



Pós-Graduação em **Astronomia**
MESTRADO PROFISSIONAL
UEFS



MARCUS LUIZ LIMA AMORIM

**OFICINA PARA O ENTENDIMENTO DE FUNÇÕES MATEMÁTICAS
POR INTERMÉDIO DA ASTRONOMIA: APLICAÇÕES NO ENSINO
MÉDIO**

**Feira de Santana
2020**

MARCUS LUIZ LIMA AMORIM

**OFICINA PARA O ENTENDIMENTO DE FUNÇÕES
MATEMÁTICAS POR INTERMÉDIO DA ASTRONOMIA: APLICAÇÕES
NO ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Astronomia, Departamento de Física, Universidade Estadual de Feira de Santana, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Astronomia.

Orientador: Prof. Dr. Marildo Geraldete Pereira

**Feira de Santana
2020**



ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE Mestrado

CANDIDATO (A): MARCUS LUIZ LIMA AMORIM

DATA DA DEFESA: 13 de agosto de 2020 LOCAL: Via Google Meet

HORÁRIO DE INÍCIO: 16h

MEMBROS DA BANCA		FUNÇÃO	TÍTULO	INSTITUIÇÃO DE ORIGEM
NOME COMPLETO	CPF			
MARILDO GERALDÉTE PEREIRA	793.153.647-91	Presidente	DR	DFIS - UEFS
NAZARENO GETTER FERREIRA DE MEDEIROS	297.343.393-20	Membro	DR	DFIS - UEFS
SELMA ROZANE VIEIRA	343.754.734-87	Membro	DR	IFBA

TÍTULO DEFINITIVO DA DISSERTAÇÃO*:
OFICINA PARA O ENTENDIMENTO DE FUNÇÕES MATEMÁTICAS POR INTERMÉDIO DA ASTRONOMIA: APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO.

*Anexo: produto(s) educacional(is) gerado(s) neste trabalho.

Em sessão pública, após exposição de 48 min, o(a) candidato(a) foi argüido(a) oralmente pelos membros da banca, durante o período de 1h20min. A banca chegou ao seguinte resultado**:

- (X) APROVADO(A)
() INSUFICIENTE
() REPROVADO(A)

** Recomendações¹: Efetuar as recomendações sugeridas pela banca avaliadora.

Na forma regulamentar, foi lavrada a presente ata, que é abaixo assinada pelos membros da banca, na ordem acima relacionada, pelo candidato e pelo coordenador do Programa de Pós-Graduação em Astronomia da Universidade Estadual de Feira de Santana.

Feira de Santana, 13 de Agosto de 2020

Presidente: [Assinatura]
Membro 1: Carlos Alberto de Almeida Ramos
Membro 2: Carlos Alberto de Almeida Ramos
Membro 3: _____
Candidato (a): Marcus Luiz Lima Amorim
Coordenador do
PGAstro: Carlos Alberto de Almeida Ramos

¹ O aluno deverá encaminhar à Coordenação do PGAstro, no prazo máximo de 60 dias a contar da data da defesa, os exemplares definitivos da Dissertação, após realizadas as correções sugeridas pela banca.



**ANEXO DA ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO:
PRODUTO(S) EDUCACIONAL(IS) GERADO(S) NO TRABALHO FINAL DE CURSO**

CANDIDATO (A): MARCUS LUIZ LIMA AMORIM

DATA DA DEFESA: 13 de agosto de 2020 **LOCAL:** Via Google Meet

HORÁRIO DE INÍCIO: 16h

**ROTEIRO - OFICINA PARA O ENTENDIMENTO DE FUNÇÕES MATEMÁTICAS POR
INTERMÉDIO DA ASTRONOMIA: APLICAÇÃO NO ENSINO MÉDIO**

Feira de Santana, 13 de Agosto de 2020.

Presidente: J. H. G. P.
Membro 1: P. Carlos Alberto de Lima Ribeiro
Membro 2: P. Carlos Alberto de Lima Ribeiro
Membro 3: _____
Candidato (a): Marcus Luiz Lima Amorim
Coordenador do
PGAstro: Carlos Alberto de Lima Ribeiro

Ficha catalográfica - Biblioteca Central Julieta Carteado - UEFS

Amorim, Marcus Luiz Lima
A544o Oficina para o entendimento de funções matemáticas por intermédio da
Astronomia: aplicações no Ensino Médio / Marcus Luiz Lima Amorim. –
2020.
122f.: il.

Orientador: Marildo Geraldête Pereira

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual de Feira
de Santana. Programa de Pós-Graduação em Astronomia, 2020.

1. Astronomia. 2. Funções (matemática). 3. Oficina. 4. GeoGebra.
5. Aprendizagem. 6. Experimento-prototipagem. I. Pereira, Marildo
Geraldête, orient. II. Universidade Estadual de Feira de Santana. III.
Título.

CDU: 521:517.5

Rejane Maria Rosa Ribeiro – Bibliotecária CRB-5/695

Dedico esta dissertação a todas as pessoas que estiveram sempre ao meu lado ou que incentivaram meus estudos, especialmente minha mãe, Maria, e minha irmã, Zana. Obrigado por tudo!

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiro, e especialmente, a Deus pela minha vida e por tudo conquistado até este momento, por todas as dificuldades, lutas e vitórias. Nele confiei, Nele esperei e Nele conquistei!

À minha família, por estar sempre me apoiando durante toda minha vida. À D. Maria, Zana e Fernando pelo suporte, carinho e compreensão dados nos momentos mais difíceis.

Ao meu orientador, Dr. Marildo Geraldête Pereira, por ter confiado na minha capacidade intelectual e na capacidade de concretizar essa proposta.

A todo grupo MPAstro, professores e estudantes, que me auxiliaram e me inspiraram nessa jornada; à professora Vera, um agradecimento muito especial por toda força e raça na Coordenação do Mestrado.

Aos meus queridos colegas da turma Alpha Centauri, pela união e apoio desde que nos reunimos nas aulas e pelas risadas nas deliciosas tardes de sexta, que traziam um momento de relaxamento tão necessário nessa vida corrida.

À Malévola, pelo apoio e amizade e por sempre incentivar o meu trabalho.

Aos meus alunos do Colégio Modelo Luís Eduardo Magalhães, que participaram de forma admirável deste projeto.

A teoria sem a prática vira 'verbalismo', assim como a prática sem teoria, vira ativismo. No entanto, quando se une a prática com a teoria tem-se a práxis, a ação criadora e modificadora da realidade.

