experimental 1	Experimental 2	Numérico Diana <sup>®</sup>	Álvares, 1993	
				EF plano	EF tridimensional
Caso 1	42,48	39,8	39,9	50,15	50,15
Caso 2	50,09	58,9	58,3	62,95	60,34
Caso 3	64,1	71,88	74,2	72,26	64,5

Tabela 6-2 Variação percentual da carga última, entre os dados experimentais e os modelos numéricos do DIANA<sup>®</sup> e de Álvares (1993).

Viga	Variação $\Delta$ (%)					
	Experimental 1			Experimental 2		
	Numérico Diana <sup>®</sup>	Álvares, 1993		Numérico Diana <sup>®</sup>	Álvares, 1993	
EF plano		EF tridimensional	EF plano		EF tridimensional	
Caso 1	6,47	-15,29	-15,29	-0,25	-20,64	-20,64
Caso 2	-14,08	-20,43	-16,99	1,03	-6,43	-2,39
Caso 3	-13,61	-11,29	-0,62	-3,13	-0,53	11,44

Tabela 6-3 Deslocamento último para experimentais e numéricos Álvares (1993), e deslocamento para estado limite último do DIANA<sup>®</sup>.

Viga	Deslocamento último no centro da viga (mm)				
	Experimental 1	Experimental 2	Numérico Diana <sup>®</sup>	Álvares, 1993	
				EF plano	EF tridimensional
Caso 1	9,4	10,6	11	9,66	9,66
Caso 2	8,32	8,05	12,9	9,99	9,66
Caso 3	13,4	13,71	15,2	12,39	11,6

Tabela 6-4 Variação percentual de descolamento último, entre os dados experimentais e os modelos numéricos do DIANA<sup>®</sup> e de Álvares (1993).

Variação $\Delta$ (%)						
Viga	Experimental 1			Experimental 2		
	Numérico Diana <sup>®</sup>	Álvares, 1993		Numérico Diana <sup>®</sup>	Álvares, 1993	
		EF plano	EF tridimensional		EF plano	EF tridimensional
Caso 1	-14,55	-2,69	-2,69	-3,64	9,73	9,73
Caso 2	-35,50	-16,72	-13,87	-37,60	-19,42	-16,67
Caso 3	-11,84	8,15	15,52	-9,80	10,65	18,19

#### 6.4 MODELO NUMÉRICO PARA PREVISÃO DE CISALHAMENTO PARA VIGA OA-3 DE BRESLER E SCORDELIS (1963).

Nesse item faz-se o um estudo comparativo entre os resultados numéricos deste trabalho e os de Gamino (2007) e Vecchio (2000) bom como o de Vecchio e Shim(2004), sendo este último apenas de forma qualitativa, para a Viga AO-3 dos estudos experimentais de Bresler e Scordelis (1963).

##### 6.4.1 Resultados

A malha utilizada está apresentada na Figura 6-31, bem como as condições de apoio e o carregamento, que foi aplicado em forma de força distribuída sobre os nós dos elementos finitos. A carga foi aplicada na face superior central do elemento estrutural, como forma de reproduzir a chapa utilizada para evitar concentração de tensões, como descrito no ensaio de Bresler e Scordelis(1963). Sem esse artifício, surge um bulbo de tensões muito elevadas, abaixo da carga aplicada que leva a ruptura prematura da viga pelo modelo.

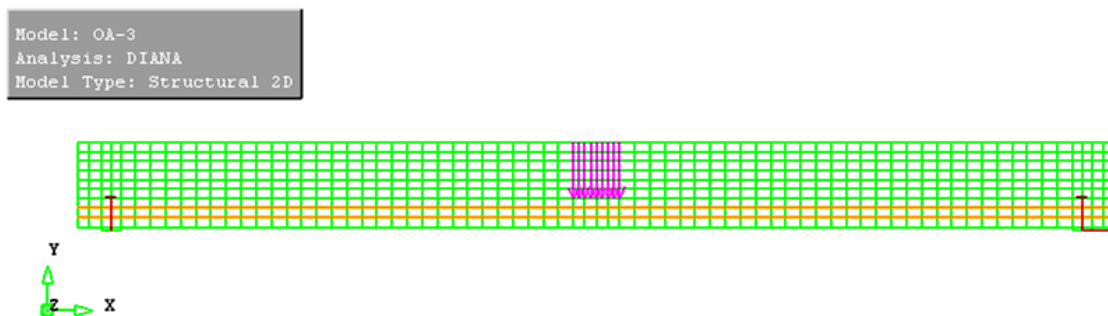


Figura 6-31 Representação de malha de EF utilizada

Os resultados aqui obtidos, a partir do modelo numérico, para diagrama carga-deslocamento, tensões normais e cisalhantes, tensões principais, tensões nas armaduras e mapa de fissuração para a viga OA-3 estão apresentados nas Figuras 6-32 a 6-39.

A Figura 6-32 apresenta o gráfico carga-deslocamento da viga AO-3 de Bresler e Scordelis (1963), e o comparativo entre as correspondentes respostas numéricas do DIANA® e dos modelos de Vecchio (2000) e Gamino (2007), os quais diferem

basicamente pela aplicação dos modelos de fissuração multidirecional, rotacional e fixo, respectivamente.

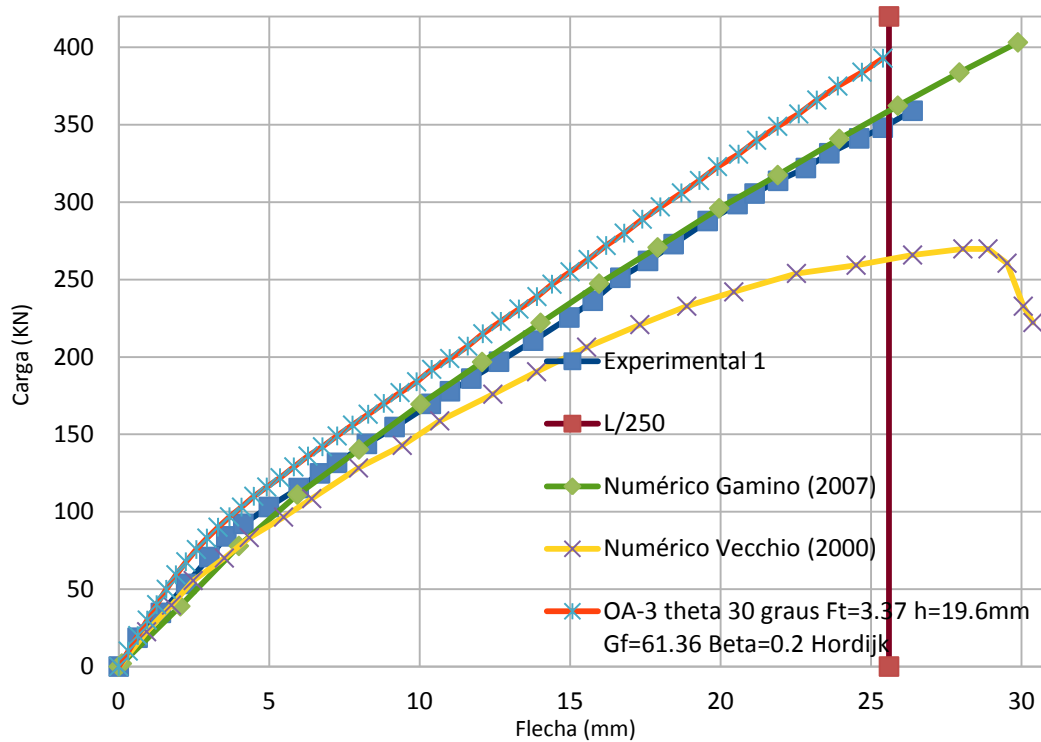


Figura 6-32 Comparativo entre experimental OA-3 de Bresler e Scordelis (1963) e modelos numéricos

O resultado de Vecchio (2000) foi obtido de um modelo em EF usando a teoria de campo de compressão diagonal modificado (TCCDM) publicada por Vecchio e Collins em 1986. O modelo impõe ainda duas condições como forma de mensurar a resistência do concreto pós-fissura, primeiro é o limite de abertura de fissura que, impõe para o caso, que a partir da abertura de 2 mm o concreto a compressão teria sua capacidade de suporte reduzida, conforme equação(6-3).

$$\begin{cases} f_{c2} = f'_{c2} \left[ 5 - \frac{w}{3} \right]; & 2 \leq w \leq 5 \text{ mm} \\ 0 & ; \quad w > 5 \text{ mm} \end{cases} \quad (6-3)$$

onde  $f_{c2}$  é a tensão principal de compressão e  $f'_{c2}$  é a tensão calculada usando a equações constitutivas do TCCDM e  $w$  é abertura de fissura.

