



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**SOBRE O MÉTODO DA EXAUSTÃO DE
EUDOXO E O CÁLCULO DE ÁREAS DE
REGIÕES PLANAS**

JOÃO DANTAS ALMEIDA SILVA

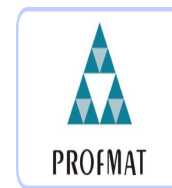
Orientador: PROF. DR. DARLAN FERREIRA DE OLIVEIRA

Feira de Santana-Bahia

Novembro/2019



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



SOBRE O MÉTODO DA EXAUSTÃO DE EUDOZO E O CÁLCULO DE ÁREAS DE REGIÕES PLANAS

JOÃO DANTAS ALMEIDA SILVA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Darlan Ferreira de Oliveira.

Feira de Santana-Bahia

Novembro/2019

Ficha catalográfica - Biblioteca Central Julieta Carteadó - UEFS

Silva, João Dantas Almeida
S58s Sobre o método da exaustão de Eudoxo e o cálculo de áreas de regiões planas / João Dantas Almeida Silva. - 2019.
67f.: il.

Orientador: Darlan Ferreira de Oliveira
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Feira de Santana.
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, 2019.

1. Método de exaustão de Eudoxo. 2. Figuras planas. 3. Parábola (matemática). 4. Quadratura da parábola. 5. Fermat – Idéias. I. Oliveira, Darlan Ferreira de, orient. II. Universidade Estadual de Feira de Santana. III. Título.

CDU:514



ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DO DISCENTE JOÃO DANTAS ALMEIDA SILVA DO PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Aos vinte dias do mês de novembro de dois mil e dezenove às 9h na sala 03 - LABOFIS, UEFS, ocorreu a Sessão pública de defesa de dissertação apresentada sob o título “**Sobre o Método da Exaustão de Eudoxo e o Cálculo de Áreas de Regiões Planas**”, do discente **João Dantas Almeida Silva**, do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Darlan Ferreira de Oliveira (Orientador, UEFS), Junilson Cerqueira da Silva e Ana Carla Percontini da Paixão (UEFS). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pelo discente e das arguições dos examinadores.

Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito: APROVADO.

Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT. Feira de Santana, 20 de novembro de 2019.

Darlan Ferreira de Oliveira

Prof. Dr. Darlan Ferreira de Oliveira (UEFS)

Orientador

Junilson Cerqueira da Silva

Prof. Dr. Junilson Cerqueira da Silva

Ana Carla Percontini da Paixão

Profa. Dra. Ana Carla Percontini da Paixão (UEFS)

Visto do Coordenador:

Ana Carla Percontini da Paixão
Profª Drª Ana Carla Percontini da Paixão
Coordenadora do Profmat / UEFS

Este trabalho é dedicado aos matemáticos que deram suas vidas para o desenvolvimento do conhecimento. Em especial aos geômetras.

Agradecimentos

Em primeiro lugar a Deus. Em seguida a minha mãe, minha família: minha esposa, minhas filhas, aos meus irmãos e irmãs. Aos meus amigos que incentivaram e apoiaram. Aos meus professores, em especial ao meu orientador.

”O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001”

*“Senhor, dá-me serenidade para aceitar tudo
aquilo que não posso mudar;
Dá-me força para mudar o que for possível
mudar;
Dá-me sabedoria para distinguir uma da ou-
tra.”*
(São Francisco de Assis)

Resumo

Esta dissertação se propõe a trabalhar o conceito de área de regiões planas tais como a de um segmento parabólico e sob o gráfico de uma função potência com expoente racional a partir de técnicas e conhecimentos desenvolvidos por matemáticos da antiguidade, tais como o Método da Exaustão de Eudoxo e as ideias de Arquimedes e Fermat, os quais não são tratados nos currículos escolares atuais. Tal proposta visa fornecer uma maneira de trabalhar no ensino básico os temas aqui citados, aproveitando os conhecimentos matemáticos que dispõem os alunos nesse nível. No final do capítulo três apresentamos uma maneira de se abordar o cálculo da área de um segmento parabólico a partir dos conceitos de função quadrática, plano cartesiano, determinantes, módulo, etc. No final do capítulo quatro propomos uma atividade para o cálculo da área de uma região sob o gráfico de uma função potência.

Palavras-chave: Método da Exaustão de Eudoxo. Quadratura da parábola. Áreas de figuras planas. Ideia de Fermat.

Abstract

This dissertation proposes to work the area's concept flat regions such a that of a parabolic segment and on the a power function's grph with rational exponent from techniques and knowledge developed by ancient mathematicians, such as the Exhaustion Method's Eudoxus and the ideas of Archemedes and Fermat, which are not addressed in current school curriculum. This proposal aims to provide a way to work in the basic education themes mentioned here, taking advantage of the mathematical knowledge available to students at this level. At the end of chapter three we present a way to approach the area's calculation of a parabolic segment from concepts of quadratic function, cartesian plan, determinants, modulus, etc. At the end of chapter four we propose an activity for calculating the area of a region on the a power function's graph.

Keywords: Eudoxus Exhaustion Method. Square of the parable. Areas of flat figures. Fermat's idea.

Lista de Figuras

1.1	Eudoxo de Cnido	16
1.2	Euclides de Alexandria	17
1.3	Arquimedes	18
1.4	A garra de Arquimedes	19
2.1	Área do círculo comparada à de um triângulo	22
2.2	Primeira etapa da exaustão com área restante medindo $\mathcal{A} - \mathcal{Q}_1$	23
2.3	Segunda etapa da exaustão com área restante medindo $\mathcal{A} - \mathcal{Q}_2$	23
2.4	Um dos oito triângulos que formam o polígono regular de área \mathcal{Q}_2	24
2.5	Primeira etapa da exaustão com área restante medindo $\mathcal{Q}_1 - \mathcal{A}$	24
2.6	Segunda etapa da exaustão com área restante medindo $\mathcal{Q}_2 - \mathcal{A}$	25
2.7	Um dos oito triângulos que formam o polígono regular de área \mathcal{Q}_2	25
2.8	Quadrados inscrito e circunscrito	27
2.9	Hexágonos inscrito e circunscrito	27
2.10	Triângulos inscrito e circunscrito	28
2.11	Comparação das áreas	29
3.1	Construção de um número natural	34
3.2	Construção de uma paralela por um ponto	34
3.3	Quociente entre dois números naturais	35
3.4	Produto entre dois números naturais	36

3.5	Ponto médio de um segmento	37
3.6	Perpendicular a uma reta por um ponto	37
3.7	Raiz quadrada de um número racional	38
3.8	Triângulo ABC	39
3.9	Quadratura do triângulo ABC	39
3.10	Quadratura do triângulo ABC	40
3.11	Definição geométrica	41
3.12	Elementos de uma parábola	41
3.13	Reta tangente à parábola	43
3.14	Parábola	43
3.15	Construção 1	44
3.16	Construção 2	45
3.17	Triângulo ABP	46
3.18	Construção 3	47
3.19	Triângulo ABP	48
3.20	Construção do Foco e da reta diretriz	49
3.21	Construção do Foco e da reta diretriz	49
3.22	Construção dos Foco e reta diretriz	50
3.23	Construção dos Foco e reta diretriz	51
3.24	Segmento parabólico	51
3.25	Triângulo Máximo	52
3.26	Construção 4	52
3.27	Área do segmento parabólico	56
4.1	Ideia de Fermat	62

Sumário

Agradecimentos	6
Resumo	8
Abstract	9
Introdução	14
1 Um pouco da História	15
1.1 Eudoxo de Cnido	15
1.2 Euclides de Alexandria	16
1.3 Arquimedes de Siracusa	18
2 O método da exaustão de Eudoxo	21
2.1 Círculo com medida de um triângulo: a ideia de Arquimedes	22
2.2 Método de Arquimedes para o cálculo da área do Círculo	26
3 Exaustão da área do segmento parabólico	33
3.1 Algumas construções com régua e compasso	33
3.2 Elementos de uma parábola	40
3.3 Propriedades de tangência de uma parábola	42
3.4 Exaustão do segmento parabólico	50

3.5	Proposta de atividade	56
4	Área de regiões limitadas por gráficos de funções	59
4.1	A ideia de Fermat	59
4.2	Área abaixo do gráfico da função $f(x) = x^{1/2}$	63
4.3	Proposta de atividade	66
	Conclusão	68

Introdução

A História da Matemática permeia praticamente toda a história da humanidade, desde quando a espécie humana começou a contar até os dias atuais. As necessidades de resolução de questões básicas fizeram com que grandes filósofos e estudiosos desenvolvessem conhecimentos, os quais foram sendo organizados ao passar dos tempos e, além de dar respaldo às demandas, tornaram-se uma ciência. A Geometria foi, sem dúvida, um dos campos iniciais desta ciência. Desde os primórdios o uso de representações geométricas foi feito para resolver determinadas situações, a exemplo da delimitação de propriedades que eram inundadas pelo Rio Nilo e depois precisavam ser novamente demarcadas. Cada vez mais o domínio de técnicas e procedimentos se fez imperioso para lidar com todo tipo de questões do dia a dia que iam surgindo. O cálculo de áreas, apesar de ser uma preocupação, tornou-se um fascínio. Atualmente, usamos esta ferramenta em diversos momentos, em especial na construção civil.

O objetivo geral deste trabalho foi mostrar como alguns matemáticos da antiguidade faziam para interpretar e calcular áreas, através de métodos não tão práticos, porém revolucionários para sua época, explicitando aos leitores como suas contribuições ajudaram outros estudiosos desta ciência a desenvolverem novos caminhos. Contudo, podemos a partir das ideias aqui tratadas, destacar a importância das construções geométricas para uma percepção mais apurada dos entes envolvidos.

O ensino de áreas na escola básica prioriza as fórmulas e explora as áreas das figuras mais conhecidas. Uma proposta deste trabalho foi a de dar conhecimento aos estudantes de como se pode encontrar o valor das áreas de novas regiões, tais como a do segmento parabólico, através das ideias obtidas pelos antigos sem a necessidade de um entendimento da ferramenta do Cálculo Diferencial e Integral, com a qual a maior partes dos problemas de área e volume são abordados atualmente. No nosso entendimento isso os motiva a uma abstração mais profunda, ao questionamento sobre os procedimentos de obtenção de áreas de regiões ainda mais complexas que as aqui apresentadas e sobre quais procedimentos poderiam ser usados para obter seus valores.

Capítulo 1

Um pouco da História

Neste capítulo contaremos um pouco da vida e obra de alguns dos principais matemáticos cujos trabalhos foram de extrema importância para o cálculo de áreas, dentre eles destacamos Eudoxo de Cnido (408 - 355 a.C.), Euclides de Alexandria (300 a.C. aprox.) e Arquimedes de Siracusa (287 - 212 a.C.).

1.1 Eudoxo de Cnido

Eudoxo de Cnido, Figura 1.1, era Grego e foi um médico durante alguns anos, possivelmente influenciado pela família, composta de grandes médicos. Estudou com Arquitas (discípulo de Pitágoras). Estudou também Filosofia com Platão e outros acadêmicos. Interessou-se por Astronomia, estudando a ciência em Heliópolis. Eudoxo de Cnido publicou seu primeiro trabalho em Astronomia, no qual afirmou que o ano não possuía apenas 365 dias, mas sim 365 dias e seis horas. Escreveu sobre o movimento dos planetas e das estrelas, afirmando que os astros estavam *ligados* a esferas transparentes e que giravam em torno da Terra.

Os trabalhos de Eudoxo influenciaram diversos grandes matemáticos, a exemplo de Arquimedes, Newton, Leibniz e Riemann. Estes três últimos responsáveis pelo desenvolvimento das integrais. Eudoxo também criou fórmulas, que são usadas até hoje, para calcular o volume de cones e pirâmides. Introduziu os números irracionais pela primeira vez, em sua teoria das proporções, solucionando um problema que perturbava os matemáticos de sua época, principalmente os gregos: *“O método de comparar dois comprimentos x e y procurando um comprimento t tal que $x = mt$ e $y = nt$ (com m e n inteiros), não funcionava para segmentos de comprimentos 1 e 2, como mostrado pelo Teorema de Pitágoras. Com a teoria criada por Eudoxo, poderiam ser comparados comprimentos de qualquer*



Fonte: Aventura do dia comum

Figura 1.1: Eudoxo de Cnido

natureza.” [5]

Pouco se sabe sobre a vida de Eudoxo, mas ele nos deixou um legado importantíssimo que foi desenvolvido por matemáticos durante a história. Para efeito do nosso estudo, ele deixou uma contribuição maravilhosa: o Método de Exaustão. Muitos atribuem este método a Arquimedes. Contudo, o próprio Arquimedes o atribuiu a Eudoxo em suas cartas. Cabe aqui dizer que a ideia do método de exaustão foi formulado por Antífona, o qual não conseguiu levar a ideia adiante. Eudoxo a concluiu com o uso de um lema que ele criou e que alguns chamam de Lema ou Axioma de Arquimedes, que diz:

“Dadas duas grandezas que têm uma razão (isto é, nenhuma delas sendo zero), pode-se achar um múltiplo de qualquer delas que seja maior que a outra”. [1]

1.2 Euclides de Alexandria

Segundo [7], Euclides de Alexandria, Figura 1.2, matemático, professor e escritor, conhecido como “Pai da Geometria”, viveu em Alexandria, no Egito, mas tem sua origem provável na Grécia. Escreveu sobre perspectivas, seções cônicas, geometria esférica, teoria dos números e rigor. Porém, seu maior trabalho (pelo qual é mais conhecido) denomina-se “Os Elementos”. Os Elementos é uma obra composta por treze volumes, nos quais Euclides escreve sobre geometria plana, números, teoria das proporções, incomensuráveis e geometria espacial. Destes treze volumes, oito tratam de geometria (cinco da plana e três da espacial).

Segundo [2], “a ênfase inicial da Matemática ocorreu na aritmética e na mensuração



Fonte: Wikipedia

Figura 1.2: Euclides de Alexandria

práticas. Uma arte especial começou a tomar corpo para o cultivo, aplicação e ensino dessa ciência prática. Nesse contexto, todavia, desenvolvem-se tendências no sentido da abstração e, até certo ponto, passou-se então a estudar a ciência por si mesma. Foi dessa maneira que a álgebra evoluiu ao fim da aritmética e a geometria teórica originou-se da mensuração”. Ainda segundo [2] “os postulados dos Elementos de Euclides restringem o uso da régua e do compasso às seguintes regras: com a régua permite-se traçar uma reta de comprimento indefinido passando por dois pontos distintos dados. Com o compasso permite-se traçar uma circunferência com centro num ponto dado passando por um segundo ponto qualquer dado”. Vale ressaltar que a régua citada não possui escala e o compasso de Euclides desmonta-se quando se levanta um de seus braços do papel, impossibilitando a *transferência* da medida de um segmento. Arquimedes baseava seus trabalhos na geometria euclidiana.

Conhecer como os grandes sábios pensavam para contribuir com e desenvolver a Matemática é de extrema importância para o aprendizado do estudante, nos diversos níveis. A História da Matemática, segundo [6], pode proporcionar ao estudante a construção de novos conceitos e uma visão de como essa ciência se desenvolveu com os povos passados. Os Elementos de Euclides abriram as portas para uma geometria logicamente organizada, reunindo os maiores conhecimentos matemáticos da época, como sistema dedutivo. Euclides utilizou-se de figuras geométricas de áreas iguais em muitas demonstrações em Os Elementos, no qual ele mostra como, a partir de qualquer polígono, é possível construir com régua e compasso um quadrado de área igual à da figura inicial.

“Euclides não definiu formalmente o conceito de área, mas utilizou-se, no decorrer de sua exposição, da noção de que área é a superfície (conteúdo) de uma figura. O conceito de área em Os Elementos de Euclides é trabalhado a partir de duas abordagens complementares: a equivalência de áreas (figuras com o mesmo conteúdo) e a transformação de figuras (construção de uma figura com forma diferente da primeira, mas com o mesmo

1.3 Arquimedes de Siracusa

De acordo com [2], Arquimedes, Figura 1.3, era natural de Siracusa, na Sicília, e figura como um dos maiores matemáticos da antiguidade. Ele nasceu por volta de 287 a.C. e morreu durante o saque de Siracusa, pelos romanos, em 212 a.C.. Era filho de um astrônomo e desfrutava de alto prestígio junto ao rei Hierão (talvez um parente). Em [2], o autor cita que Arquimedes criou vários engenhos para ajudar na defesa de Siracusa quando os romanos, comandados pelo general Marcelo, a sitiaram. Catapultas móveis, de alcance ajustável, para arremessar pesos nos navios inimigos que se aproximassem da cidade e grandes guindastes que içavam da superfície do mar esses navios (Figura 1.4). Consta que ele moveu sozinho e sem esforço, com a ajuda de um sistema de polias compostas, um navio carregado para demonstrar sua célebre frase: “Dê-me uma alavanca e um ponto de apoio e eu moverei a Terra”. Uma história se destaca, entre tantas. A da coroa do rei Hierão. O rei mandara o ourives cunhar uma coroa toda em ouro. Suspeitando de que havia prata misturada ao ouro na coroa, pediu a Arquimedes que resolvesse o problema sem ter de desmanchar a mesma. Este, quando estava a banhar-se, encontrou a solução¹ e saiu gritando: “Eureka! Eureka!”(Achei! Achei!). Ele colocou a coroa num dos pratos de uma balança e um peso igual de ouro no outro e depois repetiu essa operação sob a água. O prato com a coroa ergueu-se, mostrando que ela continha algum material menos denso que o ouro.



Fonte: gestaoeducacional.com.br

Figura 1.3: Arquimedes

¹Dando origem à Primeira Lei da Hidrostática - Todo corpo imerso, total ou parcialmente, em um fluido em equilíbrio, sofre a ação de uma força vertical, para cima, aplicada pelo fluido. Essa força é denominada empuxo, cuja intensidade é igual ao peso do fluido deslocado pelo corpo.