(Paulo Freire)

RESUMO

Este trabalho propõe-se a implementação de atividades em uma oficina que pretende explorar o conteúdo de funções de forma interdisciplinar, por meio de temas contextualizados na Astronomia, mais especificamente relacionados a questão de Órbitas e também na Física. Assim, busca-se contribuir para a melhoria da qualidade do ensino de Matemática, especialmente para o ensino de funções. A proposta foi realizada com 29 alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola estadual e adotou-se como proposta metodológica as seguintes etapas: caracterização do conceito Funções, de forma interdisciplinar, estudando o seu caráter variacional por intermédio da Astronomia, abordando o conceito de órbitas; um experimento/prototipagem ligado à Astronomia abordando o conceito de órbitas e suas representações; a criação de um ambiente virtual e o uso do *software* GeoGebra. Conseqüentemente, alguns procedimentos foram feitos antes da realização da oficina: Seleção dos estudantes participantes; Organização do ambiente virtual; Treinamento; Desenvolvimento do experimento/prototipagem para simulação das órbitas em torno de objetos massivos; Desenvolvimento da simulação e, também, elaboração da atividade sobre função exponencial/seno/cosseno. Então, durante a oficina os estudantes executaram atividades com o experimento/prototipagem e a simulação e, ao término da mesma, a atividade sobre função por meio do GeoGebra. A criação do ambiente virtual proporcionou: maior interação entre professor – estudante e estudante-estudante por meio de diálogos e questionamentos; apresentação de vídeos, ajudou durante o treinamento para usar o GeoGebra e também nas aulas práticas de construção e análise de gráficos por meio do GeoGebra. Durante o treinamento, usando os celulares/chromebooks foram feitas várias discussões sobre o conceito, aplicação e representação de função usando o GeoGebra e a utilização do experimento/prototipagem. A oficina permitiu a contextualização prática dos conceitos abordados sobre órbitas de corpos celestes, gerou inúmeros debates sobre função-Matemática-Astronomia e também despertou curiosidade/interesse dos estudantes pela Astronomia. O Produto educacional decorrente do trabalho desenvolvido é um Caderno Pedagógico cujo propósito é apresentar o caminho percorrido do planejamento à execução da oficina, tendo por finalidade a compreensão acerca de funções matemáticas no âmbito da Astronomia, bem como exemplificar a utilização da mesma. Logo, entende-se que o trabalho provocou mudanças significativas nas concepções dos estudantes sobre o conceito de função, na medida em que começaram a relacioná-lo com seus aspectos de variação, correspondência e dependência entre variáveis. E, por abordar o tema por meio de conceitos astronômicos, os estudantes perceberam que o aprendizado contribui não apenas para o conhecimento técnico, também para uma cultura ampla.

Palavras-chave: Astronomia. Funções Matemáticas. Oficina. Aprendizagem. GeoGebra. Experimento/prototipagem.

ABSTRACT

This work proposes the implementation of activities in a workshop that intends to explore the content of functions in an interdisciplinary way, through contextualized themes in Astronomy more specifically related to the question of Orbits and in Physics. Thus, it seeks to contribute to the improvement of the quality of mathematics teaching and, more specifically, to the teaching of functions. This work was carried out with 29 students of the 2nd year of High School of a state school and the methodological proposal was to characterize the concept Functions in an interdisciplinary way, studying its variational character through Astronomy, addressing the concept of orbits; an experiment / prototyping related to Astronomy addressing the concept of orbits and their representations; the creation of a virtual environment and the use of GeoGebra software. Consequently, some procedures were carried out before the workshop was held: Selection of participating students, Organization of the virtual environment, Training, Development of the experiment / prototyping for simulation of the orbits surrounding massive objects, Development of the simulation and also, elaboration of the activity on function exponential / sine / cosine. Then, during the workshop the students performed activities with the experiment / prototyping and simulation and at the end of it the activity about function through GeoGebra. So, the creation of the virtual environment provided: greater interaction between teacher - student and student-student through dialogues and questions; presentation of videos, helped during the training to use GeoGebra and also in the practical classes of construction and analysis of graphs through GeoGebra. During the training using cell phones / chromebooks, several discussions were made about the concept, application and representation of function using GeoGebra and the use of the experiment / prototyping, in the workshop, allowed the practical contextualization of the concepts discussed about orbits of celestial bodies, generated countless debates on function-Mathematics-Astronomy and also aroused students' curiosity / interest in Astronomy. The educational product resulting from the work developed is a Pedagogical Notebook whose purpose is to present the path taken from planning to the execution of the workshop, with the purpose of understanding about mathematical functions in the scope of Astronomy, as well as exemplifying its use. Therefore, it is understood that the work caused significant changes in the students' conceptions of the concept of function, as they began to relate it to its aspects of variation, correspondence and dependence between variables. And, by approaching the topic through astronomical concepts, they realized that learning should contribute not only to technical knowledge, but to a broad culture.

Keywords: Astronomy. Mathematical Functions. Workshop. Learning. GeoGebra. Experiment / prototyping.

LISTA DE GRÁFICO, QUADRO E TABELA

GRÁFICO

Gráfico 3.1 – IDEB do C. M. Luís Eduardo Magalhães.....60

QUADRO

Quadro 3.1 – Subfases do Processo Metodológico66

TABELA

Tabela 3.1 – ENEM do C. M. Luís Eduardo Magalhães.....60

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Ilustração da janela do aplicativo GeoGebra <i>Classic</i> 5 para computadores	35
Figura 2.2 – Ilustração da janela do aplicativo Calculadora Gráfica GeoGebra para celulares	35
Figura 2.3 – Simulação das órbitas de um grupo apertado de estrelas próximo ao buraco negro supermassivo no coração da Via Láctea.....	43
Figura 2.4 – Esquema ilustrativo de um campo gravitacional.....	44
Figura 2.5 – Ilustração da deformação sofrida pelo lençol	45
Figura 2.6 – Poços gravitacionais	46
Figura 2.7 – Elipse	47
Figura 2.8 – Classificação das Órbitas	49
Figura 2.9 – Gráfico de uma espiral logarítmica	55
Figura 2.10 – Função e seus respectivos gráficos gerados no GeoGebra	56
Figura 3.1 – Fachada da Unidade Escolar: C. M. Luís Eduardo Magalhães.....	59
Figura 3.2 – Esquema da fase pré oficina	64
Figura 3.3 – Imagem das salas virtuais, com destaque para a sala da turma do 2º ano A	65
Figura 3.4 – Esquema da fase de realização da oficina	68
Figura 3.5 – Esquema da fase de avaliação após a oficina.....	69
Figura 4.1 – Visão geral do ambiente virtual <i>Google Classroom</i>	72
Figura 4.2 – Salas de Aula Virtuais do <i>Google Classroom</i>	73
Figura 4.3 – Material do GeoGebra na Sala de Aula Virtual	75
Figura 4.4 – Recursos dos Estudantes	75
Figura 4.5 – Recursos do Professor	76
Figura 4.6 – Ilustrações de poços gravitacionais.....	78
Figura 4.7 – Comparação entre a geometria do poço gravitacional e o experimento.....	80
Figura 4.8 – Experimento feito com a bacia	81
Figura 4.9 – Ilustração da simulação do experimento	82
Figura 4.10 – Resultado da construção da Espiral no <i>chromebook</i>	83
Figura 4.11 – Passos da criação de uma Espiral utilizando o GeoGebra no aparelho celular	83