A segunda imposição é uma tensão residual devido a vigas com pouco reforço ao cisalhamento, o concreto ter uma grande contribuição para a formação dos mecanismos internos de resistência ao cisalhamento. Mecanismos como o

intertravamento entre seções fissuradas, o efeito de pino e a interação entre o concreto e o aço das armaduras transversais. Para tanto, foi imposto aos elementos finitos sem reforço incorporado, que a resistência à tração devia apresentar uma capacidade residual de 10%.

Com base nas premissas do modelo rotacional descrito no item 3.2.4, e também como avalia Vecchio (2000), houve instabilidade no resultado devido à rotação excessiva do ângulo das fissuras, fazendo com que as tensões principais se localizem diferentes das direções reais. Assim como, uma degradação da resposta numérica comum no modelorotacional de fissuração distribuída em vigas com pouca ou nenhuma armadura de suporte ao cisalhamento, o que gerou ductilidade excessiva ao modelo. Vecchio (2000) afirma que seu modelo baseado no TCCDM com o acréscimo das duas formulações extras tornou a resposta numérica aceitável, contudo ainda apresenta ductilidade excessiva.

A Figura 6-33 apresenta as tensões cisalhantes no concreto a partir dos pontos de Gauss, obtida pela modelagem no DIANA. A tensão máxima foi de 3,15 MPa e os pontos onde as tensões ultrapassam 2,5 MPa estão no terço central da viga. Ao comparar a Figura 6-33 a Figura 6-34, os resultados obtidos foram convergentes. Todavia, o fato de Gamino (2007) ter aplicado o apoio de forma pontual na estrutura de concreto causou a concentração de tensões nestes pontos, como já exposto no item 6.3.1.3, essa abordagem pode levar valores de tensão muito discrepantes do real, portanto, deve ser evitada.

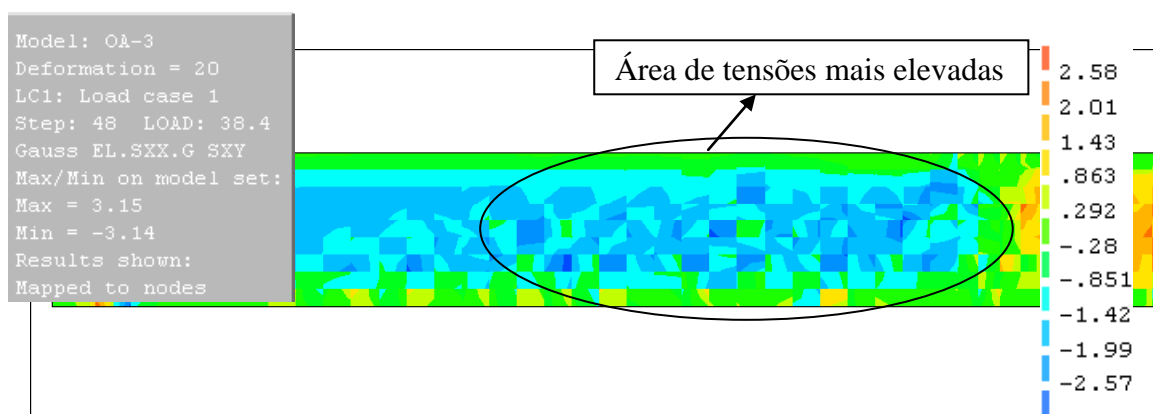


Figura 6-33 Tensões de cisalhamento  $\sigma_{xy}$ , no concreto para a viga OA-3 de Bresler e Scordelis(1963), valores em MPa

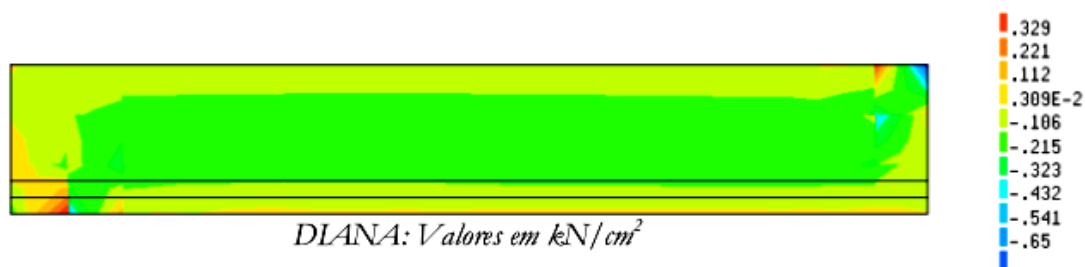


Figura 6-34 Tensões de cisalhamento  $\sigma_{xy}$ , no concreto para a viga OA-3 de Bresler e Scordelis(1963), obtida por Gamino (2007).

Como forma de comparação qualitativa o padrão de fissuração do experimental de Vecchio e Shim (2004), Figura 6-35, é confrontado ao do modelo do presente trabalho. Vecchio e Shim (2004) tiveram como pretensão reproduzir as vigas de Bresler e Scordelis (1963) por isso, apresentam mesma forma de ruptura e diagrama carga deslocamento muito similar as vigas de 1963, bem como os padrões de fissuração das vigas que foram exibidas em 1963, apresentam-se de forma análogas. Em função disso foram usadas de forma qualitativa para avaliar o padrão de fissuração, o qual mostrou-se estar em conformidade.

Quanto à abertura de fissura, os resultados em comparação com Gamino (2007) obtiveram boa concordância, como pode ser observado ao comparar a Figura 6-35 com a Figura 6-36, que diferem apenas em função da discretização. As aberturas de fissura máxima obtidas também foram de 0,28mm.



**VS-OA3**  
Viga experimental AO-3 de Vecchio e Shim (2004) em carga última

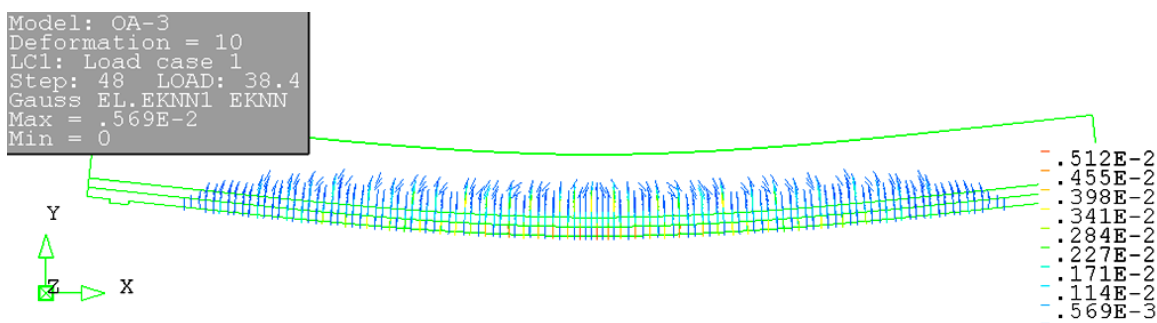


Figura 6-35 Mapa de fissuração da viga OA-3 comparação com experimental de Vecchio e Shim (2004) e modelo do DIANA®.