Fonte: historiaemfoco1.wixsite.com

Figura 1.4: A garra de Arquimedes

Com as invenções de Arquimedes, Siracusa resistiu aos embates com o exército romano por quase três anos. Ao conquistar a cidade, o general Marcelo ordenou que nada de mal fosse feito ao grande matemático. Contudo, já era tarde. Diz-se, segundo [2], que Arquimedes estava “mergulhado em raciocínios, preocupado com um diagrama traçado num tabuleiro feito na areia. Distraído, não percebeu que um soldado romano se aproximou do seu tabuleiro e ele ordenou que se afastasse. Com raiva, o soldado o matou com uma lança”. Contudo, Marcelo mandou que o enterrasse com todas as honras e ordenou que o desejo de Arquimedes fosse respeitado: gravar uma esfera inscrita num cilindro circular reto em seu túmulo. Isto permitiu que Cícero, questor romano na Sicília, em 75 a.C., encontrasse o túmulo, esquecido por todos os siracusanos. Cícero ordenou que fossem preservados o túmulo e os arredores. Porém, estes cuidados cessaram em algum momento e o túmulo ficou perdido, até que em 1965, nas escavações para as fundações de um hotel encontrou-se novamente o túmulo. Arquimedes estudou na Universidade de Alexandria, fundada por Euclides, no reinado de Ptolomeu. Porém, quando Arquimedes chegou em Alexandria, Euclides já havia morrido. Arquimedes era bastante inteligente e constantemente costumava vagar em seus pensamentos - fazendo cálculos, buscando provas e soluções, ao ponto de *esquecer* de comer, trocar de roupas, etc. Como o papel era artigo caro e difícil, ele usava a areia do chão, cinza da lareira, óleo sobre seu próprio corpo e tudo que estivesse ali ao seu alcance na hora que estava produzindo seus trabalhos, para depois colocar no papel em definitivo. Ele dizia que o raciocínio puro era a coisa mais bela de todo o mundo. Como na sua época, na escola, não tinha tanto conhecimento acumulado para aprender, ele conseguia pensar mais, articulando seu raciocínio com as ideias desenvolvidas por seus predecessores. Hoje, os estudantes têm uma vasta teoria para entender e guardar. Com isso, sobra pouco tempo para *pensar sozinho* e criar suas próprias ideias e aprimorar as existentes.

Segundo [4]: “Algumas obras de Arquimedes foram pouco lidas. Uma das mais co-

nhecidas é a Quadratura da parábola. Das obras que foram preservadas, destacam-se as seguintes em ordem cronológica:

Sobre o Equilíbrio das Figuras Planas I;

A Quadratura da parábola;

Sobre o Equilíbrio de Figuras Planas II;

Sobre a Esfera e o Cilindro;

Sobre as Espirais;

Sobre os Cones e os Esferóides;

Sobre os Corpos Flutuantes;

A Medida de um Círculo;

O Contador dos Grãos de Areia.”

Capítulo 2

O método da exaustão de Eudoxo

O método da exaustão de Eudoxo consistia num excelente método para a comparação entre duas grandezas bem como se mostrava útil para a prova de fórmulas que davam as áreas de algumas regiões planas. O método de Eudoxo dizia que:

Se de uma grandeza qualquer subtrairmos uma parte não menor que sua metade, do restante subtrairmos novamente uma parte não menor que sua metade, e assim o fazemos sucessivamente, chegaremos ao final de uma quantidade finita de retiradas a uma grandeza menor que qualquer outra grandeza predeterminada da mesma espécie.

O que está por trás do método de Eudoxo é o fato do mesmo evitar, de certa forma, a manipulação com o infinito, questão não muito bem entendida pelos gregos. O método de Eudoxo é usado em várias demonstrações, possibilitando contornar, principalmente, questões de proporcionalidade entre figuras geométricas incomensuráveis, sendo estas questões tratadas com certos argumentos de aproximação. O método de Eudoxo transforma conceitos intuitivos, do tipo tão pequeno quanto se queira que aparecem em processos de aproximações finitas, em um método de argumentação. Tendo o caráter argumentativo, por redução ao absurdo, esse método nos obriga a conhecer previamente o resultado a ser demonstrado, isto é, não serve para encontrar novas verdades, mas apenas para demonstrar aquelas que eram descobertas empiricamente.

Na próxima seção mostraremos como Arquimedes usou o método de Eudoxo para comparar a área de um círculo com a de um triângulo.

2.1 Círculo com medida de um triângulo: a ideia de Arquimedes

Entre as obras deixadas por Arquimedes, está A Medida do Círculo - obra composta por apenas três proposições - na qual calcular a área do círculo nada mais era do que uma maneira de encontrar uma figura retilínea, um triângulo por exemplo, cuja área fosse igual à área do dado círculo. Esse foi, na época, um dos resultados mais populares de Arquimedes e venerado por vários matemáticos durante muitos séculos. De certo modo, intuitivamente, muitos já haviam conjecturado a área do círculo como sendo igual à metade do comprimento da circunferência vezes seu raio.

Na Figura 2.1 temos um círculo de raio r com centro em A e cuja circunferência que o limita tem comprimento \mathcal{C} . No círculo está sobreposto um triângulo retângulo de catetos medindo $\overline{AB} = r$ e $\overline{BC} = \mathcal{C}$. Sendo \mathcal{A} a medida da área do círculo e \mathcal{T} a medida da área do triângulo, Arquimedes mostrou, usando o método da exaustão de Eudoxo, que $\mathcal{A} = \mathcal{T}$.

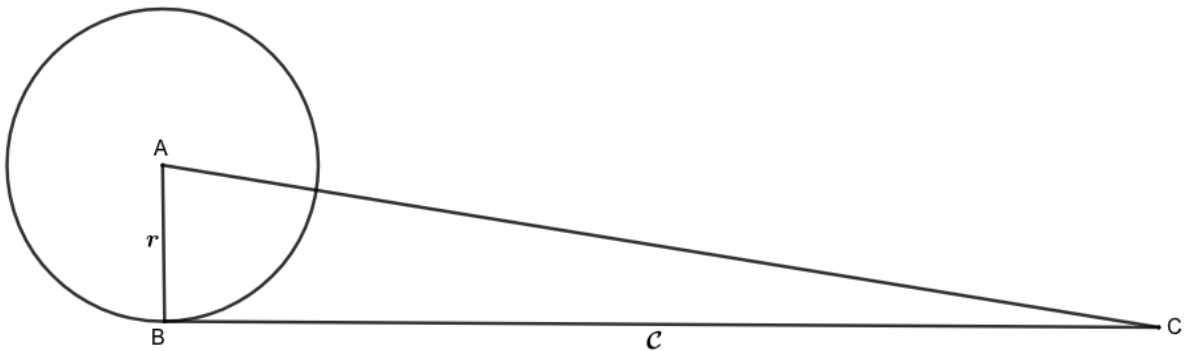


Figura 2.1: Área do círculo comparada à de um triângulo

Como as grandezas \mathcal{A} e \mathcal{T} são de **mesma espécie** e, portanto, comparáveis, existem apenas três possibilidades, $\mathcal{A} > \mathcal{T}$, $\mathcal{A} = \mathcal{T}$ e $\mathcal{A} < \mathcal{T}$ e, pelo que hoje nós conhecemos como Lei da Tricotomia, apenas uma delas é verdadeira. Para vermos que temos de fato $\mathcal{A} = \mathcal{T}$ mostraremos um duplo absurdo ao supormos $\mathcal{A} > \mathcal{T}$ e $\mathcal{A} < \mathcal{T}$.

Suponhamos que se tenha $\mathcal{A} > \mathcal{T}$. Neste caso temos as grandezas de mesma espécie \mathcal{A} e $\mathcal{A} - \mathcal{T}$ às quais pode ser aplicado o método da exaustão. Seja \mathcal{Q}_1 a medida da área do quadrado inscrito no círculo. Temos que $\mathcal{Q}_1 > \frac{\mathcal{A}}{2}$ e podemos fazer a primeira etapa da exaustão retirando do círculo o quadrado para obter uma região de área medindo $\mathcal{A} - \mathcal{Q}_1$. Esta região está representada pelas quatro regiões em branco na Figura 2.2.

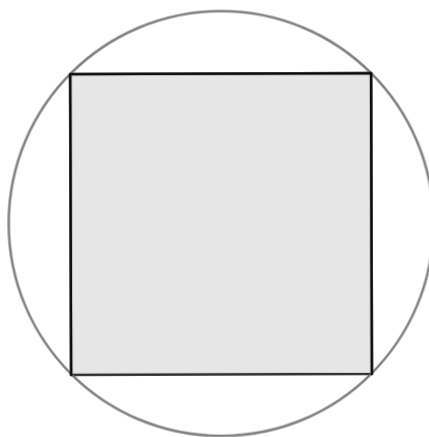


Figura 2.2: Primeira etapa da exaustão com área restante medindo $\mathcal{A} - \mathcal{Q}_1$

Considere, agora, em cada uma das quatro regiões em branco um triângulo isósceles com base no lado do quadrado e vértice na circunferência. Se \mathcal{S} é a medida da área de cada um desses quatro triângulos note que $4\mathcal{S} > \frac{1}{2}(\mathcal{A} - \mathcal{Q}_1)$ e podemos fazer a segunda etapa da exaustão retirando da região $\mathcal{A} - \mathcal{Q}_1$ os quatro triângulos isósceles para obter uma região de área medindo $\mathcal{A} - \mathcal{Q}_1 - 4\mathcal{S}$. Esta região está representada pelas oito regiões em branco na Figura 2.3. Observe que $\mathcal{Q}_2 = \mathcal{Q}_1 + 4\mathcal{S}$ representa, na verdade, a medida da área de um octógono inscrito no círculo.

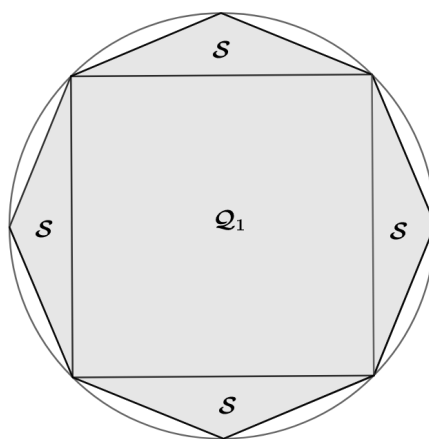


Figura 2.3: Segunda etapa da exaustão com área restante medindo $\mathcal{A} - \mathcal{Q}_2$

Podemos continuar indefinidamente nesse processo e sempre considerar triângulos isósceles nas regiões em branco, obtidas após a etapa anterior da exaustão. Após um número finito n de etapas, a área restante medirá $\mathcal{A} - \mathcal{Q}_n$ onde \mathcal{Q}_n é a medida da área do polígono regular de 2^{n+1} lados e, segundo o método de exaustão de Eudoxo, essa medida é menor que as grandezas \mathcal{A} e $\mathcal{A} - \mathcal{T}$ consideradas inicialmente. Disto, segue que $\mathcal{A} - \mathcal{Q}_n < \mathcal{A} - \mathcal{T}$ donde concluímos que $\mathcal{T} < \mathcal{Q}_n$.

Agora observe a Figura 2.4:

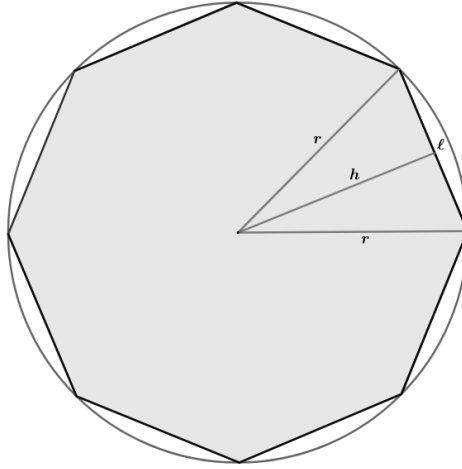


Figura 2.4: Um dos oito triângulos que formam o polígono regular de área \mathcal{Q}_2

No caso de um polígono regular de 2^{n+1} lados, seu perímetro $p = 2^{n+1}\ell$ é menor que o comprimento da circunferência \mathcal{C} . A altura h , em relação ao lado de medida ℓ , de cada triângulo, é menor que o raio r da circunferência. Assim, a medida \mathcal{Q}_n é dada por

$$\mathcal{Q}_n = 2^{n+1} \frac{\ell h}{2} < \frac{\mathcal{C}r}{2} = \mathcal{T}$$

o que nos leva a uma contradição.

Suponhamos, agora, que se tenha $\mathcal{A} < \mathcal{T}$. Nesse caso, consideremos o quadrado circunscrito ao círculo, cuja área também denotaremos por \mathcal{Q}_1 , e aplicaremos o princípio da exaustão às grandezas de mesma espécie \mathcal{Q}_1 e $\mathcal{T} - \mathcal{A}$. Temos que $\mathcal{A} > \frac{\mathcal{Q}_1}{2}$ e podemos fazer a primeira etapa da exaustão retirando do quadrado o círculo para obter uma região de área medindo $\mathcal{Q}_1 - \mathcal{A}$. Esta região está representada pelas quatro regiões em branco na Figura 2.5.

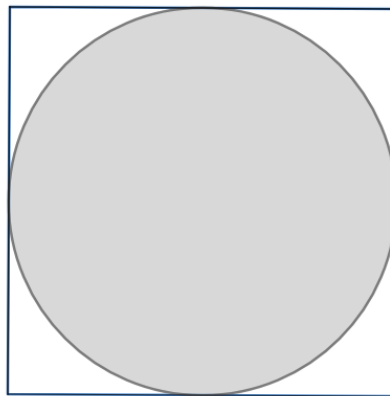


Figura 2.5: Primeira etapa da exaustão com área restante medindo $\mathcal{Q}_1 - \mathcal{A}$

Considere, agora, em cada uma das quatro regiões em branco um triângulo isósceles com vértices nos vértices do quadrado e bases tangentes à circunferência. Se \mathcal{S} é a medida da área de cada um desses quatro triângulos note que $4\mathcal{S} > \frac{1}{2}(\mathcal{Q}_1 - \mathcal{A})$ e podemos fazer a segunda etapa da exaustão retirando da região em branco os quatro triângulos isósceles considerados. A Figura 2.6 ilustra a região resultante.

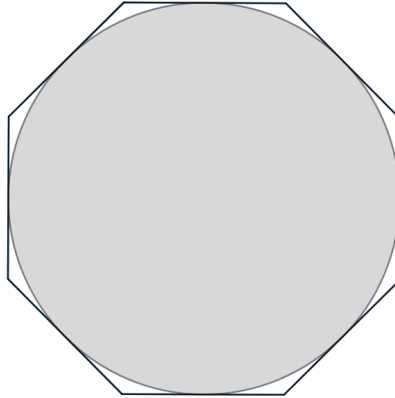


Figura 2.6: Segunda etapa da exaustão com área restante medindo $\mathcal{Q}_2 - \mathcal{A}$

Note que podemos escrever a grandeza $\mathcal{Q}_1 - \mathcal{A} - 4\mathcal{S}$ como $\mathcal{Q}_2 - \mathcal{A}$, onde estamos usando, novamente, a notação \mathcal{Q}_n para a área do polígono regular de 2^{n+1} lados, agora, circunscrito ao círculo.

Podemos continuar indefinidamente nesse processo e sempre considerar triângulos isósceles nas regiões em branco obtidas após a etapa anterior da exaustão e, da mesma forma que antes, após um número finito n de etapas, a área restante medirá $\mathcal{Q}_n - \mathcal{A}$. Segundo o método de exaustão de Eudoxo, essa medida é menor que as grandezas \mathcal{Q}_1 e $\mathcal{T} - \mathcal{A}$ consideradas inicialmente. Disto, segue que $\mathcal{Q}_n - \mathcal{A} < \mathcal{T} - \mathcal{A}$, donde concluímos que $\mathcal{Q}_n < \mathcal{T}$.

Observe a Figura 2.7:

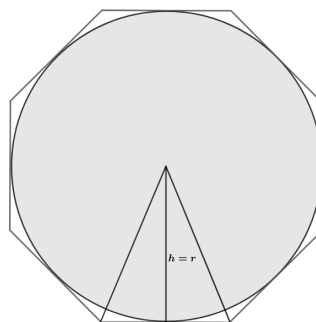


Figura 2.7: Um dos oito triângulos que formam o polígono regular de área \mathcal{Q}_2

Ao contrário do que foi feito anteriormente, para o polígono regular circunscrito de 2^{n+1} lados, o perímetro $p = 2^{n+1}\ell$ é maior que o comprimento da circunferência \mathcal{C} . A altura

h , em relação ao lado de medida ℓ , de cada triângulo é igual ao raio r da circunferência. Assim, a medida \mathcal{Q}_n é dada por

$$\mathcal{Q}_n = 2^{n+1} \frac{\ell h}{2} > \frac{\mathcal{C}r}{2} = \mathcal{T}$$

o que nos leva a uma contradição.

Desse modo, a Lei da Tricotomia nos faz concluir que de fato a área \mathcal{A} do círculo é igual à área \mathcal{T} do triângulo, ou seja,

$$\mathcal{A} = \frac{\mathcal{C}r}{2}. \quad (2.1)$$

Hoje em dia é de conhecimento de todos que o comprimento de uma circunferência de raio r é dado por $\mathcal{C} = 2\pi r$, onde π é um número irracional cujo valor é, aproximadamente, 3,14. Esse fato, combinado com a equação 2.1, nos levaria à fórmula

$$\mathcal{A} = \pi r^2,$$

com a qual se calcula a área do círculo atualmente.

Na próxima seção abordaremos o método utilizado por Arquimedes para obter a área do círculo e, conseqüentemente, conseguir as primeiras aproximações para o número π .