Figura 4.12 – Resultado da construção da Espiral no celular	84
Figura 4.13 – Boas-vindas, Apresentação do Título da oficina e tópicos abordados	85
Figura 4.14 – Cônicas: Parábola, Elipse e Hipérbole	86
Figura 4.15 – Simulação do Sistema Solar	87
Figura 4.16 – ABC da Astronomia Kepler.....	87
Figura 4.17 – Lei das Órbitas	88
Figura 4.18 – Determinação das órbitas num campo de forças gravitacionais a partir da conservação da energia	89
Figura 4.19 – Classificação das Órbitas	89
Figura 4.20 – Simulação das órbitas de um grupo apertado de estrelas próximo ao buraco negro supermassivo no coração da Via Láctea.	90
Figura 4.21 – Gravidade (Quer que Desenhe?)	90
Figura 4.22 – Além do Cosmos: O Espaço (Dublado) Documentário <i>National Geographic</i>	91
Figura 4.23 – Ilustração Deformação do Espaço.....	91
Figura 4.24 – Comparação entre as representações da deformação do espaço-tempo	92
Figura 4.25 – Simulação	92
Figura 4.26 – Explicando e usando o experimento.....	94
Figura 4.27 – Orientação para a construção da espiral	95
Figura 5.1 – Ilustração contendo uma resposta incorreta dada por uma dupla durante o treinamento	101
Figura 5.2 – Ilustração contendo respostas corretas dadas durante o treinamento	101

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	15
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	20
2.1 O ESTADO DA ARTE SOBRE O ENSINO E/ OU APRENDIZAGEM DE FUNÇÃO E SUA INSERÇÃO DE ACORDO COM AS PROPOSTAS GOVERNAMENTAIS.	20
2.2 O ENSINO DE FUNÇÃO DE ACORDO COM AS PROPOSTAS GOVERNAMENTAIS	25
2.2.1 OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS DO ENSINO MÉDIO: PCNEM	25
2.2.2 BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC): MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS	26
2.3 A RESSIGNIFICAÇÃO DE PRÁTICAS PEDAGÓGICAS	26
2.4 TECNOLOGIAS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO (TIC'S).....	30
2.4.1 OBJETOS DE APRENDIZAGEM	32
2.4.2 GEOGEBRA: UMA FERRAMENTA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA..	34
2.4 EXPERIMENTO/PROTOTIPAGEM COMO ATIVIDADE PRÁTICA DEMONSTRATIVA-INVESTIGATIVA	36
2.5 OFICINAS PEDAGÓGICA	37
2.6 A ASTRONOMIA NO ENSINO MÉDIO	39
3 METODOLOGIA	57
3.2 CARACTERIZAÇÃO <i>LOCUS</i> DE PESQUISA	58
3.2 PERFIL DOS ESTUDANTES	61
3.3 PLANEJAMENTO DA OFICINA: PROPOSTAS PARA O ENSINO DE FUNÇÕES	61
3.3.1 FASE PRÉ-OFFICINA.....	63
3.3.2 FASE DE REALIZAÇÃO DA OFICINA	67
3.3.3. FASE DE AVALIAÇÃO APÓS A OFICINA	69
4 IMPLEMENTAÇÃO DAS AÇÕES	71
4.1 FASE PRÉ-OFFICINA.....	71
4.1.1 SELEÇÃO DOS ESTUDANTES PARTICIPANTES.....	71
4.1.2 ORGANIZAÇÃO DO AMBIENTE DE APRENDIZAGEM	71
4.1.3 TREINAMENTO	74
4.1.4 DESENVOLVIMENTO DE PROTOTIPAGEM PARA O EXPERIMENTO/PROTOTIPAGEM USADO NA SIMULAÇÃO DAS ÓRBITAS EM TORNO DE OBJETOS MASSIVOS.	77

4.1.5 ELABORAÇÃO DA SIMULAÇÃO DO EXPERIMENTO/PROTOTIPAGEM USANDO O GEOGÉBRA	81
4.1.6 ELABORAÇÃO DA ATIVIDADE: CONSTRUINDO UMA ESPIRAL	82
4.2 FASE DE REALIZAÇÃO DA OFICINA	84
4.2.1 SEÇÃO INTRODUTÓRIA: BOAS -VINDAS E APRESENTAÇÃO	84
4.2.2 SEÇÃO PRINCIPAL: APRESENTAÇÃO DO CONTEÚDO	85
5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	98
5.1 APLICAÇÃO DO ROTEIRO DA OFICINA	98
5.1.1 FASE PRÉ- OFICINA.....	98
5.1.2 FASE DE REALIZAÇÃO DA OFICINA	101
5.3 ANÁLISE DE RESPOSTA AO USO DOS TICS	107
5.4 ANÁLISE DA RESSIGNIFICAÇÃO DE PRÁTICAS PEDAGÓGICAS.....	108
5.5 ANÁLISE GLOBAL DO TRABALHO	109
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	111
REFERÊNCIAS.....	112

1 INTRODUÇÃO

Dentre os conteúdos matemáticos estudados no Ensino Médio, o estudo de funções é, sem dúvida, um dos mais imprescindíveis. Sua relevância pode ser justificada pelo fato de que o conceito de função é considerado um dos mais importantes da Matemática e seus aspectos mais simples estão presentes nas noções mais básicas desta ciência. Pode-se citar, por exemplo, a relação entre duas grandezas em diferentes situações: área do círculo e raio, tempo e distância percorrida, tempo e crescimento populacional, além de tempo e amplitude de movimento de um pêndulo. Os documentos oficiais também salientam a importância do conceito de função e as suas relações, tal como mencionado no PCN +:

O estudo de funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências necessárias para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da Matemática (BRASIL, 2002, p. 121).

É indiscutível o caráter interdisciplinar do conceito de função. A leitura e interpretação de gráficos, por exemplo, auxiliam na compreensão de fenômenos presentes em outras áreas do conhecimento, a exemplo da Física, Química, Biologia, Geografia e Astronomia. Portanto, o conceito de função envolve concepções diversas e múltiplas representações, sendo necessário compreender o sentido que este conceito pode assumir em diferentes contextos, quais os significados que o estudante pode produzir e de que forma isto se desenvolve no ambiente escolar.