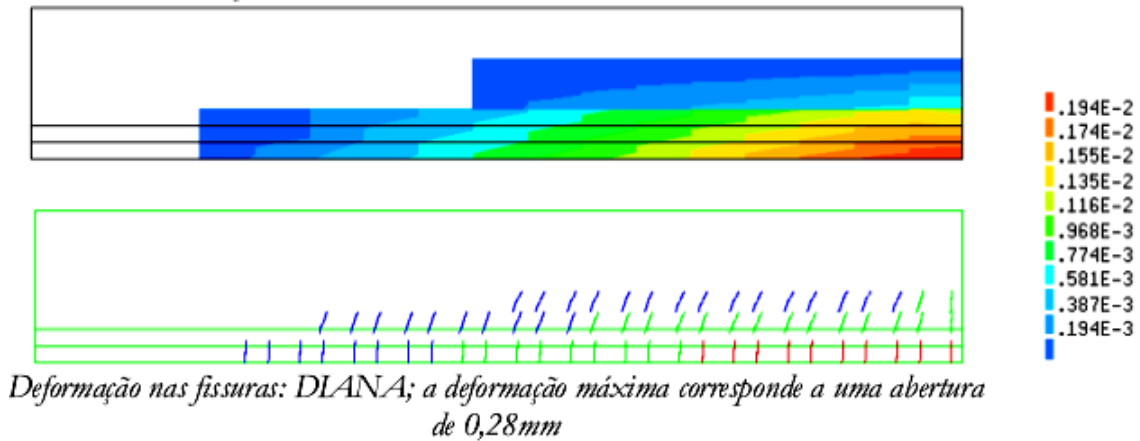


Figura 6-36 Mapa de fissuração viga OA-3 Bresler e Scordelis modelada por Gamino(2007).

As tensões nas armaduras longitudinais estão apresentadas na Figura 6-38, mesmo na carga última as tensões estavam distantes da tensão de plastificação que está em torno de 555 MPa, portanto ainda havia capacidade de suporte a flexão, em relação a tração. Novamente constata-se boa convergência com o modelo de Gamino (2007) ao se comparar as Figura 6-37e Figura 6-38.

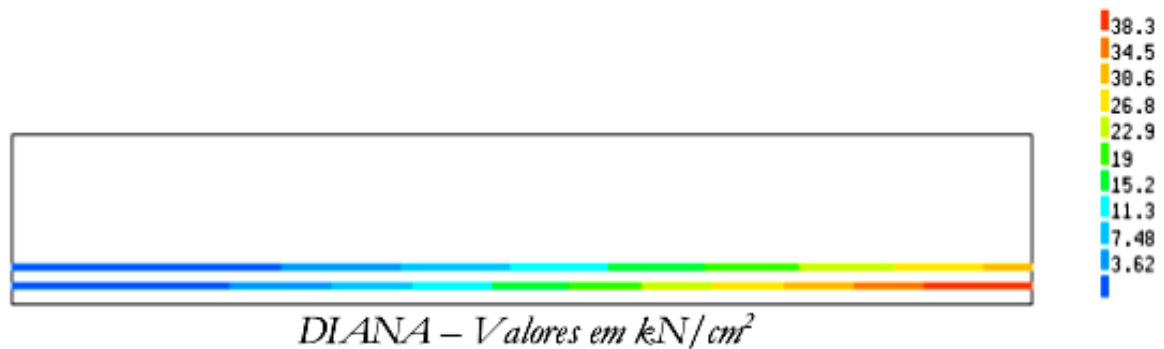


Figura 6-37 Tensões normais nas armaduras longitudinais de tração obtidas para a viga OA-3 por Gamino (2007).

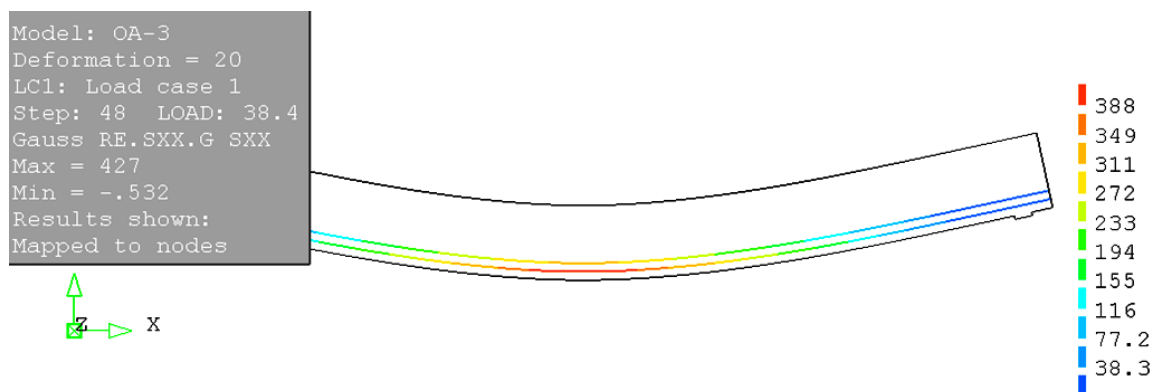


Figura 6-38 Tensões nas armaduras longitudinais  $\sigma_{xx}$ , em MPa, da viga OA-3, segundo modelo construído no DIANA®.

A análise dos resultados indica que o modelo proposto neste trabalho para a viga AO-3 de Bresler e Scordelis (1963), gerou uma falha súbita por cisalhamento, coincidindo com o relatado desses autores em seu experimento. De fato, verifica-se pela Figura 6-39 que a deformação axial máxima de compressão prevista no modelo foi de 1,6‰, indicando que houve deformações plásticas, sendo 0,98 ‰ o limite elástico. Todavia, as deformações não atingiram limites que caracterizam esmagamento; portanto, não houve falha por compressão na flexão.

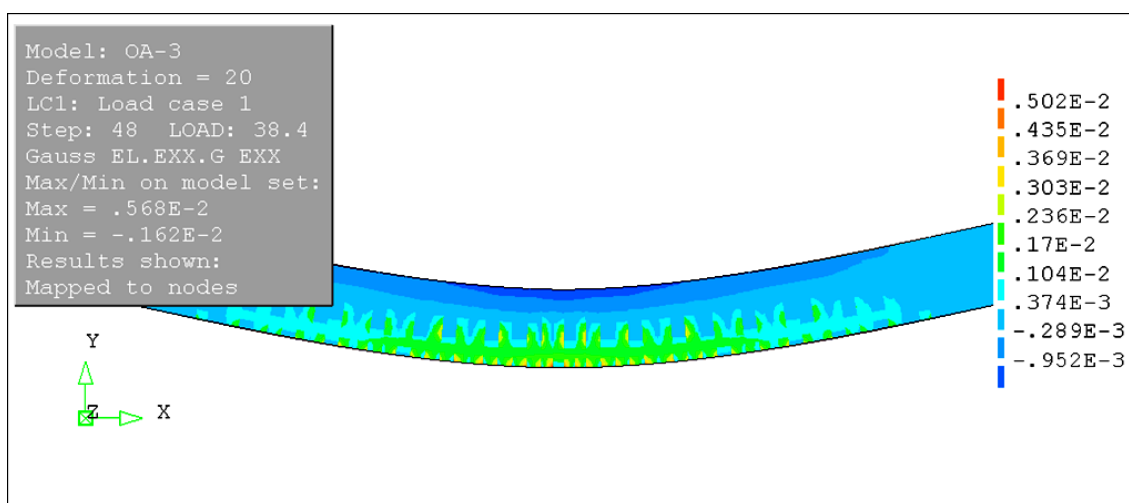


Figura 6-39 Deformações axiais no eixo x da viga OA-3 de Bresler e Scordelis (1963), a partir de modelo no DIANA®.

O modelo apresentado mostrou-se assertivo para representar vigas sem armadura de transversal que apresentam falha por cisalhamento. Em suas conclusões Vecchio (2000), aconselha duas formas de aprimorar modelos de fissuração distribuída. A primeira se refere á melhora do modelo constitutivo para o concreto a tração, principalmente em seu estágio pós-fissurado, o segundo, é a sugestão para uma relação de compatibilidade para o modo II de fissura ou seja, uma compatibilizando dos deslizamentos por cisalhamento na superfície de fissura. Segundo Vecchio (2000), isso fará com que o resultado tenha uma menor reorientação do campo de tensões e uma menor ductilidade.