2.2 Método de Arquimedes para o cálculo da área do Círculo

Nos dias atuais, calcular áreas de figuras planas é um procedimento relativamente simples e isto se deve às inúmeras contribuições deixadas por matemáticos de um passado recente, através das quais diversas formulações foram produzidas para nos auxiliar no cômputo desses valores. Nos tempos atuais, calcular a área de uma figura plana é encontrar uma medida, ou seja, um número que a representa. Mas, nem sempre foi assim. Achar a área de uma círculo era determinar uma figura plana com área equivalente à do círculo, tal como foi feito na seção 2.1, por exemplo. Atualmente, podemos calcular a área do círculo usando a fórmula $\mathcal{A} = \pi r^2$, onde π é uma constante chamada *pi*. O valor de π é, aproximadamente, 3,14 para efeito de cálculos. Mas, se quisermos calcular a área da circunferência sem conhecermos esta fórmula? Ou mesmo chegarmos a ela? Lembremos que o método da exaustão não é útil no que diz respeito à produção de uma fórmula para a área de uma dada figura plana. No que segue descreveremos a ideia utilizada por

Arquimedes para o cálculo da área do Círculo.

O método consistia em aproximar a área \mathcal{A} do Círculo de raio r pela média das medidas das áreas de dois polígonos regulares semelhantes, um inscrito e outro circunscrito ao Círculo.

Na primeira etapa, ilustrada na Figura 2.8, ele considerou quadrados.

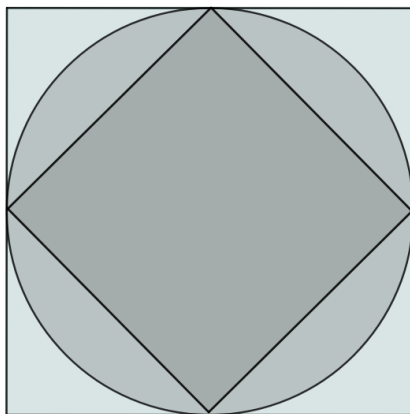


Figura 2.8: Quadrados inscrito e circunscrito

Como as áreas dos quadrados inscrito e circunscrito são, respectivamente, $2r^2$ e $4r^2$, temos a desigualdade

$$2r^2 \leq \mathcal{A} \leq 4r^2,$$

onde a primeira aproximação para a área do círculo, cuja medida denotaremos por \mathcal{A}_4 , é dada por

$$\mathcal{A} \approx \mathcal{A}_4 = \frac{2r^2 + 4r^2}{2} = 3r^2.$$

Na segunda etapa, ilustrada na Figura 2.9, foram considerados hexágonos regulares.

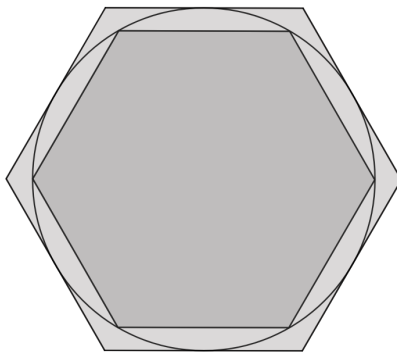


Figura 2.9: Hexágonos inscrito e circunscrito

Observe que cada um dos hexágonos inscrito e circunscrito pode ser decomposto em seis triângulos equiláteros. Os triângulos inscritos têm lados medindo r e os circunscritos

têm altura medindo r (Veja na Figura 2.10). Desta forma, a área de cada um dos triângulos inscritos é dada por $\frac{r^2\sqrt{3}}{4}$, enquanto a área de cada um dos triângulos circunscritos é dada por $\frac{r^2\sqrt{3}}{3}$. Disto segue a desigualdade

$$\frac{3\sqrt{3}r^2}{2} \leq \mathcal{A} \leq 2\sqrt{3}r^2$$

e, nessa segunda aproximação da área, que denotaremos por \mathcal{A}_6 , obtemos

$$\mathcal{A} \approx \mathcal{A}_6 = \frac{\frac{3\sqrt{3}r^2}{2} + 2\sqrt{3}r^2}{2} = \frac{7\sqrt{3}r^2}{4}.$$

Porém, era claro o erro cometido nessas aproximações. Neste sentido, Arquimedes resolveu considerar polígonos regulares com maior número de lados. No que segue mostraremos uma forma alternativa de conseguir os resultados de Arquimedes.

Considerando os polígonos regulares inscrito e circunscrito com n lados, podemos calcular as áreas de cada um dos n triângulos isósceles em que decompos esses polígonos da seguinte forma. Primeiro observe a Figura 2.10.

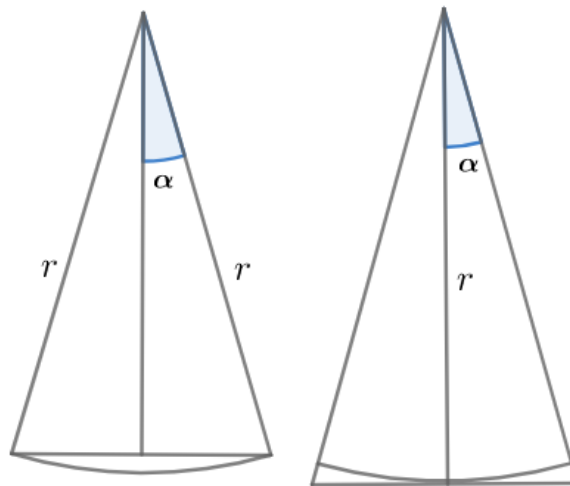


Figura 2.10: Triângulos inscrito e circunscrito

Nela o ângulo formado pelos lados iguais dos triângulos isósceles medem $360^\circ/n$ e $\alpha = 360^\circ/2n$ é o ângulo formado entre os apótemas dos polígonos inscrito e circunscrito e um dos lados iguais dos triângulos isósceles. Denotando por a_i e b_i as medidas do apótema e da base, respectivamente, do triângulo inscrito da Figura 2.10 temos

$$\cos \alpha = \frac{a_i}{r} \quad \text{e} \quad \sin \alpha = \frac{b_i}{2r}. \quad (2.2)$$

Para a área \mathcal{T}_i , de cada um dos triângulos inscritos, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_i &= \frac{a_i b_i}{2} \\ &= r^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \\ &= \frac{r^2}{2} \operatorname{sen} 2\alpha.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Para o triângulo circunscrito da Figura 2.10, temos que o apótema tem mediada r e denotando a medida da base por b_c temos

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b_c/2}{r}.\tag{2.4}$$

Para a área \mathcal{T}_c , de cada um dos triângulos circunscritos, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_c &= \frac{r b_c}{2} \\ &= r^2 \operatorname{tg} \alpha.\end{aligned}$$

Com isso, para n triângulos inscritos e circunscritos, obtemos a desigualdade

$$\frac{nr^2}{2} \operatorname{sen} 2\alpha \leq \mathcal{A} \leq nr^2 \operatorname{tg} \alpha\tag{2.5}$$

e, nessa etapa, a aproximação da área do Círculo pela média das áreas dos polígonos inscrito e circunscrito é dada por

$$\mathcal{A} \approx \mathcal{A}_n = \frac{nr^2}{4} \operatorname{sen} 2\alpha + \frac{nr^2}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Após alguma manipulação trigonométrica, chegamos a

$$\mathcal{A}_n = nr^2 \operatorname{sen} \alpha \left(\frac{1 + \cos^2 \alpha}{2 \cos \alpha} \right),\tag{2.6}$$

onde $\alpha = 360^\circ/2n$.

Uma outra forma de mostrar a desigualdade 2.5 é feita com o auxílio da Figura 2.11.

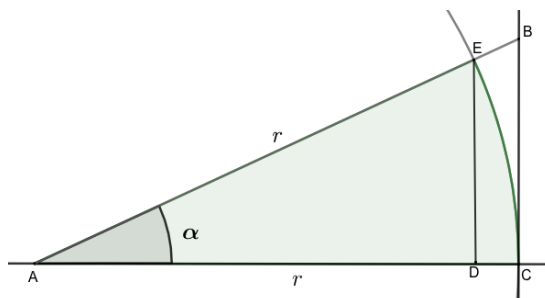


Figura 2.11: Comparação das áreas

Nela temos que $\cos \alpha = \frac{\overline{AD}}{r}$, $\sin \alpha = \frac{\overline{ED}}{r}$ e $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{BC}}{r}$. Distos segue que as áreas do triângulo ADE , setor circular ACE e triângulo ACB são, respectivamente,

$$\frac{r^2}{2} \cos \alpha \sin \alpha, \quad \frac{\mathcal{A}}{n} \quad \text{e} \quad \frac{r^2}{2} \operatorname{tg} \alpha$$

e vale, claramente, a desigualdade

$$\frac{r^2}{2} \cos \alpha \sin \alpha \leq \frac{\mathcal{A}}{n} \leq \frac{r^2}{2} \operatorname{tg} \alpha$$

donde se chega à desigualdade 2.5.

Por fim, vamos construir uma tabela para analisar o comportamento dos valores

$$\frac{nr^2}{2} \sin 2\alpha, \quad \mathcal{A}, \quad nr^2 \operatorname{tg} \alpha$$

à medida que n cresce.

n	$\alpha = 360^\circ/2n$	$(nr^2/2) \sin 2\alpha$	$nr^2 \operatorname{tg} \alpha$	\mathcal{A}_n	$\mathcal{A} \approx$
4	45°	$2r^2$	$4r^2$	$3r^2$	$3,0000r^2$
6	30°	$\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$	$2\sqrt{3}r^2$	$\frac{7\sqrt{3}}{4}r^2$	$3,0311r^2$
8	$22,5^\circ$	$2\sqrt{2}r^2$	$8(\sqrt{2}-1)r^2$	$(5\sqrt{2}-4)r^2$	$3,0711r^2$
12	15°	$3r^2$	$12(2-\sqrt{3})r^2$	$\frac{27-12\sqrt{3}}{2}r^2$	$3,1077r^2$
24	$7,5^\circ$	$3(\sqrt{6}-\sqrt{2})r^2$	$24(\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-2)r^2$	$\frac{27\sqrt{6}+21\sqrt{2}-24\sqrt{3}-48}{2}r^2$	$3,1327r^2$

Na última linha foram usados os valores de $\sin 15^\circ$ e $\operatorname{tg} 7,5^\circ$. Os mesmos foram calculados como segue. Da relação

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &= \sin^2 30^\circ \\ &= (2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ)^2 \\ &= 4 \sin^2 15^\circ (1 - \sin^2 15^\circ), \end{aligned}$$

donde obtemos a equação

$$16 \sin^4 15^\circ - 16 \sin^2 15^\circ + 1 = 0,$$

cuja solução é

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Segue desta última igualdade que

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}.$$

Por outro lado, como

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

temos que

$$\begin{aligned} 2 - \sqrt{3} &= \operatorname{tg} 15^\circ \\ &= \frac{2 \operatorname{tg} 7,5^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 7,5^\circ}, \end{aligned}$$

donde obtemos a equação

$$\operatorname{tg}^2 7,5^\circ + (4 + 2\sqrt{3}) \operatorname{tg} 7,5^\circ - 1 = 0,$$

cujas soluções são

$$\operatorname{tg} 7,5^\circ = \sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{3} - 2.$$

Usando repetidamente as relações trigonométricas do seno e tangente do arco duplo, podemos chegar aos valores de $\operatorname{sen} 7,5^\circ$, $\operatorname{sen} 3,75^\circ$, $\operatorname{tg} 3,75^\circ$ e $\operatorname{tg} 1,875^\circ$, donde obteríamos as estimativas para o valor de \mathcal{A} com polígonos de 48 e 96 lados. Entretanto, os cálculos se tornam enfadonhos. Na tabela abaixo, completamos esses valores com o auxílio de uma calculadora científica:

n	$\alpha = 360^\circ/2n$	$\mathcal{A} \approx$
48	$3,75^\circ$	$3,1393r^2$
96	$1,875^\circ$	$3,1410r^2$

Paralelamente a esses cálculos, Arquimedes também estimou a medida do comprimento da circunferência pela média das medidas dos perímetros do polígono regular inscrito e circunscrito. Como feito anteriormente, b_i e b_c representam as medidas das bases dos triângulos isósceles inscritos e circunscritos. Segue das igualdades 2.2 e 2.4 que

$$\mathcal{P}_i = nb_i = 2rn \operatorname{sen} \alpha$$

e

$$\mathcal{P}_c = nb_c = 2nr \operatorname{tg} \alpha$$

representam os perímetros dos polígonos regulares inscrito e circunscrito ao círculo, respectivamente. No caso dos polígonos inscritos e circunscritos com 48 e 96 lados seus triângulos inscritos e circunscritos têm ângulo central $\alpha = 360^\circ/48 = 7,5^\circ$ e $\alpha = 360^\circ/96 = 3,75^\circ$,

donde obtemos, em cada caso, o comprimento da circunferência \mathcal{C} , aproximado pela média

$$\mathcal{C} = \frac{\mathcal{P}_i + \mathcal{P}_c}{2}$$

representado na tabela abaixo:

n	$\alpha = 360^\circ/2n$	\mathcal{P}_i	\mathcal{P}_c	\mathcal{C}
48	$3,75^\circ$	$6,2787r$	$6,2921r$	$6,2854r$
96	$1,875^\circ$	$6,2820r$	$6,2854r$	$6,2837r$

Nesse sentido, a conclusão de Arquimedes foi que a área de um círculo está para o quadrado do seu raio na mesma razão que o comprimento de sua circunferência está para o seu diâmetro e esta razão é dada aproximadamente pela constante 3,14, isto é

$$\frac{\mathcal{A}}{r^2} \approx 3,14 \approx \frac{\mathcal{C}}{d}.$$

A partir de 1737, passou-se a adotar sistematicamente o símbolo π para denotar essa constante. Desde então, todo o mundo o seguiu. Na verdade, alguns anos antes, o matemático inglês Willian Jones (1706) propusera a mesma notação, ou seja, utilizou a letra grega π para denotar essa constante, sem muito êxito. Hoje em dia muito se sabe sobre o número π inclusive que se trata de um número irracional. Existem aproximações do número π com trilhões de dígitos. Abaixo segue uma boa aproximação do número pi:

$$\pi = 3,141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944 \dots$$

Capítulo 3

Exaustão da área do segmento parabólico

Neste capítulo abordaremos um problema clássico da geometria: a Quadratura da parábola. Começaremos introduzindo a ideia que os antigos tinham de se fazer a quadratura de uma figura plana, ou seja, a partir das medidas conhecidas da figura se obter um quadrado com área equivalente à da figura dada, utilizando-se apenas de uma régua não graduada e um compasso. Para uma melhor compreensão deste conceito, na seção a seguir apresentaremos a ideia da construção de alguns números reais positivos utilizando-se apenas de uma régua não graduada e um compasso. Esses números são chamados de construtíveis com régua e compasso.

3.1 Algumas construções com régua e compasso

Definição 3.1.1 *Se um número real positivo x pode ser obtido a partir de um número finito de passos, feitos com uma régua não graduada e um compasso, aplicados a um segmento de reta representando a unidade de medida, dizemos que x é construtível.*

Os exemplos a seguir ilustram bem esse conceito.

Exemplo 3.1.1 *Construção de um número natural n .* Considere uma semirreta r com origem em O . Marque sobre r um ponto A_1 qualquer. Consideremos a medida do segmento OA_1 como sendo u , nossa unidade padrão de medida, ou seja, $\overline{OA_1} = 1u$. Com o compasso centrado em O abra-o até o ponto A_1 . Agora, com o compasso centrado no ponto A_1 marque o ponto A_2 , interseção de r com a circunferência de raio $1u$. Repetindo

esse processo mais $n - 2$ vezes obtemos o ponto A_n . O segmento de reta OA_n tem medida $\overline{OA_n} = nu$.

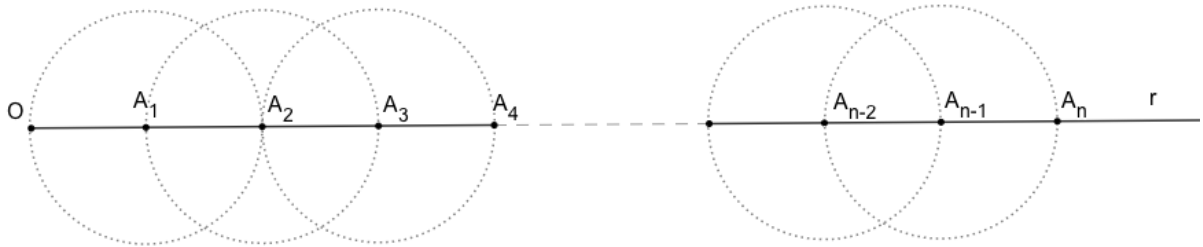


Figura 3.1: Construção de um número natural

Exemplo 3.1.2 Construção de uma reta paralela por um ponto. Consideremos uma reta s e um ponto P não pertencente à reta s . Com o compasso centrado em P e abertura maior que a distância entre o ponto P e a reta s , marque o ponto A , interseção da reta s com a circunferência centrada em P e raio igual à abertura considerada no compasso. Com o compasso centrado em A e mesma abertura, marque o ponto B , interseção da reta s com a circunferência centrada em A e raio ρ . Por fim, com o compasso centrado em B e abertura ρ marque o ponto C interseção da circunferência centrada em B e raio ρ com a circunferência centrada em P e raio ρ . Ver Figura 3.2.

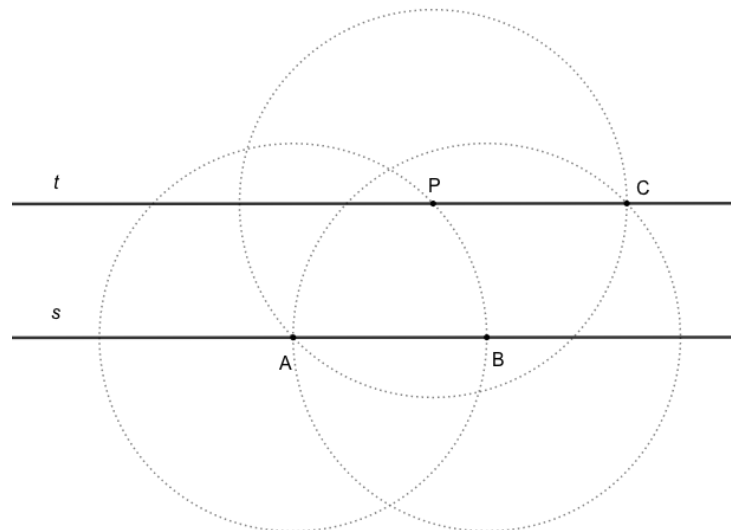


Figura 3.2: Construção de uma paralela por um ponto

Assim, como resultado dessa construção obtivemos o quadrilátero $ABCP$ com todos os lados medindo ρ , ou seja, obtivemos um losango. Como todo losango é um paralelogramo,

concluimos que a reta t que passa pelos pontos P e C é paralela a reta s que passa pelos pontos A e B .