As dificuldades apresentadas pelos estudantes em relação à noção de função têm sido foco de estudos associados ao ensino e a aprendizagem de Matemática. Diante desse fato, estudiosos como Pires (2014) enfatizam que, na maioria das vezes, os estudantes não conseguem fazer conexões entre as diferentes representações das funções: gráfica; algébrica; diagramas; sentenças, como também a interpretação de gráficos das funções. Entende-se que o problema desse quadro não está apenas na aprendizagem, mas no modo como a Matemática é ensinada, sendo apresentada de forma descontextualizada, mecânica e, por vezes, distante da realidade dos estudantes. Todos esses fatores somados indicam sérios problemas na formação dos

professores de Matemática. Por isso, faz-se necessário repensar alguns aspectos relacionados não apenas aos cursos de formação inicial (licenciaturas), como também aspectos relativos à formação continuada, reuniões de trabalho pedagógico e prática em sala. Neste sentido, Costa (2008) comenta:

[...] as dificuldades do professor em relação ao conceito de função têm origem anterior à sua graduação e nesta nem sempre ele é aprofundado. Algumas destas dificuldades advêm dos obstáculos de natureza epistemológica que são inerentes ao conceito e devem ser transpostos na medida em que são aceitos e compreendidos (COSTA, 2008, p. 10).

Assim, para que se tenha uma mudança nesse quadro, é preciso que a abordagem do conceito de função seja feita por meio de problemas contextualizados e/ou interdisciplinares, conforme destacado em Brasil (2006):

O estudo de Funções pode prosseguir com os diferentes modelos que devem ser objeto de estudo na escola – modelos linear, quadrático e exponencial. O modelo periódico será discutido no tópico referente às funções trigonométricas, mais adiante. É recomendável que o aluno seja apresentado a diferentes modelos, tomados em diferentes áreas do conhecimento (queda livre de um corpo, movimento uniforme e uniformemente acelerado, crescimento de uma colônia de bactérias, quantidade de medicamento na corrente sanguínea, rendimentos financeiros, consumo doméstico de energia elétrica etc.). Sempre que possível, os gráficos das funções devem ser traçados a partir de um entendimento global da relação de crescimento/decrescimento entre as variáveis. A elaboração de um gráfico por meio da simples transcrição de dados tomados em uma tabela numérica não permite avançar na compreensão do comportamento das funções (BRASIL, 2006, p. 72).

Desta forma, tem-se a seguinte questão referente ao ensino de matemática na Educação Básica: *Como resolver o problema da compreensão do conceito e utilizações de funções no Ensino Médio?* Neste sentido, este trabalho propõe-se a implementação de atividades em uma oficina que, a partir de problemas reais, pretende explorar o conteúdo de funções de forma interdisciplinar, por meio de temas contextualizados na Astronomia e mais especificamente relacionados com Órbitas. Para auxiliar os estudantes na resolução dos problemas e na exploração destes conceitos, será utilizado, como objeto de aprendizagem, um experimento ligado à Astronomia, de forma a utilizar o conceito de órbitas astronômicas e suas representações. Para fins de expressão gráfica das funções, será utilizado o *software* GeoGebra. A proposta se insere dentro de uma perspectiva de abordagem da Ressignificação de Práticas Pedagógicas. Nesta perspectiva, concordamos com

Masetto (2003, p. 71) quando afirma: “o professor deve mudar o foco do ensinar para reproduzir conhecimento e passar a preocupar-se com o aprender e, em especial, o “aprender a aprender”, abrindo caminhos coletivos de busca e investigação para a produção do seu conhecimento e do seu aluno. ” Acredita-se que este trabalho possa auxiliar o professor no processo ensino-aprendizagem, além de contribuir, de alguma maneira, com as pesquisas em Educação Matemática.

A situação-problema relacionada à Astronomia apresentada neste trabalho é ilustrada por meio do conceito e das demonstrações das órbitas descritas por um corpo massivo ao redor de outro objeto astronômico, sob a influência de alguma força (normalmente gravitacional), como por exemplo: cometas em torno do Sol, a Lua entorno da Terra, estrelas orbitando em torno de um buraco negro, etc.

Posto isto, cabe enfatizar que o trabalho tem como meta promover informações e procedimentos científicos no cotidiano escolar de forma a despertar o interesse dos estudantes, buscando o uso de estratégias de solução, observações e experimentações ligadas a cálculos e relações com funções matemáticas. Desta forma, procura-se traçar um paralelo com as observações e os conhecimentos ligados a fenômenos físicos e astronômicos.

No sentido de estabelecer uma coerência com o objeto de investigação e os objetivos desta pesquisa, foram utilizados instrumentos de coleta de dados qualitativos, bem como a técnica da análise de conteúdo. Para tanto, buscou-se trabalhar com as orientações centradas no conteúdo proposto, privilegiando estratégias metodológicas qualitativas, evidenciando a interação sujeito-pesquisador, a subjetividade de um e do outro e a consideração do contexto (ANADÓN, MACHADO, 2001, p. 85).

De forma empírica, a construção e exposição estão pautadas na possibilidade de demonstração de que a Astronomia pode ser uma facilitadora na aprendizagem matemática. Assim sendo, concorda-se com Morais (2003) quando afirma que:

A interação permanente entre Astronomia e Matemática, de alguma forma, pode ser aproveitada para tentar ultrapassar essa visão tradicionalista. As dificuldades que a maioria dos alunos experimenta, quer na compreensão dos conceitos matemáticos, quer na sua aplicação à realidade, podem ser vencidas tirando partido da Astronomia, pois ela por si só é bastante

motivadora pela curiosidade que desperta nas pessoas (MORAIS, 2003, p. 8-9).

Nesta perspectiva, buscou-se encontrar nas atuais tendências metodológicas de ensino da matemática uma forma de se opor ao ensino tradicional e conteudista, de modo a elaborar uma proposta visando tornar o ensino de funções mais significativo e compreensível para os estudantes. Além disto, almejou-se fazer com que o estudante realmente participe do processo de construção do conhecimento, tendo a oportunidade de refletir, indagar, discutir, formular hipóteses e expor suas ideias em relação aos fenômenos estudados.