A partir das conclusões de Vecchio (2000), avalia-se que o modelo aplicado neste trabalho possui as características que o autor indica como sendo formas de aprimoramento do modelo de fissuração distribuída. Esses aprimoramentos seriam o uso do modelo de Hordijk, a retenção ao cisalhamento e o uso modelo de fissuração



multidirecional que aplica o conceito de sub-decomposição das deformações de fissura descrita no item 3.2.3.

## 6.5 ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE OS MODELOS DE FISSURAÇÃO DISTRIBUÍDA

No presente item serão apresentados os resultados da modelagem com os três modelos de fissuração distribuída presentes no software comercial DIANA®: fixo, item4.1.1; multidirecional, item4.1.2; e rotacional, item4.1.3. Com o objetivo de levantar as qualidades e deficiências de cada modelo, serão estudadas a partir desses três modos de fissuração a viga caso 2 de Álvares (2004), com falha a flexão, e as vigas OA-3 e A-1 de Bresler e Scordelis (1963), ambas com falha por cisalhamento.

A viga OA-3 apresenta ruptura por cisalhamento, sendo então onde a variação dos modelos deve apresentar importante contribuição, analisando com base em suas definições teóricas. Já para a viga A-1 que tem falha por cisalhamento-compressão, característico de estruturas com estribos, não será tão evidente, mas ainda será perceptível. Nesta forma de ruptura os estribos impedem que a fratura diagonal abra excessivamente, entretanto, a sua propagação reduz a dimensão da biela comprimida até que a biela entre em colapso. Assim as rotações relativas entre eixos não são tão acentuadas, como para a viga OA-3, desta forma os métodos de fissuração distribuída devem apresentar variação importantes, porém menos significativas.

Por outro lado, para a viga caso 2 de Álvares (1993) que, sob flexão de quatro pontos, apresentou falha por flexão, principalmente na zona de flexão pura deve desenvolver predominantemente fissuras perpendiculares ao eixo horizontal da viga. Deste modo, a variação da resposta entre os modelos de fissuração distribuída não deve ser expressiva.

Para promover a comparação todos os modelos tiveram as mesmas configurações. Assim o modelo para retenção ao cisalhamento foi adotado como constante mesmo para o modelo fixo de fissuração distribuída que têm suporte para modelos mais avançados, assim como explicita o item4.1.6. Bem como, as características dos materiais, físicas e do modelo de EF, foram compatibilizadas para que os modelos tivessem comportamentos, que comparados, tivessem a menor interferência paramétrica possível.

Os resultados da viga de Alvares (2004), para cada modelo de fissuração, estão na Figura 6-40. Por sua vez, os resultados das vigas OA-3 e A-1 de Bresler e Scordelis (1963), estão apresentados nas Figuras 6-41 a 6-47, respectivamente.

### **6.5.1 Resultados para viga com falha a flexão**

Nos experimentos de Alvares (1993) todas as vigas falharam por flexão, inclusive o Caso 2, de viga normalmente armada, com muito pouca interferência do cisalhamento. Por este motivo tal viga foi escolhida para ser testada com os modelos de fissuração. Os modelos numéricos aqui testados seguem as mesmas definições do item 5.4.

Passando-se para os resultados, a Figura 6-40, pode-se notar a maior rigidez do modelo fixo, isso ocorre por conta do modelo subestimar o dano. O modelo prevê a introdução da fissura quando a tensão limite for alcançada, a fissura será perpendicular à tensão principal para o passo de carga atual. Portanto, após a criação da fissura esta terá uma direção fixa. A menos que a tensão principal varie a 90 graus da direção da fissura pré-existente, a fissura continuará a abrir na direção inicial. Assim o modelo fixo é o que apresenta menor ductilidade entre os modelos testados, portanto pode-se afirmar que é o limite superior para os modelos de fissuração distribuída presentes no DIANA<sup>®</sup>.

O modelo multidirecional teve resultados muito próximos do modelo fixo, isso porque, para as características da estrutura, não há grandes variações entre a direção das deformações e tensões principais. Ocasionalmente, poucos pontos onde o ângulo limite é vencido, portanto, poucas fissuras secundárias.

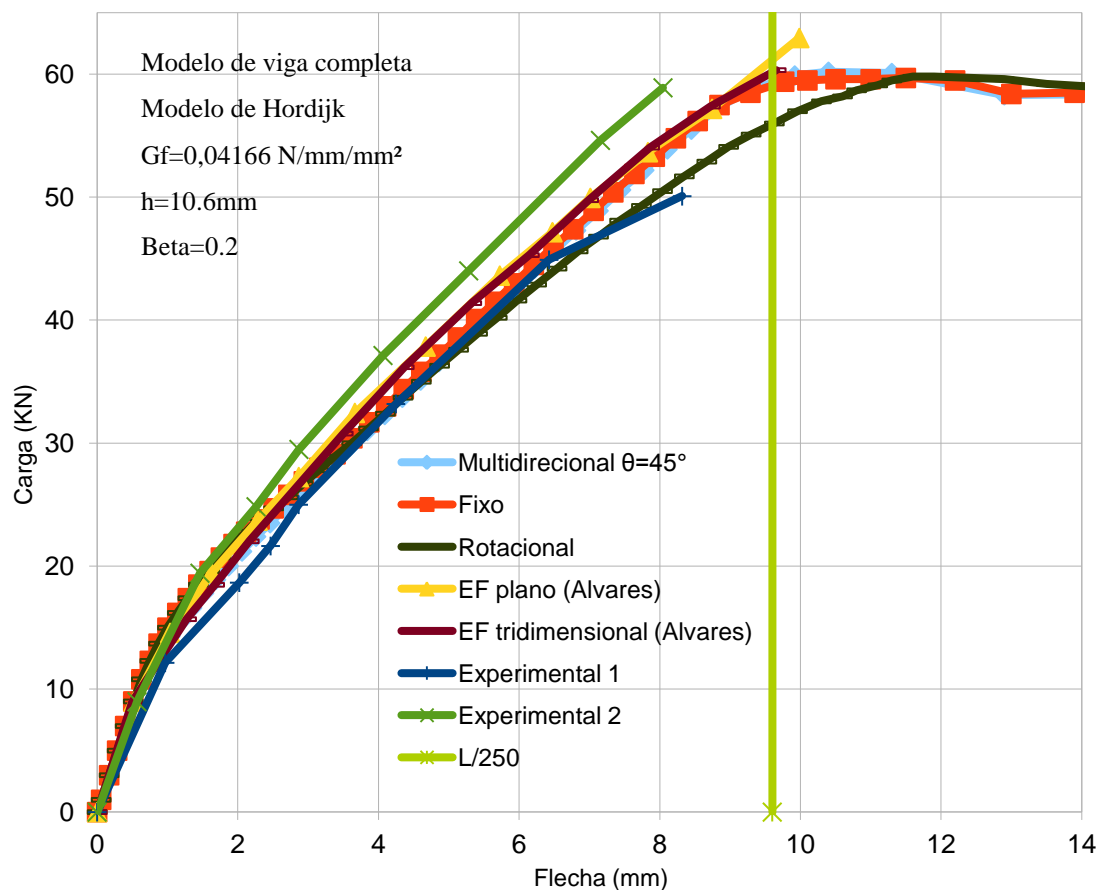


Figura 6-40 Comparativo entre experimental caso 2 Álvares (1993) e modelos numéricos de fissuração distribuída.

Para o caso 2 de Álvares (1993) os modelos de fissuração não alteram demasiadamente a previsão do comportamento do modelo. Para o modelo de fissuração rotacional que, por superestimar a propagação da fissura, subestima a rigidez não linear física dos elementos estruturais, apresentando assim uma menor rigidez na parte final, próximo ao estado limite último (ELU), em relação aos outros modelos. Esse modelo apresenta-se como o limite inferior nos modelos de fissuração distribuída presentes no DIANA®.