Além da construção acima, lembremos de um dos resultados fundamentais da Geometria Euclidiana conhecido como Teorema de Thales:

Teorema 3.1.1 (Teorema de Thales) *Sejam r, s, t retas paralelas. Escolhemos pontos $A, A' \in r, B, B' \in s$ e $C, C' \in t$, de modo que A, B, C e A', B', C' sejam dois ternos de pontos colineares. Então*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}.$$

Uma demonstração para o Teorema de Thales pode ser vista em [3].

Vale lembrar que a recíproca do Teorema de Thales é verdadeira e foi provada pelo próprio Thales.

Exemplo 3.1.3 Construção de um número racional r . Uma vez que todo número racional positivo r pode ser escrito como uma razão entre dois números naturais, isto é, $r = \frac{p}{q}$, onde $p, q \in \mathbb{N}$ e $q \neq 0$ e conhecido o procedimento para a construção dos números naturais p e q , a construção do racional r se completa ao mostrarmos como se processa a construção do quociente entre dois números naturais. Considere a Figura 3.3:

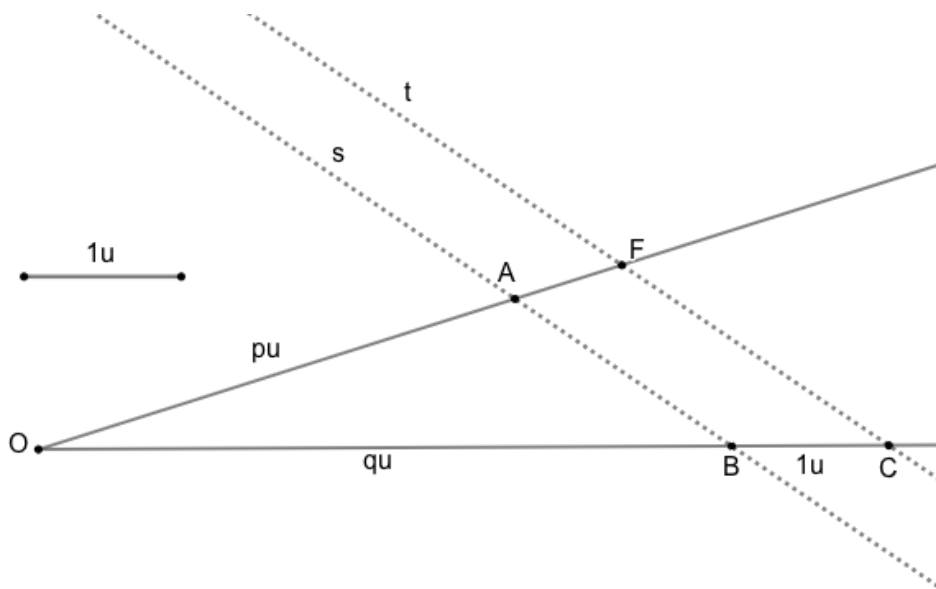


Figura 3.3: Quociente entre dois números naturais

Nela vemos duas semirretas com origem no ponto O sobre as quais estão marcados os pontos A e B que determinam segmentos OA e OB cujos comprimentos são $\overline{OA} = pu$

e $\overline{OB} = qu$ em relação a uma unidade padrão de medida de comprimento $1u$. Sobre a semirreta que passa por B e à direita de B marcamos o ponto C de forma que o segmento BC tenha comprimento $1u$. Por fim, traçamos a reta s passando por A e B e uma reta t passando por C , paralela à reta s . Segue-se do Teorema 3.1.1 que

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{BC}}, \text{ ou seja, } \frac{pu}{qu} = \frac{\overline{AF}}{1u},$$

donde concluímos que o segmento AF tem comprimento $\frac{p}{q}u$.

Exemplo 3.1.4 Construção do produto de dois números racionais Sejam dados os números racionais positivos p e q . Na Figura 3.4 temos esses números representados pelos comprimentos dos segmentos OA e BC , respectivamente.

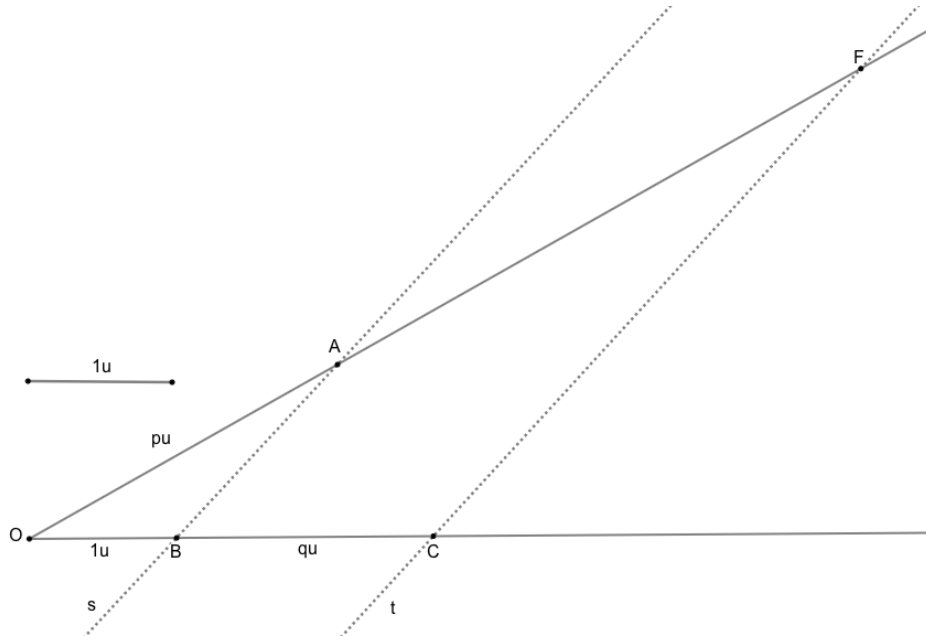


Figura 3.4: Produto entre dois números naturais

Novamente, pelo Teorema 3.1.1, temos que

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}},$$

donde concluímos que AF tem comprimento qpu .

Para o próximo exemplo, onde estabeleceremos a construção da raiz quadrada de um número racional, cabe lembrarmos de duas construções geométricas importantes. Começemos pela construção do ponto médio E de um segmento AB . Com o compasso centrado nos pontos A e B e com abertura \overline{AB} trace duas circunferências que se interceptam nos

pontos C e D . A reta que passa por estes pontos intercepta o segmento AB em seu ponto médio E . Para ver que isso é verdade, basta notar que o quadrilátero $ACBD$ tem os quatro lados iguais e, portanto, é um paralelogramo. Portanto, suas diagonais se interceptam em seus pontos médios.

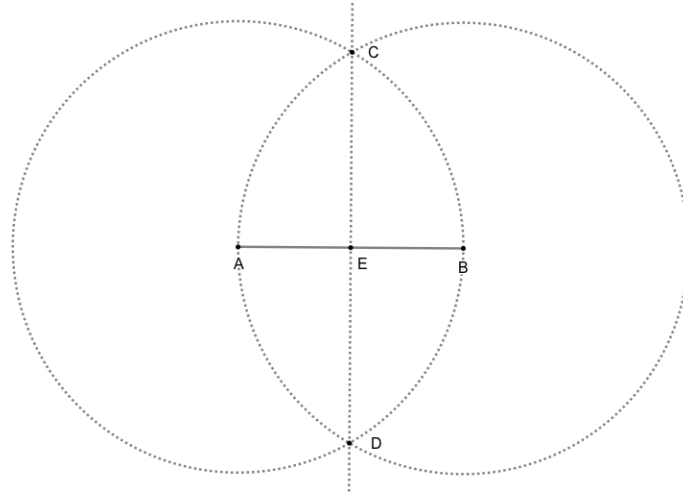


Figura 3.5: Ponto médio de um segmento

A segunda construção se refere à obtenção de uma reta t perpendicular a uma reta s dada, passando por um ponto P pertencente a s . Com o compasso centrado no ponto P e abertura qualquer, trace uma circunferência. Sejam A e B os pontos obtidos pela interseção desta circunferência com a reta s . Agora, com o compasso centrado nos pontos A e B e abertura maior que \overline{AP} trace duas circunferências que se interceptam nos pontos C e D . A reta t que passa pelos pontos C e D é perpendicular à reta s e passa por P .

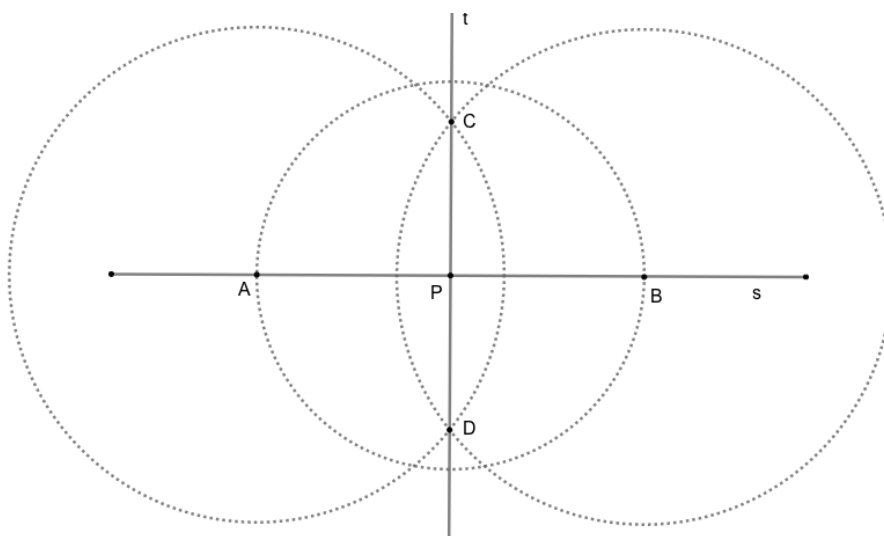


Figura 3.6: Perpendicular a uma reta por um ponto

Exemplo 3.1.5 Construção da raiz quadrada de um número racional positivo

Considere o número racional positivo r . Na Figura 3.7, temos esse número representado

pelo comprimento do segmento AB .

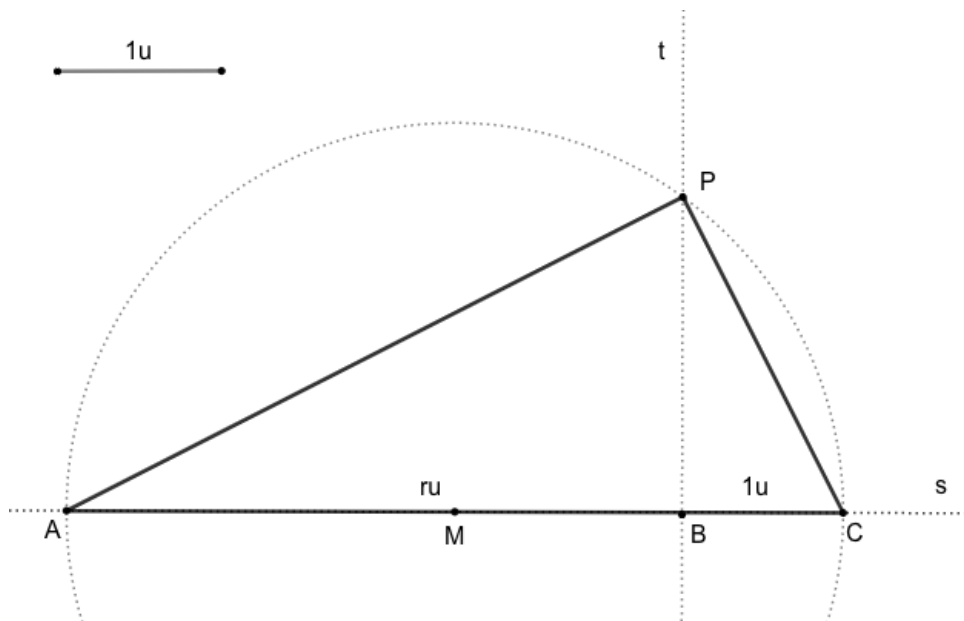


Figura 3.7: Raiz quadrada de um número racional

Afirmamos que o segmento PB mede \sqrt{r} . Com efeito, sabemos que os triângulos APC , ABP e PBC são retângulos. Assim, segue-se do Teorema de Pitágoras que:

$$\overline{PB}^2 = \overline{AP}^2 - (ru)^2, \quad \overline{PB}^2 = \overline{CP}^2 - (1u)^2 \quad \text{e} \quad \overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 = (ru + 1u)^2.$$

Deste modo obtemos que

$$\begin{aligned} 2\overline{PB}^2 &= \overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 - (ru)^2 - (1u)^2 \\ &= (ru + 1u)^2 - (ru)^2 - (1u)^2 \\ &= (ru)^2 + 2ru^2 + (1u)^2 - (ru)^2 - (1u)^2 \\ &= 2ru^2, \end{aligned}$$

donde concluímos que $\overline{PB} = \sqrt{ru}$.

Definição 3.1.2 *A quadratura de uma figura plana é definida como o processo de construção de um quadrado com área igual à da figura dada, utilizando-se apenas de uma régua não graduada e um compasso.*

No exemplo a seguir ilustramos esse conceito mostrando a construção de um quadrado com área equivalente à área de um triângulo dado.

Exemplo 3.1.6 *Quadratura de um triângulo*

Na Figura 3.8 temos um triângulo ABC de lados medindo $\overline{AB} = cU$, $\overline{AC} = bU$ e $\overline{BC} = aU$ em relação à unidade padrão de medida dada pelo segmento OP . O segmento AB , base do triângulo ABC , está suportado sobre a reta r e o ponto C' é a projeção ortogonal do ponto C sobre a reta r . Ou seja, C' é o ponto de interseção da reta r com a reta s , perpendicular a r por C . Considere hU a medida do segmento CC' .

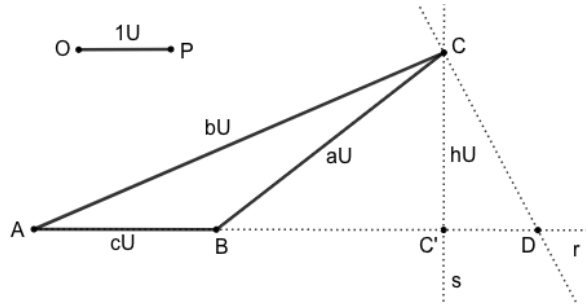


Figura 3.8: Triângulo ABC

Como a área do triângulo ABC é $\frac{ch}{2}U^2$,¹ nosso primeiro passo é construir um segmento com medida igual a $\frac{ch}{2}U$. Na Figura 3.9 foram construídos sobre a reta r os pontos D e E de modo que $\overline{C'D} = 1U$ e $\overline{DE} = cU$. Também foram traçadas as retas t_1 por C e D e t_2 paralela a t_1 por E . Por fim, marcamos o ponto F , interseção das retas s e t_2 , e o ponto M , ponto médio do segmento CF .

Afirmamos que o segmento CM mede $\frac{ch}{2}U$. De fato, segue do Exemplo 3.1.4 que $\overline{CF} = chU$ e como $\overline{CM} = \frac{1}{2}\overline{CF}$ o resultado segue.

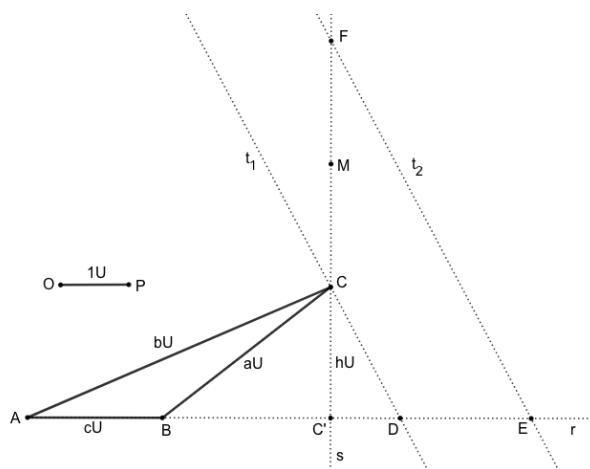


Figura 3.9: Quadratura do triângulo ABC

¹Aqui U^2 representa a unidade padrão de medida da área, isto é, $1U^2$ representa a área de um quadrado de lado medindo $1U$.

O próximo passo é construir um segmento com medida $\sqrt{\frac{ch}{2}}U$. Esse segmento será um dos lados de um quadrado de área $\frac{ch}{2}U^2$. Para isso, marcamos o ponto G sobre o segmento FM , de forma que $\overline{MG} = 1U$. Em seguida, marcamos o ponto N , ponto médio do segmento CG . Com o compasso centrado em N , marcamos o ponto H , interseção da reta t_3 , perpendicular à reta s por M , com a circunferência de raio \overline{CN} centrada em N . Marque agora o ponto I sobre a reta s de modo que $\overline{MI} = \overline{MH}$. Por fim, marque o ponto J , interseção das retas t_4 , perpendicular à reta s por I , e t_5 , perpendicular à reta t_3 por H .