Encontra-se nas metodologias de ensino, por meio da resolução de problemas, a utilização de tecnologias aliadas à contextualização e à interdisciplinaridade, sendo esta uma possibilidade para o ensino de funções. Nesta perspectiva, este trabalho tem como objetivo geral aplicar conhecimentos e conceitos básicos de Astronomia como elemento motivador e de contextualização no ensino de funções matemáticas para estudantes do 2º ano, do Ensino Médio, em uma escola estadual. Neste sentido, buscou-se contribuir para a melhoria da qualidade do ensino de Matemática e, mais especificamente, para o ensino de funções, utilizando atividades práticas ligadas à Astronomia, bem como a utilização de ferramentas de tratamentos de dados, análise e construção de gráficos (GeoGebra). Os objetivos específicos são os seguintes: incentivar o estudo científico de fenômenos do Universo visando à difusão da Astronomia na escola; analisar situações da vida real identificando modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução; interpretar e criticar resultados no contexto do problema; utilizar ferramentas de análise e visualização matemática; e desenvolver experimentos e realizar oficinas destinadas à contextualização das situações astronômicas sob o ponto de vista matemático. Finalizando a proposta, foi desenvolvido como Produto Educacional um roteiro para desenvolvimento e aplicação de uma oficina pedagógica ligada à realização de atividades práticas, estabelecendo conexões entre a temática das funções e a análise de fenômenos astronômicos.

O presente trabalho está estruturado da seguinte forma: o primeiro capítulo se refere à introdução, na qual foi apresentada uma descrição geral do estudo, com ênfase no problema abordado, na justificativa, metodologia e objetivos. O segundo

capítulo versa sobre a Fundamentação Teórica, discutindo, principalmente, os seguintes aspectos: a ressignificação das práticas pedagógicas; o ensino de função de acordo com as propostas governamentais; o uso de tecnologias de informação e comunicação (TIC's) para fins gráficos; o uso da prototipagem na forma de um experimento para uma atividade prática demonstrativa-investigativa contextualizada na Astronomia; o uso de oficinas no ensino; inserção e abordagem da Astronomia no ensino médio. O terceiro capítulo apresenta a Metodologia de elaboração do projeto, contendo a sequência de elaboração do mesmo. O quarto capítulo contempla a descrição e implementação das etapas do projeto. O quinto capítulo trata, de forma qualitativa, da Análise e Discussão dos Resultados da implementação do projeto, ou seja, os resultados obtidos nas diferentes fases da oficina. E, por fim, o sexto capítulo apresenta as conclusões do estudo.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo é apresentada a fundamentação teórica e o estado da arte que alicerça esta pesquisa e subsidia a proposta do trabalho sob um ponto de vista didático da prática empregada no mesmo. É subdividido em 9 segmentos, respectivamente: 1) O estado da arte sobre o ensino e/ ou aprendizagem de função; 2) O ensino de função de acordo com as propostas governamentais; 3) A resignificação de práticas pedagógicas; 4) Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC's); 5) Experimento/prototipagem como atividade prática demonstrativa-investigativa; 6) Oficinas pedagógicas; 7) A Astronomia no Ensino Médio; 8) Movimento de objetos astronômicos em torno de um buraco negro; 9) Órbitas e leis de Kepler e Newton.

2.1 O ESTADO DA ARTE SOBRE O ENSINO E/ OU APRENDIZAGEM DE FUNÇÃO

Nesta seção será feita uma breve análise de algumas dissertações e artigos selecionados neste trabalho, levando em conta o tema ensino e/ou aprendizagem de função. Tal análise e leitura contribui para ampliar a compreensão sobre as dificuldades dos alunos e dos professores a respeito do tema. Sendo assim, buscou-se identificar quais são as alternativas propostas, nas referidas produções, para amenizar tais dificuldades e para uma melhor condução do processo de ensino e aprendizagem.

Vários estudos abordam as dificuldades de alunos e concepções de professores sobre o conceito de Função. Com base neste levantamento, verificou-se a importância do tema e notou-se a relevância do ensino das funções para a construção da ciência como um todo.

Na dissertação “**Análise de uma sequência didática para a aprendizagem do conceito de função afim**”, Dornelas (2007) faz uma análise de uma sequência didática aplicada em uma turma de estudante do 1º ano do Ensino Médio. Sendo assim, seu objetivo consiste em

Investigar os efeitos de uma sequência didática nas concepções de alunos do 1º ano do Ensino Médio em relação ao conceito de Função Afim (DORNELAS, 2007, p.17).

A sequência didática composta de dois grupos de atividades foi elaborada com ênfase na compreensão da noção de variação entre grandezas lineares, privilegiando a articulação entre as representações em linguagem natural, gráfica, algébrica e tabular da Função Afim.

Na conclusão da pesquisa o autor afirma:

o estudo de função afim a partir de problemas de contexto realístico, com ênfase na concepção variacional, possibilita a identificação das variáveis e o relacionamento entre elas, bem como a articulação entre os diferentes registros de representação da função (linguagem natural, numérica, algébrica e gráfica) (Dornelas, 2007, p.173).

Na dissertação “**Aprendizagem significativa de Função do 1º grau: uma investigação por meio da modelagem matemática e dos mapas conceituais**”, Luz (2010) selecionou uma turma do 1º ano do Ensino Médio, a saber, aquela que melhor se adaptou ao processo de elaboração de mapas conceituais. Na referida turma desenvolveu duas atividades de Modelagem Matemática envolvendo os conceitos referentes à Função do 1º Grau. Sendo assim, o objetivo do trabalho reside em:

Copilar indícios, por meio dos mapas conceituais, da ocorrência da aprendizagem significativa do conteúdo de Função do 1º Grau, em uma turma do primeiro ano do Ensino Médio, mediante atividades investigativas norteadas pelo ambiente da Modelagem Matemática (LUZ, 2010, p.11).

Na referida investigação, os alunos construíram quatro mapas conceituais: o primeiro sobre Função do 1º Grau, o segundo e o terceiro sobre cada uma das duas atividades desenvolvidas e novamente outro mapa sobre o tema inicial.

Na conclusão da pesquisa, o autor assevera:

As análises de todos os materiais produzidos pelas equipes durante as atividades, e dos mapas individuais construídos pelos alunos permitiu afirmar que o processo de assimilação do conceito de Função do 1º Grau, foi desencadeado em alguns alunos e a aprendizagem destes tornou-se mais significativa após o desenvolvimento das atividades. Desta forma, o professor-pesquisador ratificou a influência e contribuição do ambiente da Modelagem Matemática e dos Mapas Conceituais durante todo o processo de investigação (LUZ, 2010, p. 114).

Na dissertação “**Ensino e Aprendizagem de Função: uma metanálise de dissertações brasileiras sobre modelagem matemática produzidas entre 1987 e 2010**”, Viana Filho (2012) faz uma metanálise, entendida como sendo uma revisão sistemática de outras pesquisas, cuja finalidade é realizar uma avaliação crítica sobre elas. Sendo assim, o objetivo do trabalho consiste em:

Investigar possíveis contribuições da modelagem matemática para o ensino de função na Educação Básica (VIANA FILHO, 2012, p.13).