O modelo de fissuração rotacional após a inserção da fissura, a mesma acompanha sempre a direção da tensão principal, reposicionando a direção da fissura, ação que como já foi discutido anteriormente, não condiz com o fenômeno real de fissuração. Todavia todos os modelos se mantiveram dentro do espectro do experimental apresentado por Álvares (1993), pois captaram bem o início de fissuração, o limite de plastificação das armaduras, e os limites de deformação para o ELU. Com isso pode-se afirmar que todos os modelos de fissuração, para o modelo estrutural

testado, comportaram-se bem e obtiveram resultados satisfatórios para análise de uma estrutura com falha por flexão.

### 6.5.2 Resultados para vigas com falha ao cisalhamento

Como já foi dito para as falhas por cisalhamento é onde ocorrerá a importante variação entre os modelos de fissuração distribuída. Para a viga OA-3 de Bresler e Scordelis o gráfico carga-deslocamento do experimental e dos três modelos de fissuração estão na Figura 6-41.

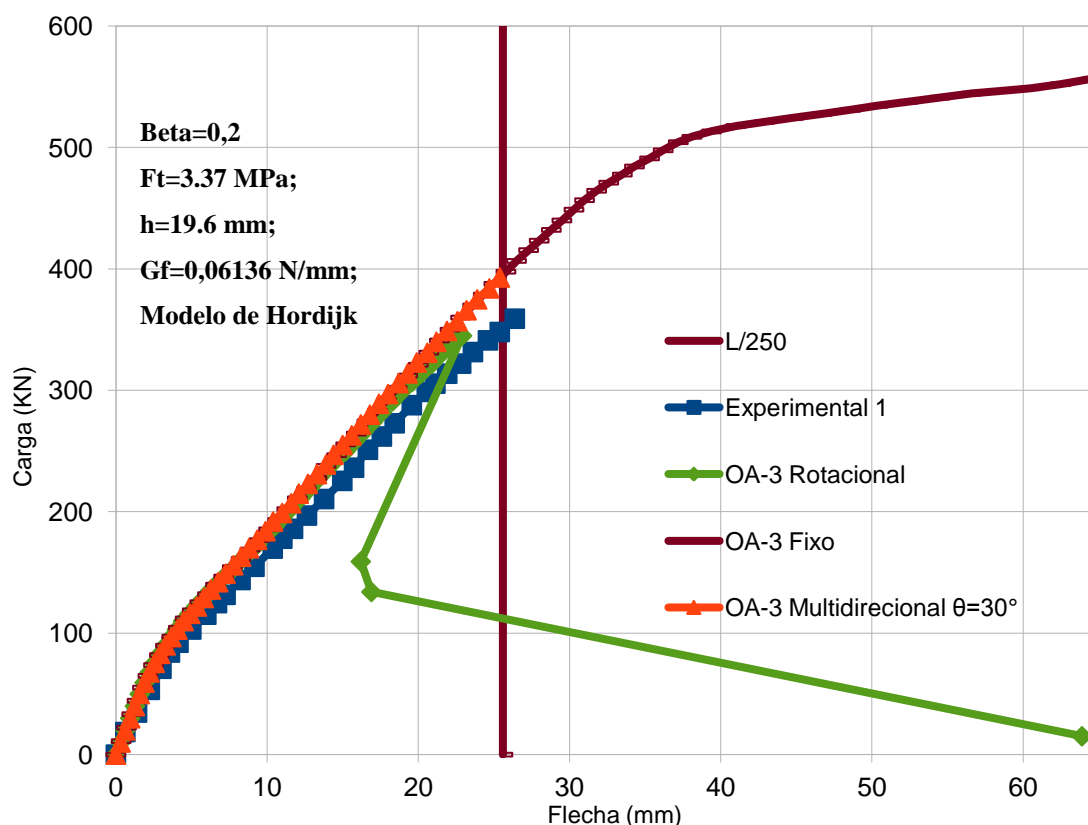


Figura 6-41 Comparativo entre experimental OA-3 Bresler e Scordelis (1963) e modelos numéricos de fissuração distribuída.

A comparação entre os modelos numéricos e o resultado experimental para a viga OA-3, mostrada na Figura 6-41, demonstra que o comportamento carga-deslocamento de todos os modelos numéricos apresentou uma rigidez para a viga um pouco maior que o verificado experimentalmente, tornando-se mais evidente com a progressão do carregamento. Resultado similar foi observado por Matzenbacher et al (2010).

O modelo de fissuração fixa mostrou-se bom até o surgimento da fissuração diagonal que, para estruturas sem estribos se propagará sem controle levando ao colapso, todavia, o modelo de fissuração fixa não captou para esse estágio de carregamento a propagação e abertura da fissura diagonal, ignorando que a falha por cisalhamento em OA-3 ocorreu, apenas vindo a falhar no ELU, a flexão.

O modelo de fissuração multidirecional, tem como principal diferença variar a direção das fissuras com a direção principal, entretanto, sob um ângulo limite, que por padrão o DIANA<sup>®</sup> estabelece 60 graus. Outra vantagem do modelo é que a nova fissura não sobrepõe à fissura anterior, podendo ser criada no mesmo ponto de integração várias fissuras com direções diferentes. Isso faz o modelo se aproximar mais do fenômeno real de fissuração. O modelo, bem calibrado, tem vantagem quando se analisa a previsão da carga última, a deformação de pico e última, bem como o padrão de fissuração.

O modelo de fissuração multidirecional captou com precisão satisfatória a deformação onde ocorreu a falha e obteve ótima concordância com o padrão de fissuração, identificando o surgimento da fissura diagonal e sua propagação e abertura, que levou ao colapso. Comparando com o resultado experimental esse modelo apresentou erro de 15,3% na previsão da carga de ruptura e de 2,2% na previsão do deslocamento correspondente.

Uma deficiência no modelo apresentado no DIANA<sup>®</sup> é que, os mecanismos de suporte ao cisalhamento, para concreto fissurado, apenas podem ser representados no modelo multidirecional pela retenção ao cisalhamento, total e por um valor constante sem que seja possível o uso de funções não lineares, como há no modelo fixo de fissuração distribuída. Dessa forma, o modelo não consegue captar a queda brusca de rigidez provocada por uma falha ao cisalhamento, diferente do modelo rotacional, que desconsidera completamente a interação do modo II na redução da energia devido à fratura.

O modelo rotacional apresentou similaridades com todos os modelos até o deslocamento de 15 mm. Por apresentar equações mais simples, portanto mais estável numericamente e, neste modelo a energia de fratura não apresenta queda brusca, como o modelo multidirecional, contribuí para detecção de forma mais clara da perda de rigidez após a falha, por consequência, a fratura que provocou a falha a qual, ocorreu a um deslocamento de 22,9 mm, diferente dos outros modelos como pode ser observado na Figura 6-41.

Isso se deve ao modelo rotacional desconsiderar a perda de rigidez transversal, sendo possível captar pontos de equilíbrio mesmo após a falha, devido, portanto, a mínima conservação de rigidez transversal, diferente do modelo multidirecional. Comparando com o resultado experimental, verifica-se um erro de 4,1% na previsão da carga de ruptura e de 13,2% na previsão do deslocamento correspondente.

A modelagem numérica da viga A-1 está representada pelo diagrama carga-deslocamento na Figura 6-42 juntamente com o ensaio experimental. Os modelos fixo e multidirecional apresentam comportamento similar, diferenciando nos valores de carga e deslocamento de ruptura. Foram identificados erros da ordem de até 22% na carga e até 27% no deslocamento.