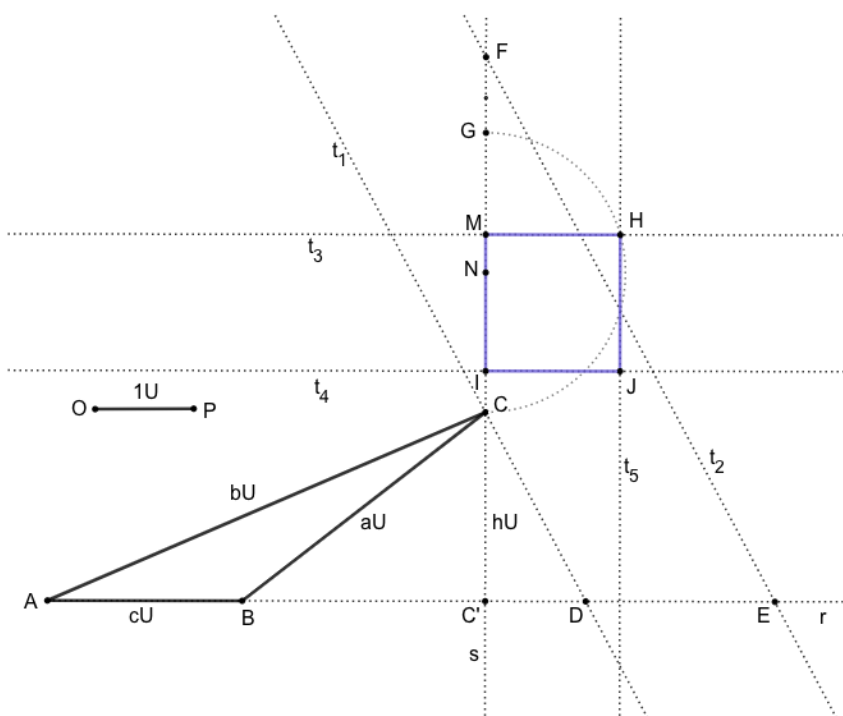


Figura 3.10: Quadratura do triângulo ABC

Segue do Exemplo 3.1.5 que o segmento MH tem medida $\sqrt{\frac{ch}{2}}U$. Como a reta t_3 é paralela à reta t_4 e a reta s é paralela à reta t_5 e $\overline{MI} = \overline{MH}$, segue que $MIJH$ é um quadrado. Ver Figura 3.10.

Na próxima seção faremos uma breve abordagem acerca de alguns conceitos elementares sobre a curva denominada parábola.

3.2 Elementos de uma parábola

Definição 3.2.1 *Dados, num plano, um ponto F e uma reta d que não contém F , chamamos de parábola o lugar geométrico formado pelos pontos deste plano que equidistam de F e de d .*

Arquimedes definiu a parábola como sendo a interseção de um cone circular reto com um plano π , paralelo a sua geratriz. Este cone era obtido girando-se um triângulo retângulo em torno de um dos seus catetos. Veja a curva na Figura 3.11.

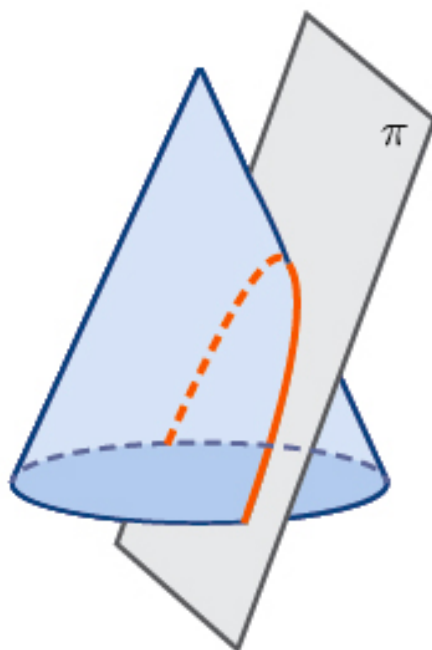


Figura 3.11: Definição geométrica

Considere a Figura 3.12. Nela destacamos alguns elementos importantes de uma parábola.

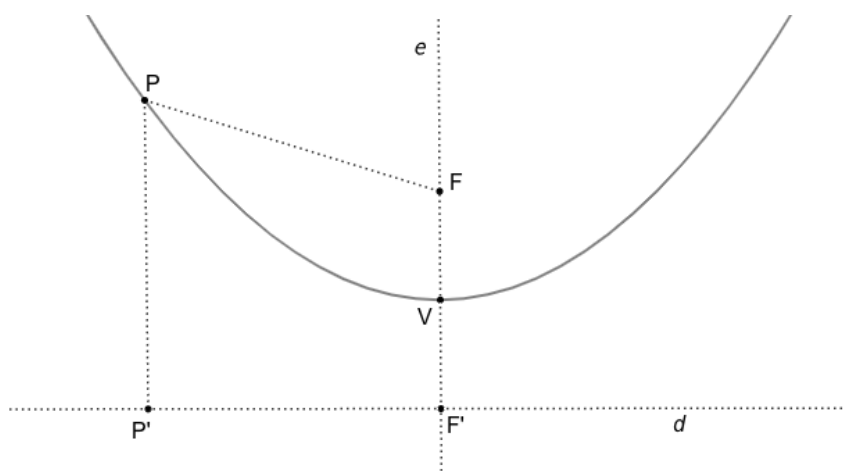


Figura 3.12: Elementos de uma parábola

Como na definição 3.2.1, os pontos F e a reta d foram dados arbitrariamente. O ponto

F e a reta d são chamados, respectivamente, de foco e de diretriz da parábola. A reta e , perpendicular à reta d por F é chamada de eixo de simetria da parábola. O ponto F' foi obtido pela interseção das retas d e e . O ponto médio do segmento FF' é chamado de vértice da parábola. Por fim, sendo P' a interseção da reta d com a reta perpendicular a d por um ponto genérico P , o ponto P está sobre a parábola se as medidas dos segmentos PF e PP' são iguais.

3.3 Propriedades de tangência de uma parábola

Proposição 3.3.1 *Seja uma parábola de foco F e diretriz d . Sejam B um ponto sobre a parábola e B' sua projeção ortogonal sobre d . A mediatriz do segmento FB' é tangente à parábola em B .*

Demonstração. Vamos provar por absurdo. Acompanhe pela Figura 3.13 Suponha que a mediatriz do segmento FB' a qual denotamos por t não é tangente à parábola em B . Neste caso, existe um ponto C sobre a reta t que também está sobre a parábola. Desde que a reta t é a mediatriz do segmento FB' , temos $\overline{FC} = \overline{B'C}$. Por outro lado, se o ponto C está sobre a parábola, temos, pela definição 3.2.1, que $\overline{FC} = \overline{CC'}$. Logo, $\overline{B'C} = \overline{CC'}$. Entretanto, note que o triângulo $B'C'C$ é retângulo em C' , onde a hipotenusa $B'C$ tem medida maior que a medida do cateto CC' . Ou seja, $\overline{B'C} > \overline{CC'}$. Esta contradição mostra que a mediatriz t toca a parábola num único ponto B e, portanto, é tangente à parábola neste ponto.

□

O exemplo a seguir envolve uma discussão interessante, a de se obter o foco e a reta diretriz de uma parábola conhecido o seu traçado.

Exemplo 3.3.1 *Obtenha, usando régua não graduada e compasso, o foco e a reta diretriz da parábola da Figura 3.14.*

Para a construção desses elementos, as proposições a seguir serão de grande utilidade.

Proposição 3.3.2 *A reta que passa pelos pontos médios de duas cordas paralelas de uma parábola é paralela ao eixo de simetria da parábola.*

Demonstração. Para provar este fato, usaremos alguns conhecimentos de Geometria Analítica. Primeiro, lembremos que a equação de uma parábola em relação a um sistema

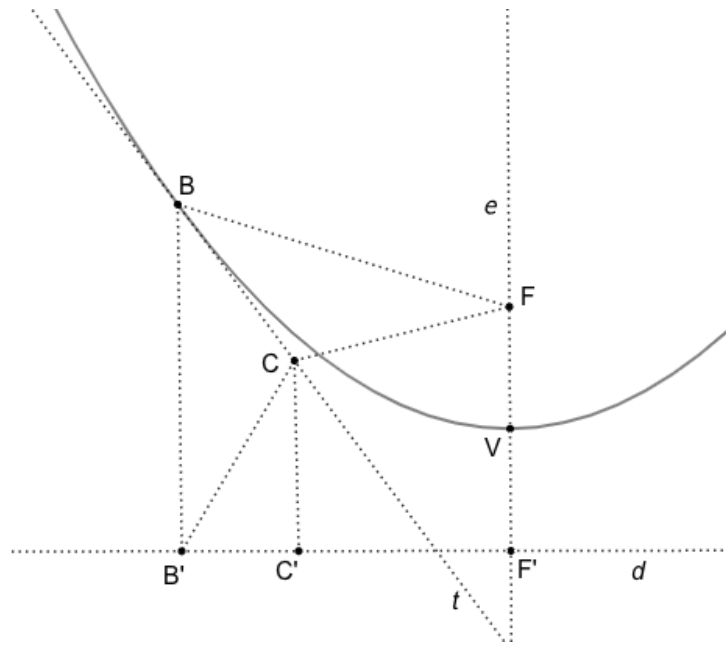


Figura 3.13: Reta tangente à parábola



Figura 3.14: Parábola

cartesiano de coordenadas xOy é $y = ax^2 + bx + c$ onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Neste sistema ortogonal, os eixos OX e OY são paralelos, respectivamente, à diretriz e ao eixo de simetria da parábola. Dito isto, considere duas cordas AB e CD da parábola, onde $A = (x_1, ax_1^2 + bx_1 + c)$, $B = (x_2, ax_2^2 + bx_2 + c)$, $C = (x_3, ax_3^2 + bx_3 + c)$ e $D = (x_4, ax_4^2 + bx_4 + c)$. Para que as cordas sejam paralelas, devemos ter

$$\frac{(ax_2^2 - bx_2 + c) - (ax_1^2 - bx_1 + c)}{x_2 - x_1} = \frac{(ax_4^2 - bx_4 + c) - (ax_3^2 - bx_3 + c)}{x_4 - x_3},$$

donde obtemos

$$a(x_2 + x_1) + b = a(x_3 + x_4) + b$$

e concluimos que $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$. Como as abcissas dos pontos médios das cordas AB e CD são dadas por $\frac{x_1 + x_2}{2}$ e $\frac{x_3 + x_4}{2}$, respectivamente, segue que M e N têm mesma abcissa, ou seja, estão sobre uma reta vertical e, portanto, estão sobre uma reta paralela ao eixo de simetria da parábola.

□

Corolário 3.3.1 *Os pontos médios de um número arbitrário de cordas paralelas são colineares.*

Construção 1. Na Figura 3.15 M é um ponto sobre a corda AB e s é a reta por M paralela ao eixo de simetria e . O é o ponto onde s intercepta a parábola e t é a reta por O tangente à parábola.

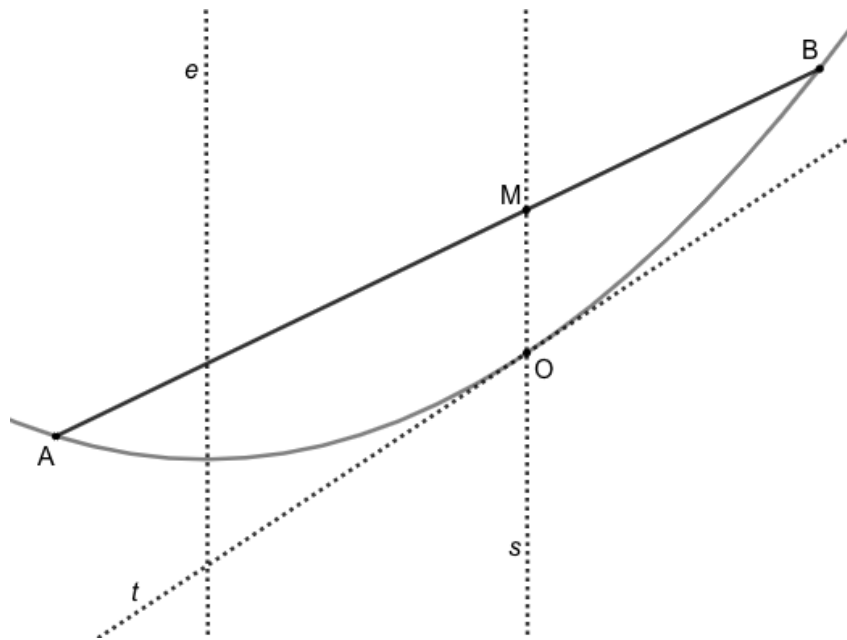


Figura 3.15: Construção 1

Proposição 3.3.3 *Considere a construção 1. A reta t é paralela a corda AB se, e somente se, $\overline{AM} = \overline{MB}$.*

Demonstração. Sabemos do Cálculo Diferencial que a inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto de abcissa x_0 é dado pelo valor da derivada da função em x_0 . Desde que uma parábola é o gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ e considerando a

corda pelos pontos $A = (x_1, ax_1^2 + bx_1 + c)$ e $B = (x_2, ax_2^2 + bx_2 + c)$ temos que a inclinação da corda é dada por

$$\frac{(ax_2^2 - bx_2 + c) - (ax_1^2 - bx_1 + c)}{x_2 - x_1} = a(x_1 + x_2) + b.$$

Como o eixo de simetria da parábola é paralelo ao eixo y , temos que a reta s por M e O é vertical. De onde concluímos que os pontos O e M tem mesma abcissa x_0 . A inclinação da reta tangente à parábola em O é dada por

$$f'(x_0) = 2ax_0 + b.$$

Portanto a corda AB é paralela a reta tangente por O se, e somente se,

$$a(x_1 + x_2) + b = 2ax_0 + b$$

o equivale a dizer que $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Basta agora notar que x_0 é exatamente a abcissa do ponto médio da corda AB .

Construção 2. Na figura 3.16 M é um ponto sobre a corda AB e P é o ponto de interseção entre as retas tangentes à parábola por A e por B . Por fim, t é a reta por M e P .

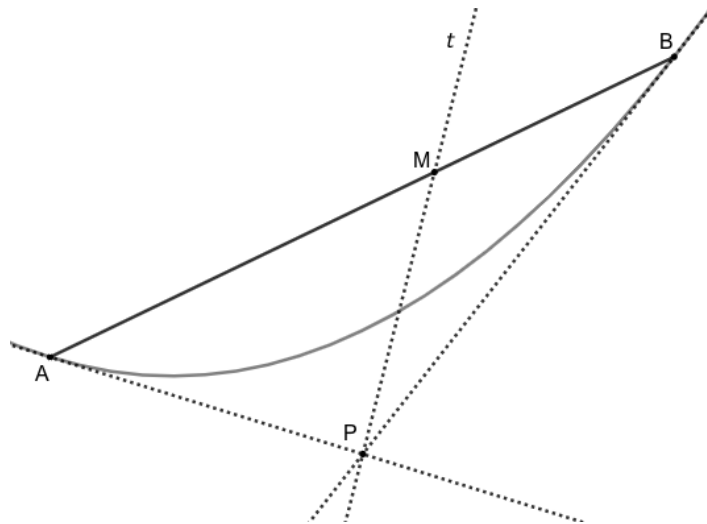


Figura 3.16: Construção 2

Proposição 3.3.4 *Considere a construção 2. A reta t é paralela ao eixo de simetria se, e somente se, $\overline{AM} = \overline{MB}$.*

Demonstração. Considere uma parábola de foco em F e reta diretriz d . Na Figura 3.17 os pontos A' e B' foram obtidos como interseções da diretriz com as retas r e s , paralelas

ao eixo de simetria por A e B , respectivamente. Sabemos, pela Proposição 3.3.1, que as retas tangentes à parábola em A e B são as mediatrizes dos lados FA' e FB' do triângulo $A'FB'$, respectivamente. Assim, o ponto P é o encontro das mediatrizes do triângulo $A'FB'$. Sejam P' e M os pontos onde uma reta por P , que denotamos por t , intercepta o lado $A'B'$ e a corda AB , respectivamente. Se t é paralela ao eixo de simetria, então t é a mediatriz do lado $A'B'$, ou seja, $\overline{A'P'} = \overline{P'B'}$ e, pelo Teorema 3.1.1, obtemos que

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{A'P'}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{P'B'}},$$

donde concluímos que $\overline{AM} = \overline{MB}$. □

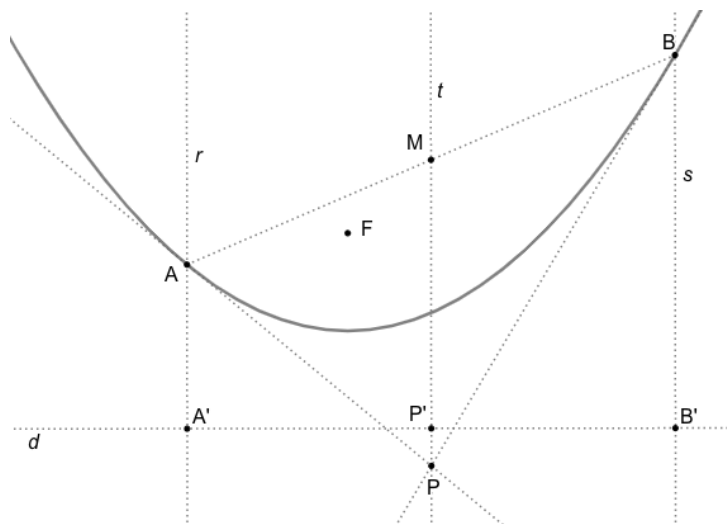


Figura 3.17: Triângulo ABP

Para a prova da recíproca, voltaremos a nos apoiar sobre conceitos do Cálculo Diferencial. Começemos por escrever as equações das retas tangentes à parábola pelos pontos $A = (x_1, ax_1^2 + bx_1 + c)$ e $B = (x_2, ax_2^2 + bx_2 + c)$. Estas retas tem inclinações $2ax_1 + b$ e $2ax_2 + b$, respectivamente, e suas equações são $y = (2ax_1 + b)x + c - ax_1^2$, $y = (2ax_2 + b)x + c - ax_2^2$. A interseção entre estas retas ocorre quando

$$(2ax_1 + b)x + c - ax_1^2 = (2ax_2 + b)x + c - ax_2^2,$$

ou seja, num ponto P de abscissa $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Portanto, se M é ponto médio da corda AB sua abscissa também é x_0 e concluímos que a reta por M e P é vertical e, portanto, paralela ao eixo de simetria. □

Construção 3. Na Figura 3.18 M é um ponto sobre a corda AB e P é o ponto de interseção entre as retas tangentes à parábola por A e por B . Por fim, O é o ponto de interseção entre a reta por M e P e a parábola e t é a reta tangente à parábola por O .