A análise seguiu as diretrizes para a leitura, análise e interpretação de textos, propostas por Severino (2002), cujo escopo foi sete dissertações de mestrado produzidas no Brasil, as quais abordaram o tema ensino e aprendizagem de função com modelagem matemática.

Na conclusão da pesquisa, o autor reitera:

Esta metodologia, a modelagem matemática, pode permitir a formação de um aluno crítico e consciente do papel que os conhecimentos matemáticos relacionados às funções desempenham no meio social, ela se torna uma metodologia que, definitivamente, pode abranger a fonte social, da qual House (1995) declara advir parte das forças que atuam sobre o conteúdo, o ensino e as aplicações da álgebra na Educação Básica (VIANA FILHO, 2012, p.181).

Na dissertação “**A modelagem Matemática como proposta de ensino e aprendizagem do conceito de função**”, Souza (2011) propõe a aplicação de uma sequência didática para um grupo de professores (oito docentes), usando a metodologia da Modelagem Matemática, no intuito de propagar esse método de ensino. Sendo assim, objetivo axial da pesquisa foi o seguinte:

Verificar como os professores se apropriam da modelagem como processo de ensino e aprendizagem. Para isso, desenvolvemos uma atividade em ‘Hora de Trabalho Pedagógico Coletivo’ (HTPC), para buscar dados que auxiliem no diagnóstico, de como tais professores incorporam essa estratégia em suas práticas pedagógicas, não só em relação ao ensino de função, como também a outros conteúdos matemáticos (SOUZA, 2011, p.18).

No artigo **“Tendências atuais sobre o ensino de funções no Ensino Médio”**, Barreto (2008) propõe, por meio de uma análise da literatura, trazer resultados de pesquisas na área da Educação Matemática que tratam do aprendizado de variáveis e funções e que apontam as tendências recentes a respeito do ensino de funções no Ensino Médio. No referido trabalho, apresenta-se um estudo qualitativo sobre a utilização da linguagem matemática por professores de Matemática do Ensino Médio, ao tratarem do tema “funções”, investigando as formas de expressão destes professores ao lidarem com suas próprias concepções sobre o tema, bem como ao explorá-lo nas situações pedagógicas em sala de aula.

No artigo **“Modelagem Matemática como apoio ao ensino e aprendizagem de função quadrática”**, Silva, Madruga e Silva (2019) apresentam um resumo de uma pesquisa mais ampla cujo objetivo foi analisar as possíveis contribuições da Modelagem Matemática à aprendizagem de Função Quadrática. A pesquisa teve abordagem qualitativa intervencionista e fundamentou-se nos princípios da Modelagem Matemática, foi realizada no período de 2016 e 2017. Os sujeitos participantes da pesquisa foram 30 alunos de um curso Técnico Integrado ao Médio de uma Escola Federal do município de Vitória da Conquista/BA. Os resultados apresentados evidenciam que a atividade permitiu aos estudantes construir o conceito de Função Quadrática, mesmo que de maneira informal, assim como a se posicionarem enquanto indivíduos atuantes nesse processo de aprendizagem.

No artigo **“Desenvolvimento de objeto de aprendizagem, baseado em especificações de normatização SCORM¹, para o caso de suporte à aprendizagem de funções”**, Vieira e Nicoleit (2007) descrevem o desenvolvimento de um Objeto de Aprendizagem (AO) direcionado à área da matemática usando recursos de multimídia como figuras, animações e sistemas interativos para a compreensão do assunto. O trabalho baseia-se no Padrão SCORM para Materiais Instrucionais e Objetos de Aprendizagem. Também explora a criação das páginas *Web* que compõem o objeto e o desenvolvimento da interatividade deste com o aluno,

¹ SCORM (Shareable Content Object Reference Model), podendo ser traduzido como Modelo de Referência de Objeto de Conteúdo Compartilhável.

além de abordar aspectos pedagógicos acerca da produção e utilização dos objetos de aprendizagem.

No artigo **“Tecnologias móveis: tablets e smartphones no ensino da matemática”**, Freitas e Carvalho (2017), apresentam a utilização, em oficinas, das tecnologias móveis (*tablets* e *smartphones*) como recursos didáticos para a aprendizagem dos conteúdos matemáticos, a fim de observar como esses instrumentos podem contribuir para a formação inicial de professores que ensinam Matemática no Ensino Fundamental. Além disso, os autores mencionados caracterizam a oficina pedagógica como forma de construir conhecimento a partir da ação e da reflexão e relatam, sucintamente, uma experiência de oficinas desenvolvida com professores da Rede Municipal de Ensino.

No artigo **“O uso do software GeoGebra no estudo de funções”**, Sá e Machado (2017), objetivam investigar as contribuições do *software* GeoGebra no estudo de funções. Para tanto, baseiam a pesquisa em opiniões de diferentes autores, a fim de ressaltar a colaboração deste *software* no processo de ensino-aprendizagem.

No artigo **“O conceito de função: uma análise histórica epistemológica”**, Pires (2016) apresenta os principais resultados de uma pesquisa que teve por objetivo realizar uma análise histórico-epistemológica do conceito de função desde os babilônios por volta de 2000 a. C. até as contribuições dadas pelo grupo Bourbaki no século XX, perfazendo a evolução desse conceito. O estudo de caráter bibliográfico foi realizado por meio da análise de publicações disponíveis em forma impressa ou em meios digitais. A apreciação do material consultado foi executada sob a ótica da noção dos obstáculos epistemológicos, o que permitiu evidenciar que o processo evolutivo do conceito de função foi marcado pelas diferentes formas de representar uma relação funcional e pelos obstáculos enfrentados, cujas tentativas de superá-los culminaram em novas formas de conceber o conceito.

Em face do exposto, coloca-se, aos professores de Matemática, particularmente em relação ao ensino de funções, desafios de uma renovação mais intensa e a emergência em apoiar as pesquisas relacionadas, aliadas a mais debates e reflexões. Contudo, para que isso ocorra, o desafio está em resolvermos desde questões estruturais até o exercício da profissionalização docente em encontrar

tempo, diante de tanta pressão e sobrecarga que enfrentam os professores em seu trabalho cotidiano.

2.2 O ENSINO DE FUNÇÃO DE ACORDO COM AS PROPOSTAS GOVERNAMENTAIS

Nesta seção serão abordadas as propostas e orientações aprovadas para o ensino de função no Ensino Médio, apresentadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) e também na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

2.2.1 OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS DO ENSINO MÉDIO: PCNEM

De acordo com os PCNEM, durante o ensino médio, etapa final da educação básica, a matemática deve contribuir para a construção de uma visão de mundo, de modo que os estudantes tenham condições de ler e interpretar a realidade e desenvolver as habilidades e competências que, ao longo de suas vidas, poderão lhes ser exigidas.