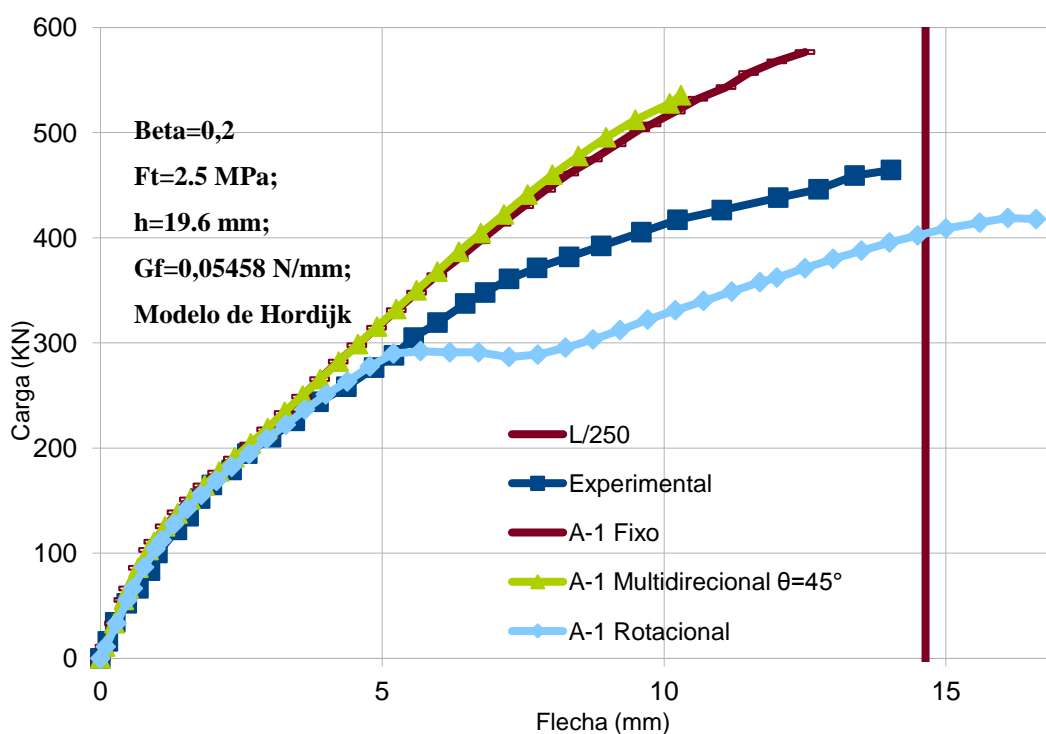


Figura 6-42 Comparativo entre experimental A-1 Bresler e Scordelis (1963) e modelos numéricos de fissuração distribuída.

Para o modelo fixo, mesmo tendo deficiência para captar a fissura diagonal, e com a presença das armaduras transversais que reduzem a sua abertura e propagação, com a progressão da carga o modelo a identificou, Figura 6-43, entretanto em uma carga muito mais elevada do que nos outros modelos. Entretanto, a ruptura ocorreu pela falha à flexão, pois, no último ponto de equilíbrio, para o centro do vão, as armaduras já estavam plastificadas e o concreto atingiu a deformação de 3,6‰ caracterizando o

esmagamento. Portanto, mesmo identificando a fissura diagonal o modelo falha por flexão no domínio 3.

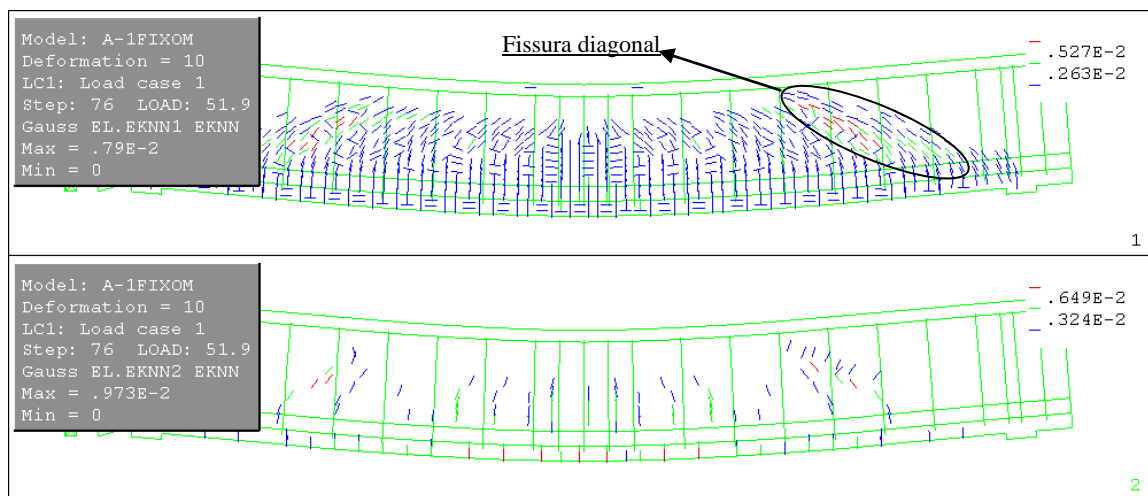


Figura 6-43 Padrão de fissuração para modelo fixo (1) fissuras primárias (2) fissuras secundárias

Por sua vez, o modelo rotacional também capta a fissura diagonal, como está enfatizado na Figura 6-44. Entretanto, as rotações dos eixos principais desestabilizam logo após o surgimento da mesma e começam a girar de forma incontrolável degradando a resposta numérica, e requerendo assim um refinamento e adaptação no modelo de EF, para obter respostas mais coerentes, como se vê no trabalho de Vecchio e Shim (2004).

Fazendo uma comparação qualitativa entre o resultado da Figura 6-44 com o resultado experimental de Vecchio e Shim (2004), Figura 6-45, o qual buscou reproduzir as vigas de Bresler e Scordelis (1963), como já discutido no item 6.4.1.104 Verifica-se que o modelo rotacional identifica bem a fissura diagonal e até a sua propagação paralela as armaduras longitudinais, após a progressão da falha. Entretanto, após o surgimento da fissura diagonal o modelo prioriza sua abertura e propagação devido à desestabilização da rotação dos eixos principais, fazendo a resposta do padrão de fissuração diferir, na intensidade de propagação das fissuras, em relação ao experimental.

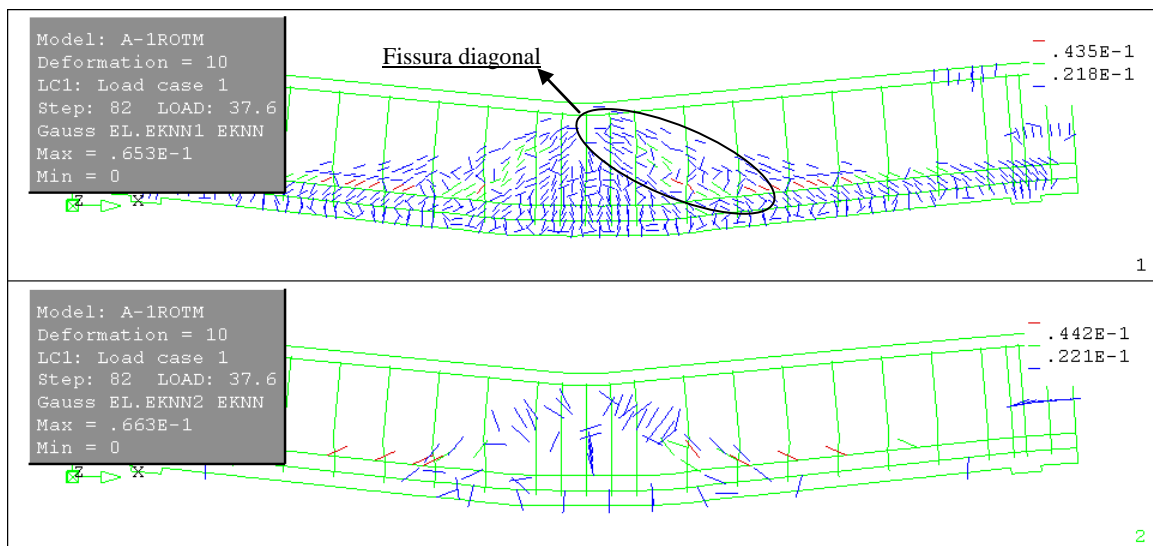


Figura 6-44 Padrão de fissuração para modelo rotacional (1) fissuras primárias (2) fissuras secundárias



Figura 6-45 Padrão de fissuração de viga VS-A1 de Vecchio e Shim 2004 (fonte: Vecchio e Shim, 2004)

Para o modelo multidirecional, verifica-se uma similaridade no padrão de fissuração experimental. A fissura diagonal se forma como identificado na Figura 6-46, como há armaduras, ela se propaga até reduzir a dimensão da biela comprimida, que entra em plastificação, conforme Figura 6-47. Todavia, a deformação máxima para o último passo de carga de 2,2 ‰ ainda é distante da deformação característica de esmagamento, 3,5 ‰ demonstrando que a ruptura não acontece por esmagamento do concreto comprimido.