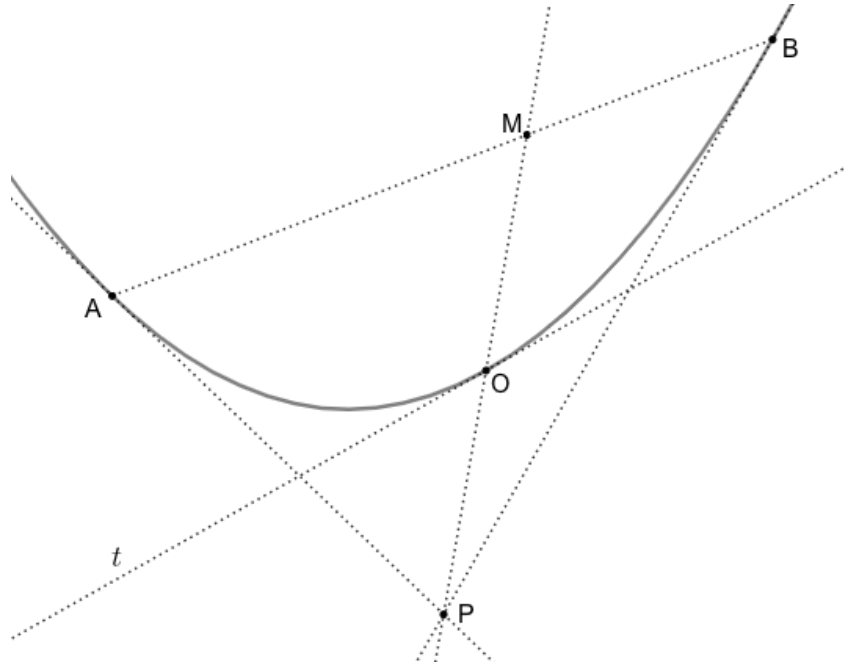


Figura 3.18: Construção 3

Proposição 3.3.5 *Considere a construção 3. A reta t é paralela à corda AB se, e somente se, $\overline{AM} = \overline{MB}$.*

Demonstração. Ver Figura 3.19. Considere $\overline{AM} = \overline{MB}$ e sejam C e D os pontos onde a reta t encontra as tangentes à parábola em A e B , respectivamente. Pela Proposição 3.3.4, a reta z por M e P é paralela ao eixo de simetria e as retas x e y , paralelas ao eixo de simetria pelos pontos C e D , interceptam os segmentos AO e OB em seus pontos médios Q e R , respectivamente. Pelo Teorema 3.1.1 temos

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{QO}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{PD}}{\overline{OR}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{RB}}$$

donde concluímos que os pontos C e D são pontos médios dos segmentos AP e PB , respectivamente. Agora, note que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DP}},$$

e vale a recíproca do Teorema 3.1.1, ou seja, t é paralela à corda AB . Ver Figura 3.19.

Assim, como na prova da Proposição 3.3.4, as equações das retas tangentes à parábola pelos pontos $A = (x_1, ax_1^2 + bx_1 + c)$ e $B = (x_2, ax_2^2 + bx_2 + c)$ se interceptam num

ponto P de abscissa $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Por outro lado se t é paralela à corda AB no ponto $O = (x_0, ax_0^2 + bx_0 + c)$ devemos ter a inclinação da corda igual à inclinação da reta t , isto é,

$$a(x_1 + x_2) + b = 2ax_0 + b$$

donde concluímos que $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Isso mostra que a reta por P e O é vertical e como M é um ponto desta reta deve também ter abscissa x_0 . Assim concluímos que M é o ponto médio da corda AB .

□

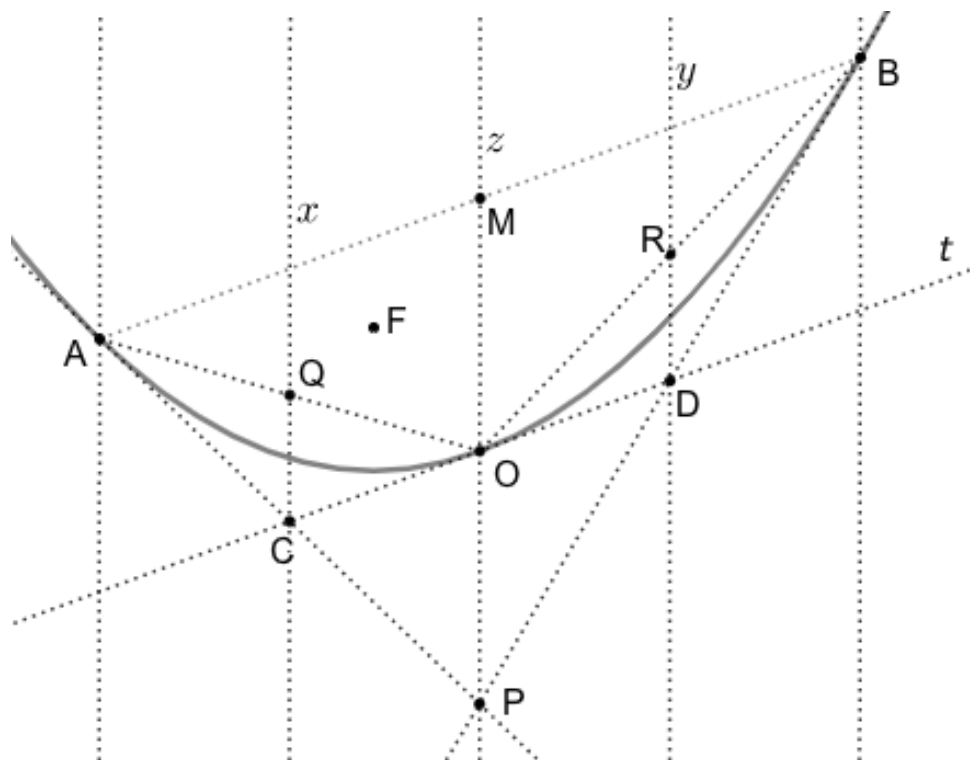


Figura 3.19: Triângulo ABP

Corolário 3.3.2 *Se M é o ponto da corda AB na construção 3, então O é o ponto médio do segmento MP .*

Demonstração. Desde que a reta t é paralela à corda AB e C é ponto médio de AP , segue do Teorema 3.1.1 que

$$\frac{\overline{MO}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{CP}},$$

donde concluímos que O é ponto médio do segmento MP .

□

Voltemos a analisar o Exemplo 3.3.1. Sobre a parábola da Figura 3.14 marque os pontos A, B e C . Trace por C uma reta paralela à corda AB e marque o ponto D ,

interseção desta reta com a parábola. Seja t a reta pelos pontos médios, M e N , das cordas AB e CD , respectivamente. Pela Proposição 3.3.2, a reta t é paralela ao eixo de simetria da parábola. Seja P o ponto de interseção da reta t com a parábola. Pela Proposição 3.3.3 a reta s , paralela as cordas por P , é tangente à parábola. Ver Figura 3.20.

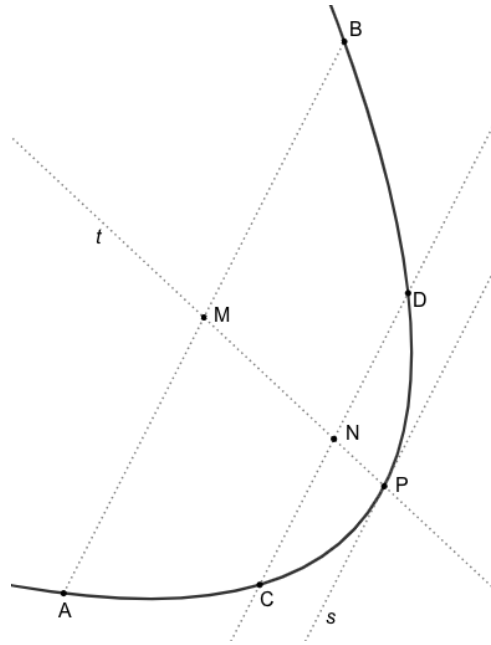


Figura 3.20: Construção do Foco e da reta diretriz

Agora, por um ponto R sobre a reta t trace a reta r , perpendicular t , que intercepta a parábola nos pontos L e O . Seja Q o ponto médio da corda OL , trace por Q a reta e paralela à reta t . Note que a reta e é na verdade o eixo de simetria da parábola. Ver Figura 3.21.

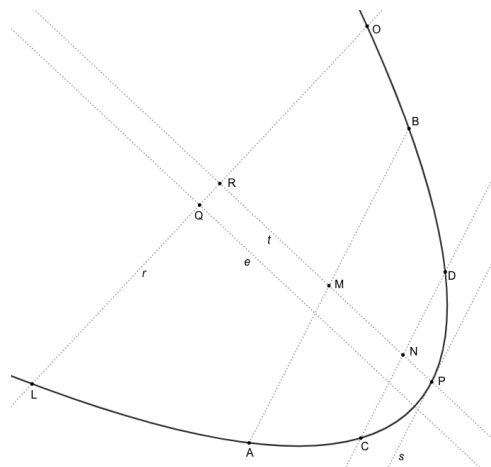


Figura 3.21: Construção do Foco e da reta diretriz

Por fim, com qualquer raio, trace uma circunferência centrada em P e sejam U e V os pontos de interseção desta circunferência com as retas t e s , respectivamente. Agora,

com raio \overline{VU} , trace uma circunferência centrada em V e marque o ponto T , interseção destas duas circunferências. Seja F o ponto de interseção da reta e com a reta \overleftrightarrow{TP} . Afirmamos que F é o foco da parábola. De fato, os ângulos VPF e VPU são congruentes e s é tangente à parábola em P . Desse modo a reta \overleftrightarrow{TP} é a reflexão da reta t e pela propriedade refletora da parábola² a mesma deve passar pelo foco. Por outro lado, o eixo de simetria também contém o foco. Ver Figura 3.22.

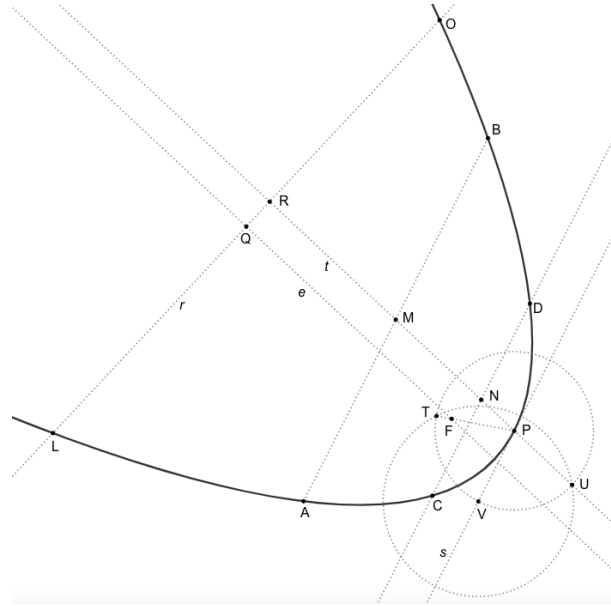


Figura 3.22: Construção dos Foco e reta diretriz

Para obtermos a reta diretriz d , centramos o compasso no ponto P com abertura \overline{PF} e marcamos o ponto Y sobre a reta t . A reta diretriz é a reta perpendicular à reta t por Y . Veja Figura 3.23.

3.4 Exaustão do segmento parabólico

Definição 3.4.1 *Dados os pontos A e B sobre uma parábola, chamamos de segmento parabólico a região limitada entre a corda AB e a parábola. Ver Figura 3.24*

Destacamos os seguintes elementos:

A corda AB é chamada de **base** do segmento parabólico.

Considerando os segmentos perpendiculares (à base) que unem a base à parábola, chamamos de **altura** do segmento parabólico o segmento de maior comprimento.

²Quando um feixe de retas incide paralelamente ao eixo de simetria e de uma parábola, estas são refletidas em direção ao foco.

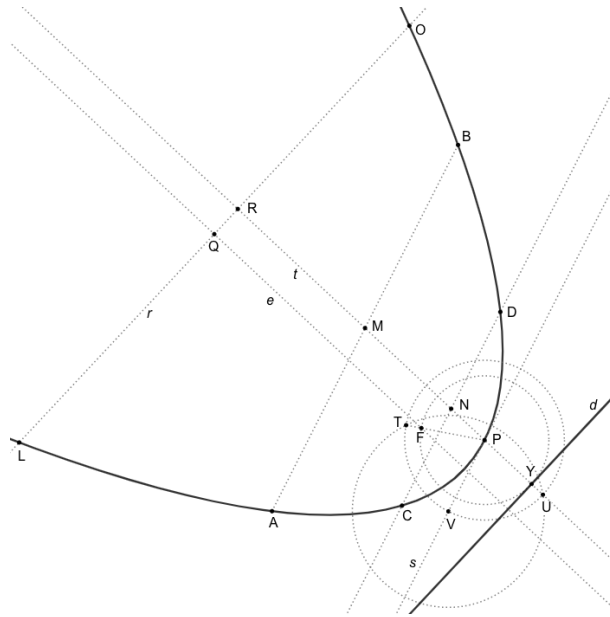


Figura 3.23: Construção dos Foco e reta diretriz

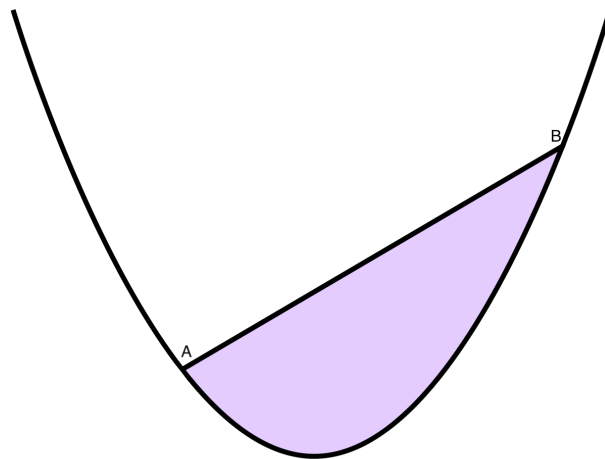


Figura 3.24: Segmento parabólico

O ponto O onde o segmento de maior comprimento encontra a parábola é chamado de **vértice** do segmento parabólico.

Arquimedes provou, usando o método da exaustão, que a área de um segmento parabólico é $\frac{4}{3}$ da área do maior triângulo que se pode construir tomando como base e altura deste triângulo a base e a altura do segmento parabólico. Chamaremos esse triângulo de triângulo máximo. Na Figura 3.25, temos o **triângulo máximo** AOB .

No que segue, faremos a prova minuciosa deste resultado. Observe que a área S_{AB} do segmento parabólico de base AB pode ser obtida como a soma das áreas do triângulo máximo AOB com a área dos segmentos parabólicos de bases AO e OB . Poderíamos então considerar os triângulos máximos dos segmentos parabólicos de bases AO e OB e repetir o processo. Para isso, convém organizarmos melhor esta construção a fim de

controlarmos a soma dos termos que representam as áreas.

Seja O' a projeção ortogonal sobre a corda AB de um ponto O pertencente ao arco AB da parábola. Para que a altura $h = \overline{O'O}$ seja máxima, o ponto O deve ocorrer num ponto onde a reta tangente à parábola é paralela à corda AB . De fato, seja f a função que a cada ponto da corda AB associa uma altura. Essa função atinge seu máximo num ponto da corda AB onde a reta tangente à parábola é horizontal, ou seja, paralela à corda AB . Ver Figura 3.25.

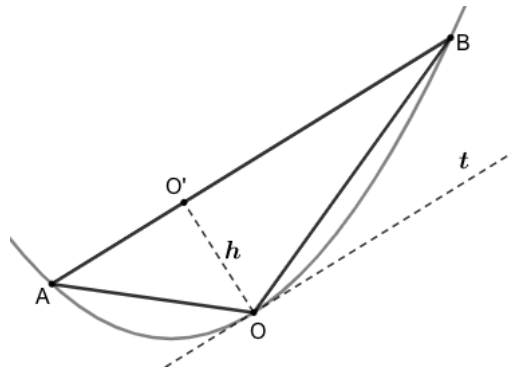


Figura 3.25: Triângulo Máximo

Considere a seguinte construção:

Construção 4. Na Figura 3.26, as retas r, s, x, y e z são paralelas ao eixo de simetria e as retas t, u e v são tangentes à parábola em O, A e B , respectivamente.