Sabe-se que o conhecimento matemático é necessário para a compreensão de uma grande diversidade de situações da vida cotidiana, servindo, também, como instrumento de investigação e apoio a outras áreas do conhecimento. Neste sentido, os parâmetros curriculares destacam:

Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que serão essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação (BRASIL, 2000, p. 111).

Em relação ao estudo de funções, o documento o considera como articulador de diferentes conteúdos, dentro e fora da própria matemática. Além disso, afirma que o ensino de funções permite ao aluno o desenvolvimento da linguagem algébrica,

indispensável para expressar a relação entre as grandezas e modelar situações problemas. Desta maneira, os problemas de aplicação devem introduzir o estudo de funções, servindo de contexto e motivação para a aprendizagem dos conceitos envolvidos neste tema.

Os PCNEM também chamam a atenção para o fato de que, após a definição de função, o estudo de conjuntos e relações é abandonado, uma vez que, para a análise dos diferentes tipos de função, este estudo é desnecessário. Portanto, destacam que “[...] o ensino pode ser iniciado diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, o que permite o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algébrica e graficamente.” (BRASIL, 2000, p. 121). Além disso, salientam que a linguagem excessivamente formal deve ser moderada e, em determinados momentos, deixada de lado.

2.2.2 BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC): MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

A BNCC é um documento que visa nortear o que é ensinado nas escolas do Brasil inteiro, englobando todas as fases da educação básica, desde a Educação Infantil até o final do Ensino Médio. A partir dela, as redes de ensino e instituições escolares públicas e particulares passaram a ter uma referência curricular nacional comum e obrigatória para a elaboração dos seus currículos e propostas pedagógicas.

2.3 A RESSIGNIFICAÇÃO DE PRÁTICAS PEDAGÓGICAS

A ideia de ressignificação de práticas pedagógicas consiste em trabalhar os conteúdos e conceitos de maneira diferenciada, contextualizada e de forma que os estudantes sejam os autores do processo de ensino-aprendizagem. Evidentemente que os processos de aprendizagem não estão desligados dos processos de ensino implementados pelo professor. Por isso, pode-se antecipar que aprendizagens mais profundas ou significativas são alcançadas por meio de métodos de ensino-aprendizagem que possibilitem e reforcem a iniciativa do aluno, o seu sentido de descoberta e uma construção de conhecimento a partir da análise e resolução de problemas concretos.

Essa mediação precisa ser planejada e organizada para que possibilite aos estudantes se colocarem diante de realidades que talvez não reconheceriam ou dificilmente a elas se atentariam, além de permitir que façam inferências, relações, análises e possam elaborar suas próprias conclusões.

Pode-se inferir que a mediação pedagógica do professor exerce papel fundamental no processo de ensino-aprendizagem. Conforme Masetto (2003):

a forma de se apresentar e tratar um conteúdo ou tema que ajuda o aprendiz a coletar informações, relacioná-las, organizá-las, manipulá-las, discuti-las e debatê-las com seus colegas, com o professor e com outras pessoas (interaprendizagem), até chegar a produzir um conhecimento que seja significativo para ele, conhecimento que se incorpore ao seu mundo intelectual e vivencial, e que o ajude a compreender sua realidade humana e social, e mesmo a interferir nela(MASETTO, 2003, p. 144).

Neste sentido, entende-se que a aprendizagem, aplicada a qualquer área do conhecimento, deve ter pretensões formativas e não simplesmente de acúmulo de informações e conhecimentos. Isto é alcançado quando o ponto de partida para o aprendizado é um elemento vivencial do estudante, o que dá significado a aprendizagem e garante uma melhor interação professor-estudante. O PCN descreve como competência a ser desenvolvida a contextualização sociocultural, onde é preconizado o seguinte aspecto: “[...] compreender e utilizar a ciência como elemento de interpretação e intervenção, e a tecnologia como conhecimento sistemático de sentido prático [...]” (BRASIL,1999, p. 27). Tal contexto demanda a criação de alternativas e ferramentas que auxiliem o professor a buscar novas estratégias metodológicas, a fim de obter resultados mais eficientes no processo de aprendizagem dos estudantes e promover ao máximo o crescimento cognitivo dos sujeitos.

A Educação suscita um repensar das práticas pedagógicas no espaço de construção do conhecimento como forma de se tentar encontrar uma nova direção para o contexto educacional. Então, é necessário repensar, analisar, questionar e redimensionar esse processo. Para Gonçalves (2003):

[...] as ações que introduzem novas práticas ajudam as pessoas a pensar e analisar o que são e o que fazem. Nesse sentido todas elas são ferramentas que podem ser usadas em sala de aula com o objetivo de fazer a transmissão entre o paradigma conteudista e o paradigma analítico (GONÇALVES, 2003, p. 92).

Sob esse horizonte compreensivo, cabe ao professor observar sua prática, refletir a respeito das necessidades apresentadas e voltar-se para si mesmo com uma análise franca e, acima de tudo, construtiva sobre seu próprio trabalho, buscando possíveis melhorias. Adotando-se novas práticas na abordagem de conteúdos em sala, tem-se como consequência uma mudança significativa no comportamento do estudante, que, por sua vez, começa a perguntar, inferir e construir o seu próprio conhecimento, tornando-se o autor principal de sua aprendizagem e tendo o professor como mediador em todo o processo.

Uma das importantes funções da escola é ensinar como chegar ao conhecimento e à informação, já que o primeiro não cessa de se acumular. Portanto, é impossível que a escola ensine no mesmo ritmo da sociedade sem que ela esteja instrumentalizada. Desse modo, para Gonçalves (2003):

Lidar com as tecnologias pode ser percebido como um episódio no qual as ideias, as experiências, as competências e habilidades são interpretadas e vistas como algo inovador que integra a instrução, a construção, a descoberta, o conceito, o sentido para o compartilhamento de pressupostos cognitivo e interacionista (GONÇALVES, 2003, p. 27).

Neste processo de formação de conceitos, cabe ao professor, como mediador, propiciar a expressão, a comunicação da diversidade de símbolos, significados, valores, atitudes, sentimentos, expectativas, crenças e saberes que estão presentes em determinado grupo de estudantes que vivem em contexto específico. Cabe ao educador, também, esforçar-se para entender como cada grupo em particular elabora essa diversidade, promovendo o diálogo entre as diversas formas dessa elaboração, “buscando atuar nas zonas de desenvolvimento proximais” (REGO, 2014, p. 70). Isso implica identificar os níveis de desenvolvimento real e potencial dos estudantes, formando uma espiral ascendente de aprendizagem e mudança, de forma que um ponto de chegada de uma atividade se torna ponto de partida de outra.