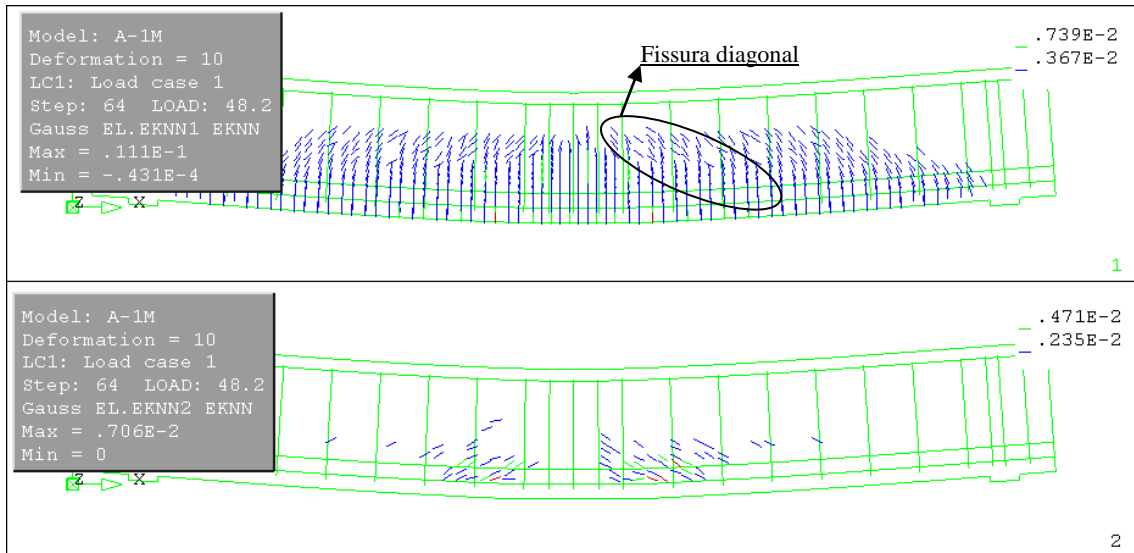


Figura 6-46 Padrão de fissuração para modelo multidirecional (1) fissuras primárias (2) fissuras secundárias

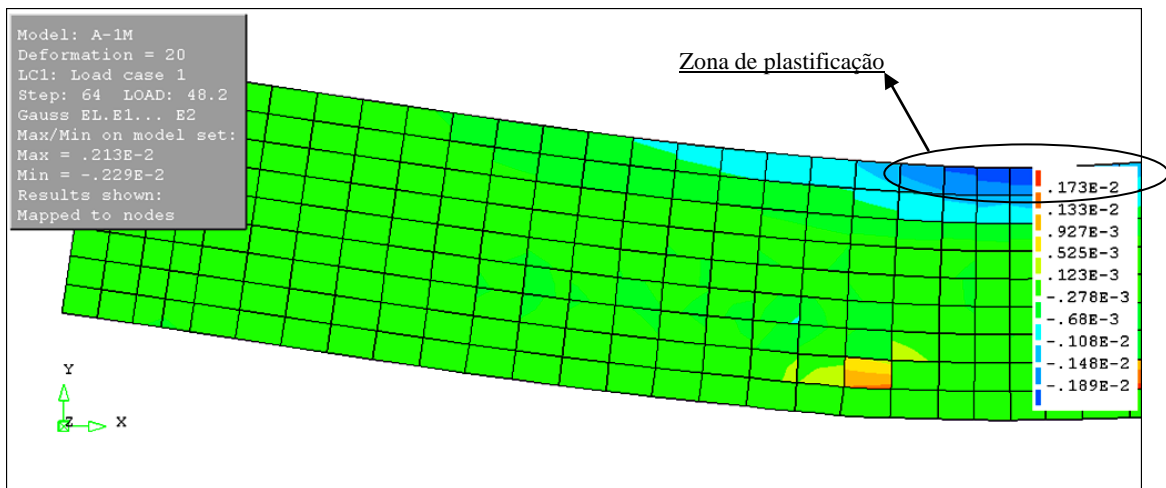


Figura 6-47 Deformação principal 2 para o último ponto de equilíbrio do modelo da viga A-1 de Bresler e Scordelis (1963)

### 6.5.2.1 Considerações

Com base nas análises realizadas, pode-se afirmar que todos os modelos de fissuração distribuída apresentam bons resultados para viga com falha a flexão e ao cisalhamento. O modelo multidirecional é o modelo mais completo e com o maior potencial, entretanto, precisa de algum conhecimento prévio do comportamento da estrutura para que possa ser devidamente calibrado, como por exemplo, com o uso do ângulo limite para abertura de nova fissura. O modelo multidirecional incorporado ao programa DIANA<sup>®</sup> ainda tem capacidade para evoluir, como em relação a modelos de comportamento de amolecimento a compressão e à retenção ao cisalhamento não linear, comportamentos já presentes no modelo fixo, por exemplo.

Para fins práticos, quando se tem um menor número de informações e conhecimento sobre o comportamento do elemento estrutural, o mais indicado é realizar uma análise prévia com o modelo rotacional. O modelo rotacional exige um menor número de parâmetros e se mostra capaz de identificar todos os tipos de falha testados, além de que, por ser mais estável numericamente, pode captar pontos de equilíbrio durante a progressão da falha, que faz a identificação dos fenômenos que provocou a falha ser mais claro; por exemplo, com uma rápida análise do diagrama de padrão de fissuração é possível ter uma boa noção do que provocou o colapso.

Como já foi dito, mesmo quando não se dispõem de dados suficientes para se aplicar um modelo complexo, como o de Vecchio e Shim (2004), uma análise prévia e mais simples com um modelo rotacional de fissuração distribuída é bastante indicada. Todavia, se for necessário uma avaliação mais detalhada, uma boa alternativa é usar o modelo multidirecional de fissuração distribuída, por descrever com grande eficiência todos os fenômenos de falha testados e os padrões de fissuração. Diferente do modelo numérico desenvolvido por Gamino (2007), que aplicou modelo fixo de fissuração distribuída, modelo que para o presente trabalho captou para todos os elementos estruturais testados, ruptura por flexão, sendo, portanto, apenas indicado para os casos com colapso a flexão, como as vigas de Álvares (1993).

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

De forma geral os modelos de fissuração distribuída, aplicados aos modelos de EF adotados, obtiveram um desempenho satisfatório para os experimentos simulados. Apresentaram capacidade de prever de forma precisa o formato do gráfico carga-deslocamento, bem como a ruptura do elemento, além do padrão de fissuração. Com destaque para o modelo multidirecional de fissuração distribuída que, a partir do conhecimento da presença ou não de armadura transversal na viga de concreto armado, pode-se aplicar o ângulo limite com segurança obtendo bons resultados para comportamentos de falha à flexão ou ao cisalhamento.

O modelo fixo de fissuração distribuída apresentou resultados convergentes com o experimental para os casos onde houve falha por flexão. Todavia, indica-se cautela em seu uso, associado ao modelo desenvolvido neste trabalho, pois, o mesmo não foi capaz de captar a falha por cisalhamento.

As análises realizadas utilizando o modelo rotacional de fissuração distribuída indicaram capacidade do modelo em captar um amplo número de comportamentos de ruptura em vigas de concreto armado. O modelo se mostrou intermediário, pois, pôde captar o comportamento e a falha à flexão em vigas de concreto armado, todavia, para falhas ao cisalhamento apresentou rupturas prematuras logo após a formação da fissura diagonal e discrepâncias no padrão de fissuração em relação ao experimental.