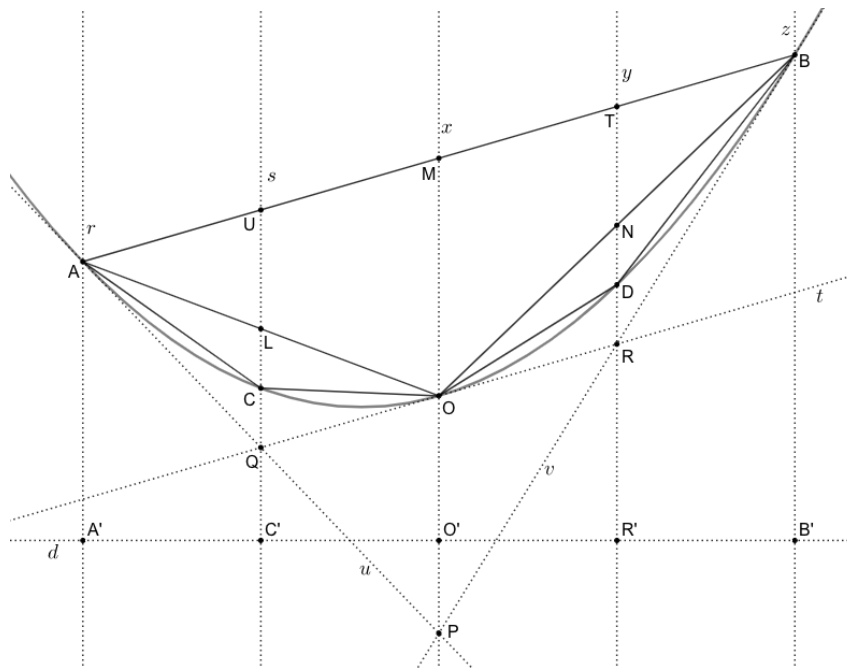


Figura 3.26: Construção 4

Pela Proposição 3.3.4 os pontos L, M e N são os pontos médios das cordas AO, AB e

OB , respectivamente e pela Proposição 3.3.5 a reta t é paralela à corda AB . Desde que as retas x e y são paralelas e $\overline{ON} = \overline{NB}$, obtemos $\overline{TN} = \frac{1}{2}\overline{MO}$. Como a reta t é paralela à corda AB , obtemos $\overline{TN} = \overline{NR}$. Segue do corolário 3.3.2 que D é ponto médio do segmento NR , donde concluímos que $\overline{NR} = 2\overline{ND}$. Combinando estes resultados, obtemos

$$\overline{MO} = 2\overline{TN} = 2\overline{NR} = 4\overline{ND}.$$

De forma análoga, obtemos que

$$\overline{MO} = 4\overline{LC}.$$

Decorre diretamente do Teorema 3.1.1 que $\overline{A'C'} = \overline{C'O'} = \overline{O'R'} = \overline{R'B'} = \ell$. Desde que $\overline{LC} = \overline{ND} = \frac{1}{4}\overline{MO}$ as áreas de cada um dos triângulos ALC , OLC , OND e BND de mesma altura ℓ e com bases de mesma medida são iguais e valem

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\overline{LC}\ell = \frac{1}{8}\overline{MO}\ell.$$

A área do triângulo máximo AOB é dada por

$$\mathcal{A}_1 = 2\frac{\overline{MO}(2\ell)}{2} = 2\overline{MO}\ell.$$

Sendo \mathcal{A}_2 a soma das área dos triângulos ACO e ODB concluímos que

$$\mathcal{A}_1 = 4\mathcal{A}_2.$$

Podemos continuar o processo considerando retas tangentes por C e D obtendo pontos de interseções com as retas t, u e v . Por esses pontos traçamos retas paralelas ao eixo de simetria que cortam a parábola em quatro pontos entre A e C , C e O , O e D e D e B . Os triângulos determinados têm áreas iguais, cuja soma \mathcal{A}_3 é um quarto da soma das áreas dos triângulos ACO e ODB , isto é, $\mathcal{A}_2 = 4\mathcal{A}_3$. Se repetirmos esse processo indefinidamente obteremos $\mathcal{A}_k = 4\mathcal{A}_{k+1}$. Se somarmos os valores obtidos teremos

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{A}_k = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \cdots = \mathcal{A}_1 + \frac{1}{4}\mathcal{A}_1 + \frac{1}{16}\mathcal{A}_1 + \cdots = \mathcal{A}_1 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4^{k-1}}. \quad (3.1)$$

Nos dias atuais é de conhecimento de todos que a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita de razão $q \in (0, 1)$ e primeiro termo a_1 é dada por $\frac{a_1}{1-q}$ resultado com o qual concluiríamos que a soma \mathcal{S} dos termos da progressão geométrica

$\mathcal{A}_1, \frac{1}{4}\mathcal{A}_1, \frac{1}{16}\mathcal{A}_1, \dots$, de razão $q = \frac{1}{4}$ e primeiro termo \mathcal{A}_1 é dada por

$$\mathcal{S} = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{A}_k = \frac{\mathcal{A}_1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\mathcal{A}_1.$$

No entanto, no tempo de Arquimedes, ele usou outro método para concluir que a exaustão da área do segmento parabólico por áreas de triângulos como descritos acima nos dava como resultado $\mathcal{S} = \frac{4}{3}\mathcal{A}_1$. Ele usou em sua prova um método chamado dupla redução ao absurdo. Antes de fazermos a prova de Arquimedes, lembremos de dois resultados importantes na teoria de números reais, o Princípio de Arquimedes e a Lei da Tricotomia.

Teorema 3.4.1 (Princípio de Arquimedes) *Sejam r e s números reais positivos com $r > s$. Existe um número natural n tal que $\frac{r}{n} < s$.*

Proposição 3.4.1 (Lei da Tricotomia) *Sejam x e y números reais. Apenas uma das seguintes alternativas ocorre: ou $x < y$ ou $x = y$ ou $x > y$.*

Teorema 3.4.2 *A área de um segmento parabólico é igual a quatro terços da área de seu triângulo máximo.*

Demonstração. Como $\mathcal{A}_n = \frac{\mathcal{A}_1}{4^{n-1}}$ temos para as somas parciais de \mathcal{S} que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n &= \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \dots + \mathcal{A}_n \\ &= \mathcal{A}_1 + \frac{1}{4}\mathcal{A}_1 + \frac{1}{16}\mathcal{A}_1 + \dots + \frac{1}{4^{n-1}}\mathcal{A}_1 \\ &= \mathcal{A}_1 \frac{1 - (\frac{1}{4})^n}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{4}{3}\mathcal{A}_1 - \frac{1}{3}\mathcal{A}_1 \frac{1}{4^{n-1}} \\ &= \frac{4}{3}\mathcal{A}_1 - \frac{1}{3}\mathcal{A}_n \end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{S}_n + \frac{1}{3}\mathcal{A}_n = \frac{4}{3}\mathcal{A}_1, \tag{3.2}$$

para todo natural n . Por outro lado

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{A}_k \\
&= \mathcal{S}_n + \mathcal{A}_{n+1} + \mathcal{A}_{n+2} + \dots \\
&= \mathcal{S}_n + \frac{1}{4^n} \mathcal{A}_1 + \frac{1}{4^{n+1}} \mathcal{A}_1 + \dots \\
&= \mathcal{S}_n + \frac{1}{4^n} \mathcal{A}_1 (1 + \frac{1}{4} + \dots) \\
&= \mathcal{S}_n + \frac{1}{4^n} \mathcal{S}
\end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{S} - \mathcal{S}_n = \frac{1}{4^n} \mathcal{S}, \quad (3.3)$$

para todo natural n . Suponha que $\mathcal{S} > \frac{4}{3} \mathcal{A}_1$ e considere os números reais positivos \mathcal{S} e $\mathcal{S} - \frac{4}{3} \mathcal{A}_1$. Pelo Teorema 3.4.1 existe um natural n tal que $\frac{1}{4^n} \mathcal{S} < \frac{\mathcal{S}}{n} < \mathcal{S} - \frac{4}{3} \mathcal{A}_1$. Da igualdade 3.3 obtemos que

$$\mathcal{S} - \mathcal{S}_n < \mathcal{S} - \frac{4}{3} \mathcal{A}_1$$

donde concluímos que $\mathcal{S}_n > \frac{4}{3} \mathcal{A}_1$ o que, pela igualdade 3.2, é um absurdo.

Suponha agora que $\mathcal{S} < \frac{4}{3} \mathcal{A}_1$ e considere os números reais positivos \mathcal{A}_1 e $\frac{4}{3} \mathcal{A}_1 - \mathcal{S}$. Pelo Teorema 3.4.1 existe um natural n tal que $\frac{1}{3} \left(\frac{\mathcal{A}_1}{4^{n-1}} \right) < \frac{\mathcal{A}_1}{n} < \frac{4}{3} \mathcal{A}_1 - \mathcal{S}$. Como $\mathcal{A}_n = \frac{\mathcal{A}_1}{4^{n-1}}$ obtemos a desigualdade

$$\frac{1}{3} \mathcal{A}_n < \frac{4}{3} \mathcal{A}_1 - \mathcal{S}.$$

Da igualdade 3.2 obtemos que

$$\frac{4}{3} \mathcal{A}_1 - \mathcal{S}_n < \frac{4}{3} \mathcal{A}_1 - \mathcal{S}$$

donde concluímos que $\mathcal{S}_n > \mathcal{S}$ o que, pela igualdade 3.3, é um absurdo. Com isso, podemos concluir pela Proposição 3.4.1 que $\mathcal{S} = \frac{4}{3} \mathcal{A}_1$. □

3.5 Proposta de atividade

Atividade 1. Considere a parábola dada pelo gráfico da função quadrática $f(x) = x^2 - 5x + 7$. Sejam os pontos $A = (1, 3)$ e $B = (5, 7)$ sobre a parábola. Fazendo uso do Teorema 3.4.2, determine a área do segmento parabólico de base AB . Ver Figura 3.27:

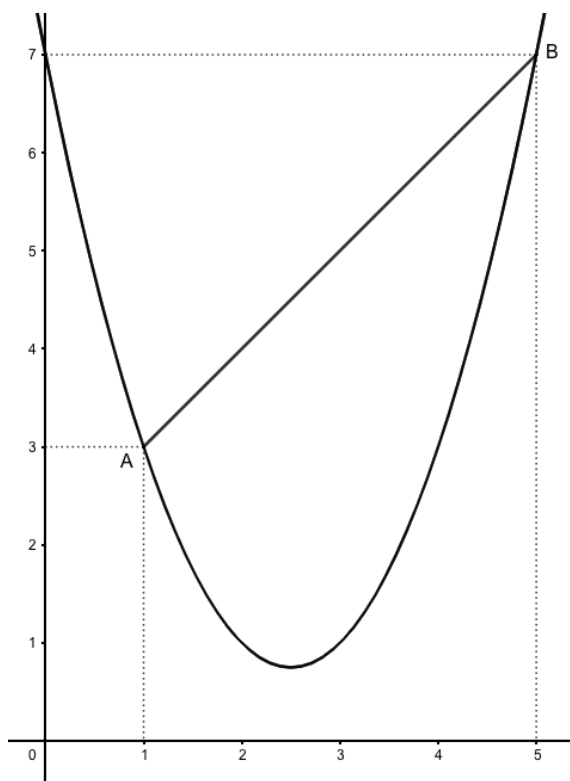


Figura 3.27: Área do segmento parabólico

Propomos o seguinte roteiro de solução para o problema:

Passo 1: Encontre o ponto O sobre a parábola de modo que o triângulo AOB seja máximo. Segue da proposição 3.3.3 que a abscissa do ponto $O = (x_0, y_0)$ é dada pela média das abscissas dos pontos A e B . Sendo assim, temos

$$x_0 = \frac{1 + 5}{2} = 3 \text{ e } y_0 = f(x_0) = 1.$$

Passo 2: Encontre a área do triângulo AOB . Uma maneira de fazer isso é usando a fórmula do determinante. A saber, se um triângulo tem vértices $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$

e $C = (x_3, y_3)$ sua área é dada por $\mathcal{T} = \frac{1}{2}|D|$, onde D é o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}.$$

No nosso caso, temos

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -16$$

donde $\mathcal{T} = \frac{1}{2}|-16| = 8$.

Passo 3: Agora, segue do Teorema 3.4.2 que a área do segmento parabólico de base na corda AB é

$$\mathcal{A} = \frac{4}{3}\mathcal{T} = \frac{32}{3}.$$

Mais geralmente, quando consideramos uma parábola dada pelo gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ e dois pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ sobre a mesma, obtemos uma fórmula para o cálculo da área do segmento parabólico de base em AB dependendo apenas do coeficiente a da função quadrática e das abscissas dos referidos pontos. Temos a seguinte proposição:

Proposição 3.5.1 *A área do segmento parabólico de base nos pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ sobre o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é dada por*

$$\mathcal{A} = \frac{1}{6}|a(x_2 - x_1)^3|. \quad (3.4)$$

Demonstração. Primeiramente obtemos o vértice O sobre a parábola de modo que o triângulo AOB seja máximo. Sabemos que as coordenadas de O são dadas por $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ e $y_0 = f(x_0)$. Conforme o que foi feito na Atividade 1, temos que

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{vmatrix} = x_1(y_2 - y_0) - x_2(y_1 - y_0) + x_0(y_1 - y_2) \\ &= x_1(x_2 - x_0)(a(x_2 + x_0) + b) + x_2(x_0 - x_1)(a(x_0 + x_1) + b) + \\ &\quad + x_0(x_1 - x_2)(a(x_1 + x_2) + b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x_1 \left(\frac{x_2 - x_1}{2} \right) \left[a \left(\frac{x_1 + 3x_2}{2} \right) + b \right] + x_2 \left(\frac{x_2 - x_1}{2} \right) \left[a \left(\frac{3x_1 + x_2}{2} \right) + b \right] \\
&\quad + \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) (x_1 - x_2) [a(x_1 + x_2) + b] \\
&= \left(\frac{x_2 - x_1}{2} \right) \left[\frac{a}{2} (x_1^2 + 3x_1x_2 + 3x_1x_2 + x_2^2 - 2(x_1 + x_2)^2) \right] \\
&\quad + \left(\frac{x_2 - x_1}{2} \right) [bx_1 + bx_2 - bx_1 - bx_2] \\
&= \frac{a}{4} (x_2 - x_1) (-x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2) \\
&= -\frac{a}{4} (x_2 - x_1)^3.
\end{aligned}$$

Deste modo, a área do triângulo máximo AOB é

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}|D| = \frac{1}{8}|a(x_2 - x_1)^3|$$

e segue do Teorema 3.4.2 que a área do segmento parabólico é dada por

$$\mathcal{A} = \frac{1}{6}|a(x_2 - x_1)^3|.$$

□

Observação 3.5.1 Temos na Atividade 1 que $a = 1$, $x_1 = 1$ e $x_2 = 5$ onde, de posse da fórmula 3.4, temos que a área é dada por

$$\mathcal{A} = \frac{1}{6}|1(5 - 1)^3| = \frac{64}{6} = \frac{32}{3}.$$

Capítulo 4

Área de regiões limitadas por gráficos de funções

Neste capítulo abordaremos algumas ideias de como se obter a área de algumas regiões envolvidas pelos gráficos de algumas funções conhecidas pelos alunos do ensino médio. Na Seção 4.1 abordaremos a ideia de Fermat como método para o cálculo da área da região limitada acima pelo gráfico da função $f(x) = x^n$ no intervalo $[0, a]$, abaixo pelo intervalo $[0, a]$ e lateralmente pelas retas verticais $x = 0$ e $x = a$. Toda a argumentação será, na medida do possível, feita de modo a aproveitar e aplicar ao máximo os conteúdos desenvolvidos pelos alunos no ensino médio.

4.1 A ideia de Fermat

Considere a e r números reais tais que $a > 0$ e $0 < r < 1$ e considere os k termos da progressão geométrica finita de razão r ,

$$b_1 = a, b_2 = ar, \dots, b_i = ar^{i-1}, \dots, b_{k-1} = ar^{k-2}, b_k = ar^{k-1}.$$

Sendo \mathcal{R} a região limitada acima pelo gráfico da função $f(x) = x^n$ no intervalo $[0, a]$, abaixo pelo intervalo $[0, a]$ e lateralmente pelas retas verticais $x = 0$ e $x = a$, a ideia de Fermat consiste em aproximar a área da região \mathcal{R} pela soma das áreas de retângulos, de duas formas. A primeira delas, que chamaremos aproximação por excesso, considera retângulos \mathcal{R}_i^+ com bases nos intervalos $[b_{i+1}, b_i]$ e alturas $f(b_i)$, $1 \leq i \leq k$, onde $b_{k+1} = 0$.

As áreas dos retângulos \mathcal{R}_i^+ , que denotaremos por \mathcal{A}_i^+ , são dadas por

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_i^+ &= (b_i - b_{i+1})f(b_i) \\ &= (ar^{i-1} - ar^i)a^n r^{n(i-1)} \\ &= a^{n+1}r^{(i-1)(n+1)}(1 - r).\end{aligned}$$

A soma das áreas dos k retângulos \mathcal{R}_i^+ , que denotaremos por \mathcal{A}^+ , é dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^+ &= \sum_{i=1}^k \mathcal{A}_i^+ \\ &= \sum_{i=1}^k a^{n+1}r^{(i-1)(n+1)}(1 - r) \\ &= a^{n+1}(1 - r)(1 + r^{n+1} + r^{2(n+1)} + \dots + r^{(k-2)(n+1)} + r^{(k-1)(n+1)})\end{aligned}$$

Observe que a área \mathcal{A}^+ é representada por uma progressão geométrica finita (com k termos) de razão $q = r^{n+1}$ e primeiro termo $a_1 = a^{n+1}(1 - r)$. Usando a fórmula da soma dos k termos de uma progressão geométrica finita, obtemos

$$\mathcal{A}^+ = a^{n+1}(1 - r)\frac{1 - r^{k(n+1)}}{1 - r^{n+1}}.$$

Neste momento, duas intervenções poderiam ser feitas. A primeira delas é considerar uma progressão geométrica infinita de razão r

$$b_1 = a, b_2 = ar, \dots, b_i = ar^{i-1}, \dots$$

Desde que a fórmula da soma S dos infinitos termos de uma progressão geométrica infinita de razão $0 < q < 1$ e primeiro termo a_1 é dada por $S = \frac{a_1}{1 - q}$, temos que a soma das áreas dos infinitos retângulos de áreas \mathcal{A}_i^+ é dada por

$$\mathcal{A}^+ = \frac{a^{n+1}(1 - r)}{1 - r^{n+1}}. \quad (4.1)$$

A segunda delas é considerar as bases $[b_{i+1}, b_i]$ dos retângulos \mathcal{R}_i^+ com comprimentos tão pequenos quanto quisermos. Podemos conseguir isso ajustando a razão da progressão. De fato, se a razão for um número real bem próximo de 1 teremos que os comprimentos das bases, dados por $b_i - b_{i+1} = ar^{i-1} - ar^i = ar^{i-1}(1 - r)$, serão bem próximos de zero e isso acarreta numa diminuição da área excedente na aproximação por excesso da região

\mathcal{R} . Observe também que

$$\frac{1-r}{1-r^{n+1}} = \frac{1}{1+r+r^2+\dots+r^n}$$

e como $0 < r < 1$ temos $r^k < 1$ para todo inteiro k donde obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^+ &= \frac{a^{n+1}}{1+r+r^2+\dots+r^n} \\ &\geq \frac{a^{n+1}}{1+1+\dots+1} \\ &= \frac{a^{n+1}}{n+1} \end{aligned} \tag{4.2}$$

A segunda forma de aproximar a área da região \mathcal{R} pela soma das áreas de retângulos, que chamaremos aproximação por falta, considera retângulos \mathcal{R}_i^- com bases nos intervalos $[b_{i+1}, b_i]$ e alturas $f(b_{i+1})$, $1 \leq i \leq k$, onde $b_{k+1} = 0$. A área dos retângulos \mathcal{R}_i^- , que denotaremos por \mathcal{A}_i^- , são dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_i^- &= (b_i - b_{i+1})f(b_{i+1}) \\ &= (ar^{i-1} - ar^i)a^n r^{ni} \\ &= a^{n+1}r^{i-1+ni}(1-r). \end{aligned}$$

Analogamente, a soma das áreas dos infinitos retângulos de áreas \mathcal{A}_i^- é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^- &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathcal{A}_i^- \\ &= a^{n+1}(1-r)(r^n + r^{2n+1} + r^{3n+2} + \dots) \\ &= a^{n+1}(1-r) \frac{r^n}{1-r^{n+1}} \\ &= a^{n+1} \frac{r^n}{1+r+r^2+\dots+r^n} \end{aligned}$$

e como $0 < r < 1$ temos $r^n < r^q$ quando $n > q$. Disso segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^- &= a^{n+1} \frac{r^n}{1+r+r^2+\dots+r^n} \\ &\leq a^{n+1} \frac{r^n}{r^n + \dots + r^n} \\ &= \frac{a^{n+1}}{n+1}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Das desigualdades 4.2 e 4.3 concluímos que

$$\mathcal{A}^- \leq \frac{a^{n+1}}{n+1} \leq \mathcal{A}^+$$

vale para qualquer valor de razão $0 < r < 1$ mas não vale para $r = 1$ pois, nesse caso, a progressão geométrica seria constante e não faria sentido falar na soma de seus infinitos termos, esse número seria infinito.