A partir da análise dos resultados apresentados, pode-se concluir que uma avaliação prévia do comportamento da viga de concreto armado pelo modelo rotacional de fissuração distribuída é uma alternativa importante quando não se dispõem de informação mais detalhadas. Corroborando com o que indica Rots e Blaauwendraad (1989), que desenvolveram modelos mais simples de EF aplicando o modelo rotacional de fissuração distribuída antes de construir modelos mais refinados.

Conclui-se, portanto, que os modelos de fissuração distribuída podem ser vistos como uma atrativa alternativa para análise de comportamento de vigas de concreto armado, pois: requerem um número reduzido de parâmetros; necessitam de modelos de EF mais simples e independem da forma e refinamento da malha, diferentemente dos modelos discretos.

Por fim, como colaboração para o desenvolvimento de trabalhos futuros, indica-se primeiramente construir com base no modelo proposto no presente trabalho, uma

malha de EF com armaduras longitudinais e transversais discretas, utilizando EF de viga ou treliça. Sendo esse último elemento adequado para avaliação de mecanismos resistentes associados ao enrijecimento de fissuras diagonais, como o efeito de pino. Implementando o modelo atual que, apenas considera os mecanismos resistentes do comportamento pós-fissurado, por meio da aplicação da retenção ao cisalhamento.

Outra abordagem importante seria aplicar modelos não-lineares para o valor da retenção ao cisalhamento na previsão do comportamento de viga de concreto armado com falha ao cisalhamento. Para o DIANA<sup>®</sup> isto seria possível apenas no modelo fixo de fissuração distribuída, todavia, o programa FEMIX, desenvolvido na Universidade do Minho, possibilita a aplicação da retenção ao cisalhamento não-linear ao modelo multidirecional de fissuração distribuída.

**REFERÊNCIAS**

ABNT-ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118 Projeto de estruturas de concreto – procedimento.** 2007.

ÁLVARES, Manoel da Silva. **Estudo de um modelo de dano para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação com o emprego do método dos elementos finitos.** São Carlos (SP); 1993. [Dissertação de mestrado em Engenharia Estrutural - Universidade de São Paulo (USP)].

BARENBLATT, G. L. **The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture.** Advances in Applied Mechanics, Vol. 7, p. 55-129, 1962.

BARROS, Joaquim António Oliveira de. **Comportamento de betão reforçado com fibras análise experimental e simulação numérica.** 1995. Tese de doutorado. Faculdade de engenharia da universidade do Porto, p 530, 1995.

BAŽANT, Z. P. OH B. H. **Crack band theory for fracture of concrete.** Materials and Structures, Vol. 16, p. 155-177, 1983.

BRESLER, Boris; SCORDELIS, A. C. **Shear Strength of Reinforced Concrete Beams.** Journal of the American Concrete Institute. Title 60, n 4, p. 51-74, 1963.

BRISOTTO, D. S. **Um modelo de fissura incorporada para a análise da fissuração em peças de concreto armado fletidas via Método dos Elementos Finitos.** 2006. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre, 2006.

CHEN, WaiFah, HAN, D. J. **Plasticity for structural engineers.** Springer-Verlag, New York Inc., 1988

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **CEB-FIP Model Code 1990:** Design code. London: Thomas Telford Services Ltd., 1993.

CORNELISSEN, H. A. W., HORDIJK, D. A., REINHARDT, H. W. **Experimental determination of crack softening characteristics of normalweight and lightweight concrete.** Heron, Vol. 31, no 2, p.45-56, 1986.

DIANA, 2005. **User's Manual - Release 9.** Last modified Fri Apr 29 13:34:17 CEST

DUGDALE, D. S. **Yielding of steel sheets containing slits.** Journal of Mechanics and Physics of Solids, Vol. 8, p. 100-104, 1960.

GAMINO, André Luís. **Modelagem física e computacional de estruturas de concreto reforçadas com CFRP.** Tese de Doutorado, Escola Politécnica de Universidade de São Paulo, 285 p., 2007.

GRIFFITH, A. A. **The Phenomena of rupture and flow in solids.** Philosophical transactions of the Royal Society of London, Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character, Vol. 221, p 163-198, 1921.

HILLERBORG A.,MODÉER M., PETERSSONP.E..**Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements.**Cement and Concrete Research, Volume 6, Issue 6, Pages 773-781,November, 1976.

IRWIN, R. G. **Linear fracture mechanics, fracture transition, and fracture control.** Engineering Fracture Mechanics, Pergamon Press, Vol. 1, p 241-257, 1968.

LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J. L. **Mechanics of Solid Materials,** Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

LIMA, João Carlos Almeida. **Modelagem computacional de placas de matriz cimentícia reforçadas com fibras de sisal.** 2009. Dissertação (Mestrado em Ciências em Engenharia Civil e Ambiental)– Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental, Departamento de Tecnologia, Universidade Estadual de Feira de Santana, Bahia, 2009.

MATZENBACHER, C.W.; CAMPOS FILHO, A.; PACHECO, A.R., **Análise da ruptura por flexão e corte de vigas de concreto armado através do método dos elementos finitos.**Mecânica Computacional. Vol XXIX, p. 9973-9996., 2010.

NOGUEIRA, C. G.; CODA, C.G.; VENTURINI, W. S. **Mecanismos de resistência ao cisalhamento em estruturas de concreto armado- uma abordagem via método dos elementos finitos unidimensionais.** Revista Ibracon de Estruturas e Materiais. Volume 4, n 1, p. 100-122, ISSN 1983-4195, 2011.

REDDY, J. N..**An Introduction to the Finite Element Method.** 2a ed., New York: McGraw-Hill, 1993.

REDDY, J. N..**Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis,** 2a ed., CRC Press, 2004.

RIBEIRO, A. S. J., SANTOS, G. J. B. **Curso de Introdução ao Método dos Elementos Finitos: Aplicação à Análise Mecânica de Estruturas e Componentes.** Salvador, Maio, 2009.

RICE, J. R. **Mathematical Analysis in the Mechanics of Fracture.** Chapter 3 of Fracture: An Advanced Treatise. Vol. 2, Mathematical Fundamentals, ed. H. Liebowitz, Academic Press, New York, p. 191-311, 1968.

ROTS, J. G. **Computational modeling of concrete fracture.** Tese de Doutorado. Delft University of Technology, p. 129, 1988.

ROTS, J.G., BLAAUWENDRAAD, J. **Crack models for concrete: Discrete or smeared? Fixed, multi-directional or rotating?** HERON, v.34, n.1, 1989.

SAGASETA, J. VOLLUM R. L. **Non-linear finite element analysis of shear critical high strength concrete beams.** Architecture, civil engineering, environment. The Silesian University of Technology. no. 4 p. 95-106, 2009

SANTOS, Geraldo José Belmonte dos. **Modelagem em elementos finitos do comportamento mecânico não-linear de vigas compósitas de matriz cimentícia com reforço de fibras longas.** 2009. Dissertação (Mestrado em Ciências em Engenharia Civil e Ambiental)– Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental, Departamento de Tecnologia, Universidade Estadual de Feira de Santana, Bahia, 2009.

SHAH, S. P., OUYANG, C. **Failure of Concrete: Fracture Mechanics Approach.** Anales de Mecanica de laFracture, Vol. 9, p. 352-375, 1992.

SHAH, S. P.; SWARTZ, S. E.; OUYANG, C. **Fracture Mechanics of Concrete: Applications of fracture mechanics to concrete, rock and other quasi-brittle materials.** John Wiley & Sons, 1995.

VECCHIO, Frank J., COLLINS, Michal P. **The modified compression field theory for reinforced concrete elements subjected to shear.** ACI Journal. n 83-22, p 219-231, march-april, 1986.

VECCHIO, Frank J. **Analysis of shear-critical reinforced concrete beams.** ACI structural Journal, v 97, n 1, 2000.

VECCHIO, Frank. J.; SHIM, W. **Experimental and analytical reexamination of classic concrete beam tests.** Journal of Structural Engineering, v 130, n 3, p 460-469, 2004.

WALRAVEN, Joost Cornelis. **Aggregate interlock:** A theoretical and experimental analysis. Delft University Press, Delft , 1980.