Da mesma forma que para valores da razão bem próximo de 1 obtemos uma melhor aproximação por excesso isso também acarreta numa melhor aproximação por falta o que nos leva a crer que a área \mathcal{A} da região \mathcal{R} , que por construção satisfaz $\mathcal{A}^- \leq \mathcal{A} \leq \mathcal{A}^+$, deve ser

$$\mathcal{A} = \frac{a^{n+1}}{n+1}. \tag{4.4}$$

A prova desse fato utiliza o conceito de limite. Na verdade, podemos mostrar que \mathcal{A}^- e \mathcal{A}^+ tendem para $\frac{a^{n+1}}{n+1}$ quando r tende para 1.

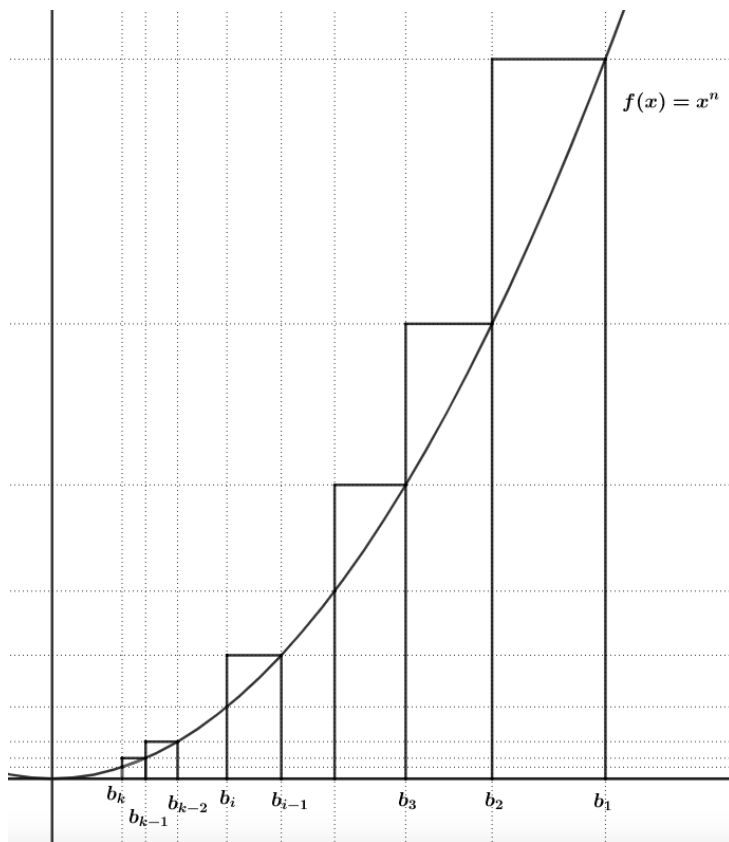


Figura 4.1: Ideia de Fermat

Na próxima seção mostraremos como nos utilizar da ideia de Fermat para conseguir a área de uma região \mathcal{R} onde a função $f(x) = x^n$ é tal que o expoente n é racional.

4.2 Área abaixo do gráfico da função $f(x) = x^{1/2}$

Para encontrar a área da região \mathcal{R} limitada acima pelo gráfico da função $f(x) = x^{1/2}$ no intervalo $[0, a]$, abaixo pelo intervalo $[0, a]$ e lateralmente pelas retas verticais $x = 0$ e $x = a$ devemos obter uma progressão geométrica infinita cujos termos servirão de base para a construção dos retângulos \mathcal{R}_i^+ e \mathcal{R}_i^- . Uma escolha adequada seria uma progressão cujos termos fossem quadrados.

Para $0 < r < 1$ considere os termos da progressão geométrica infinita de razão r^2 ,

$$b_1 = a, b_2 = ar^2, \dots, b_i = ar^{2(i-1)}, \dots$$

As áreas \mathcal{A}_i^- e \mathcal{A}_i^+ dos retângulos \mathcal{R}_i^- e \mathcal{R}_i^+ são dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_i^+ &= (b_i - b_{i+1})f(b_{i+1}) \\ &= (ar^{2(i-1)} - ar^{2i})\sqrt{ar^i} \\ &= a\sqrt{ar^{3i-2}}(1 - r^2). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_i^- &= (b_i - b_{i+1})f(b_i) \\ &= (ar^{2(i-1)} - ar^{2i})\sqrt{ar^{i-1}} \\ &= a\sqrt{ar^{3(i-1)}}(1 - r^2). \end{aligned}$$

A soma das áreas dos infinitos retângulos de áreas \mathcal{A}_i^- é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^- &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathcal{A}_i^- \\ &= a\sqrt{a}(1 - r^2)(r + r^4 + r^7 + \dots) \\ &= a\sqrt{a}(1 - r^2)\frac{r}{1 - r^3} \\ &= a\sqrt{a}\frac{r(1 - r)(1 + r)}{(1 - r)(1 + r + r^2)} \\ &= a\sqrt{a}\frac{r(1 + r)}{1 + r + r^2} \end{aligned}$$

e a soma das áreas dos infinitos retângulos de áreas \mathcal{A}_i^+ é dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^+ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathcal{A}_i^+ \\
&= a\sqrt{a}(1-r^2)(1+r^3+r^6+\dots) \\
&= a\sqrt{a}(1-r^2)\frac{1}{1-r^3} \\
&= a\sqrt{a}\frac{(1-r)(1+r)}{(1-r)(1+r+r^2)} \\
&= a\sqrt{a}\frac{1+r}{1+r+r^2}
\end{aligned}$$

Como $0 < r < 1$ temos $r^2 < r < 1$. Assim, $3r^2 \leq 1+r+r^2 \leq 3$ donde obtemos

$$\frac{1}{1+r+r^2} \geq \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad \frac{r^2}{1+r+r^2} \leq \frac{1}{3}.$$

Disto segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^- &= a\sqrt{a}\frac{r+r^2}{1+r+r^2} \\
&= a\sqrt{a}\frac{1+r+r^2-1}{1+r+r^2} \\
&= a\sqrt{a}\left(1 - \frac{1}{1+r+r^2}\right) \\
&\leq a\sqrt{a}\left(1 - \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{2a\sqrt{a}}{3}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^+ &= a\sqrt{a}\frac{1+r}{1+r+r^2} \\
&= a\sqrt{a}\frac{1+r+r^2-r^2}{1+r+r^2} \\
&= a\sqrt{a}\left(1 - \frac{r^2}{1+r+r^2}\right) \\
&\geq a\sqrt{a}\left(1 - \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{2a\sqrt{a}}{3}.
\end{aligned}$$

Combinando estas duas desigualdades obtemos que a desigualdade

$$\mathcal{A}^- \leq \frac{2a\sqrt{a}}{3} \leq \mathcal{A}^+ \tag{4.5}$$

vale para qualquer valor de razão $0 < r < 1$.

Com o mesmo argumento usado na seção anterior, quando o valor da razão se aproxima de 1 as áreas \mathcal{A}^+ diminuem e as áreas \mathcal{A}^- aumentam. Como antes, isso nos leva a crer que a área \mathcal{A} da região \mathcal{R} , que por construção satisfaz $\mathcal{A}^- \leq \mathcal{A} \leq \mathcal{A}^+$, deve ser

$$\mathcal{A} = \frac{2a\sqrt{a}}{3}. \quad (4.6)$$

Uma justificativa para a igualdade 4.6 será dada por uma redução ao duplo absurdo, vamos supor que $\mathcal{A} < \frac{2a\sqrt{a}}{3}$ e depois que $\mathcal{A} > \frac{2a\sqrt{a}}{3}$ chegando a uma contradição em ambos os casos donde concluiremos que vale 4.6. Tal justificativa será baseada no Lema a seguir:

Lema 4.2.1 *Para qualquer $\epsilon \in \mathbb{R}$ positivo, pequeno quanto quisermos, existe um valor de razão $r \in (0, 1)$ tal que $\mathcal{A}^+ - \mathcal{A} < \epsilon$ e $\mathcal{A} - \mathcal{A}^- < \epsilon$.*

Demonstração. Para qualquer $\epsilon > 0$ o número $r = \frac{a\sqrt{a}}{\epsilon + a\sqrt{a}}$ pertence ao intervalo $(0, 1)$. Desde que

$$\mathcal{A}^- = a\sqrt{a}\left(1 - \frac{1}{1+r+r^2}\right) \quad \text{e} \quad \mathcal{A}^+ = a\sqrt{a}\left(1 - \frac{r^2}{1+r+r^2}\right)$$

obtemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^+ - \mathcal{A}^- &= a\sqrt{a} \frac{1-r^2}{1+r+r^2} \\ &= a\sqrt{a} \frac{1 - \frac{a^3}{(\epsilon+a\sqrt{a})^2}}{1 + \frac{a\sqrt{a}}{(\epsilon+a\sqrt{a})} + \frac{a^3}{(\epsilon+a\sqrt{a})^2}} \\ &= a\sqrt{a} \left(\frac{\epsilon^2 + 2\epsilon a\sqrt{a} + a^3 - a^3}{\epsilon^2 + 2\epsilon a\sqrt{a} + a^3 + \epsilon a\sqrt{a} + a^3 + a^3} \right) \\ &= \epsilon \left(\frac{\epsilon a\sqrt{a} + 2a^3}{\epsilon^2 + 3\epsilon a\sqrt{a} + 3a^3} \right) \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Isso mostra que existe $r \in (0, 1)$ tal que a soma dos números não negativos $\mathcal{A}^+ - \mathcal{A}$ e $\mathcal{A} - \mathcal{A}^-$ é menor que ϵ donde concluímos que $\mathcal{A}^+ - \mathcal{A} < \epsilon$ e $\mathcal{A} - \mathcal{A}^- < \epsilon$.

□

Voltemos à prova da igualdade 4.6. Se $\mathcal{A} < \frac{2a\sqrt{a}}{3}$ vale para qualquer valor de razão

$0 < r < 1$ temos que para $\epsilon = \mathcal{A} - \frac{2a\sqrt{a}}{3}$ existe r tal que

$$\mathcal{A} - \mathcal{A}^- < \mathcal{A} - \frac{2a\sqrt{a}}{3}$$

donde obteríamos que $\mathcal{A}^- > \frac{2a\sqrt{a}}{3}$, o que pela desigualdade 4.5 é uma contradição.

Analogamente, se $\mathcal{A} > \frac{2a\sqrt{a}}{3}$ vale para qualquer valor de razão $0 < r < 1$ temos que para $\epsilon = \frac{2a\sqrt{a}}{3} - \mathcal{A}$ existe r tal que

$$\mathcal{A}^+ - \mathcal{A} < \frac{2a\sqrt{a}}{3} - \mathcal{A}$$

donde obteríamos que $\mathcal{A}^+ < \frac{2a\sqrt{a}}{3}$, o que pela desigualdade 4.5 também é uma contradição. Portanto, deve valer 4.6.

4.3 Proposta de atividade

Finalizamos essa dissertação com uma proposta para o cálculo de áreas no ensino médio.

Primeiramente, para estender as ideias do capítulo anterior para funções reais com expoente racional $x = p/q$ e encontrar a área \mathcal{A} da região \mathcal{R} limitada acima pelo gráfico da função $f(x) = x^{p/q}$ no intervalo $[0, a]$, abaixo pelo intervalo $[0, a]$ e lateralmente pelas retas verticais $x = 0$ e $x = a$, consideramos os termos da progressão geométrica infinita com razão r^q ,

$$b_1 = a, b_2 = ar^q, \dots, b_i = ar^{q(i-1)}, \dots$$

Seguindo os mesmos passos feitos no capítulo 4, obtemos que a área da região \mathcal{R} vale

$$\mathcal{A} = q \frac{a^{\frac{p+q}{q}}}{p+q}. \quad (4.7)$$

Tente deduzir essa fórmula.

Atividade 1. Seja \mathcal{A} a área da região \mathcal{R} limitada acima pelo gráfico da função $f(x) = x^3$ no intervalo $[0, 2]$, abaixo pelo intervalo $[0, 2]$ e lateralmente pelas retas verticais $x = 0$ e $x = 2$.

Explique através do conhecimento adquirido neste capítulo e de suas percepções que:

Questão 1. A área da região \mathcal{R} descrita na atividade 1 é $\mathcal{A} = 4$.

Questão 2. Se tomarmos no lugar de $f(x)$, na atividade 1, a função $g(x) = 5f(x)$, a área da região \mathcal{R} será $\mathcal{A} = 20$.

Questão 3. Se tomarmos no lugar do intervalo $[0, 2]$ e da reta vertical $x = 0$, na atividade 1, o intervalo $[1, 2]$ e a reta vertical $x = 1$, a área da região \mathcal{R} será $\mathcal{A} = 15/4$.

Atividade 2. Seja \mathcal{A} a área da região \mathcal{R} limitada acima pelo gráfico da função $f(x) = 4x^2 + 5x^{3/2}$ no intervalo $[1, 4]$, abaixo pelo intervalo $[1, 4]$ e lateralmente pelas retas verticais $x = 1$ e $x = 4$. Explique como podemos usar o conhecimento do capítulo 4 para mostrar que o valor da área é $\mathcal{A} = 146$.

Conclusão

Apesar de não termos aplicado estes resultados numa sequência didática, acreditamos que trazer a História da Matemática para o desenvolvimento das aulas, estimulando os estudantes a usar os conhecimentos prévios e associá-los aos que trazem esta história, facilita o entendimento dos conteúdos ao passo que desenvolve a abstração nos discentes. Conhecer como os matemáticos de outrora pensavam, calculavam, enfim, discutiam a Matemática traz uma visão importante desta ciência. Não podemos simplesmente criticar o ensino de fórmulas, haja vista elas serem bastante importantes para facilitar cálculos e reduzir tempo e esforços. Contudo, o(a) professor(a) deve mostrar aos seus aprendizes de onde vêm tais fórmulas e como interpretá-las, não se dedicando apenas para “decorá-las”.

Este trabalho pode ser aplicado em todas as séries do Ensino Médio, em especial o terceiro ano. No primeiro ano do Ensino Médio, ao trabalhar função quadrática, o(a) professor(a) pode aprofundar na discussão e mostrar como se calcula a área do segmento parabólico, tomando-se dois pontos quaisquer da parábola. Os alunos desta série poderão usar o Teorema de Pitágoras para encontrar as medidas dos lados do triângulo máximo e depois usar a Fórmula de Heron para determinar a área deste triângulo. Em seguida, usar o Teorema de Arquimedes, descrito aqui neste trabalho, e determinar a área do segmento parabólico. Alguns outros conteúdos, relacionados à Álgebra, serão também retrabalhados, potencializando o conhecimento prévio dos estudantes e servindo de revisão para os que tenham alguma dificuldade. Os alunos do segundo ano vêm cálculo de áreas de figuras planas na ementa da série, o que se encaixa perfeitamente com este trabalho. Já os estudantes do terceiro ano têm no programa da série Geometria Analítica. Estudam a reta, circunferência, cônicas, etc. Aprendem a calcular a área do triângulo tendo as coordenadas dos seus vértices, o que facilita bastante a aplicação deste trabalho. Outro ponto importante desta dissertação é o ensino das construções geométricas. Estas construções ampliam a abstração dos estudantes ao mesmo tempo que trazem um novo olhar sobre a relação da Geometria e a Álgebra.

Referências Bibliográficas

- [1] Carl Benjamim Boyer, *História da matemática*, 2a ed. Trad. Elza F. Gomide, São Paulo: Edgar Blücher, 1996.
- [2] Howard Eves, *Introdução à história da matemática*, tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.
- [3] Antonio Caminha Muniz Neto, *Geometria*, Coleção PROFMAT, SBM, 2013.
- [4] Ana Paula Rezende Calado da Silva, *Cálculo de áreas no ensino médio*, 2017.
- [5] Site SóMatemática, *Eudoxo de cnido*.
- [6] Grazielly dos Santos de Souza. Kelly Cristina Correia Pfahl, *O cálculo de áreas e o problema da quadratura: Uma proposta pedagógica com história da matemática*, (2017), 2.
- [7] Wikipedia, *Euclides*.