Observa-se, ainda, como fator relevante para a educação, à luz das interpretações das teorias de Vygotsky (PALANGANA, 2015, p. 140), a importância da atuação dos outros membros do grupo social (colegas, amigos e família, por

exemplo) na mediação entre a cultura e o indivíduo, uma vez que uma intervenção deliberada desses membros da cultura, nessa perspectiva, é essencial no processo de desenvolvimento do estudante. Os conteúdos colocados como verdades absolutas não permitem a discussão, de modo que o processo ensino-aprendizagem tende a acontecer de maneira mecânica, onde o estudante não participa, limitando-se ao ato de memorizar. Necessita-se, pois, de atividades práticas, capazes de simular situações e problemas cotidianos, levando o indivíduo a procurar soluções por via do conteúdo apresentado em sala.

Diferentes concepções de aprendizagem estão contidas na prática pedagógica do professor, de forma consciente ou não, interferindo no seu cotidiano em sala de aula. Essas concepções de aprendizagem devem ser integradas pelos professores de forma contextualizada, adequando-as aos variados procedimentos metodológicos. Assim, a mediação pedagógica acontece na postura do professor, na sua atitude no espaço escolar, na forma de trabalhar um conteúdo e no modo de estabelecer interação com/entre os estudantes (e destes com seu contexto maior).

É importante também que o educador se preocupe em escolher materiais que proporcionem este tipo de aprendizagem e introduza, na sala de aula, o elemento afetivo. De acordo com Vygotsky (ZANOLLA, 2012, p. 7), não se ensina conceitos aos estudantes; são eles próprios que formam os seus conceitos sobre as coisas. Em outras palavras: o estudante é sujeito ativo de seu processo de formação e de desenvolvimento intelectual, afetivo e social. Cabe ao professor atuar como um mediador nesse processo, ao trabalhar com os conteúdos, ao propiciar a inter-relação entre o sujeito (estudante) e o objeto de seu conhecimento (conteúdo escolar). Nessa perspectiva, o saber do estudante é uma dimensão importante no processo de ensino-aprendizagem.

Uma vez que nem todos aprendem do mesmo modo e no mesmo ritmo, faz-se necessário variar as estratégias para motivar e potencializar o desenvolvimento dos sujeitos. Não se deve esquecer de que a metodologia possui um valor relativo: ela realmente será importante se utilizada adequadamente para facilitar os objetivos relacionados com a aprendizagem dos estudantes. Portanto, as técnicas não se

justificam por si mesmas. Desse modo, dialoga-se com a concepção de Masetto (2000), quando afirma:

[...] o conceito de aprender está ligado mais diretamente a um sujeito (que é aprendiz), que, por suas ações, envolvendo ele próprio, os outros colegas e o professor, busca e adquire informações, dá significado ao conhecimento, produz reflexões e conhecimentos próprios, pesquisa, dialoga, debate, desenvolve competências pessoais e profissionais, atitudes éticas, políticas, muda comportamentos, transfere aprendizagem, integra conceitos teóricos com realidades práticas, relaciona e contextualiza experiências, dá sentido às diferentes práticas da vida cotidiana, desenvolve sua criticidade, a capacidade de considerar e olhar para os fatos e fenômeno sob diversos ângulos, compara posições e teorias, resolve problemas (MASETTO, 2000, p. 139).

Percebe-se, assim, que o estudante, no processo de aprendizagem, assume um papel ativo e participante, responsável por suas ações, que o conduzem a aprender e a mudar o comportamento. Estas ações podem ser desenvolvidas por ele, individualmente, juntamente com o professor e com os colegas. Neste sentido, é importante que os educadores estabeleçam um diálogo com os estudantes, saindo da postura tradicional de transmitir o que conhece para correr o risco de ouvir uma pergunta, ainda que não tenha resposta e proponha uma pesquisa, a fim de buscar uma solução. É preciso confiar nos estudantes e estimulá-los a assumir responsabilidade, acreditar que são capazes de retribuir comportamentos adultos de respeito, de diálogo, de desenvolver habilidades e competências. Desta forma, as aulas serão motivadoras e desafiadoras, reverberando na aprendizagem e no crescimento dos sujeitos.

2.4 TECNOLOGIAS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO (TIC'S)

Com o surgimento das Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) tudo o que se conhecia por aparatos tecnológicos sofreu uma redefinição, ganhando uma nova roupagem. Então, as (TICs) podem ser entendidas como um conjunto de recursos tecnológicos integrados entre si, que proporcionam, por meio das funções de *software* e telecomunicações, a automação e comunicação dos processos de negócios, da pesquisa científica e de ensino e aprendizagem (MENDES, 2008, p. 58).

Pode-se criar variadas possibilidades do uso das TICs em diversas situações no processo de aprendizagem, oportunizando que o professor apresente, de forma

diferenciada, os conteúdos e possibilitando as adequações às diversidades encontradas em sala de aula. Desta forma, tal discussão dialoga com a Base Nacional Curricular Comum, haja vista que ela sugere:

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (BRASIL, 2016, p. 9).

Assim, o uso das tecnologias da informação e comunicação (TIC's) provoca, no contexto educacional, inúmeros debates, inclusive no que diz respeito ao papel do professor e de sua mediação pedagógica no processo de aprendizagem. Sabe-se que é impossível dialogar sobre tecnologia e educação sem abordar a questão do processo de aprendizagem. Elas devem ser instrumentos capazes de favorecer uma aprendizagem significativa, pois, por si só, não resolverão os problemas que serão encontrados na educação escolar. Logo, o uso da tecnologia no processo de aprendizagem deve levar o professor a assumir uma nova atitude. Embora com o papel de especialista que detém o conteúdo, as competências, as habilidades e a experiências a comunicar (GONÇALVES, 2003, p.27), o mesmo deverá desempenhar a função de orientador, facilitador e colaborador para dinamizar a aprendizagem do aluno, ou seja, assumirá o papel de mediador pedagógico.

Os usos das TICs podem proporcionar grandes mudanças na maneira como os materiais educacionais podem ser projetados e utilizados pelos professores. Dentre os materiais educativos formulados com base nas TICs, tem-se os Objetos de Aprendizagem (OAs) que:

Permitem a construção de contextos digitais para os conteúdos que serão explorados. Esses contextos fazem uso de uma série de ferramentas midiáticas, tais como música, desenhos, gráficos, simulações, jogos etc. A contextualização permite aos alunos traçar mais facilmente uma relação entre determinado conteúdo e suas aplicações práticas e enxergar a interdependência das várias disciplinas (GALLOTTA; NUNES, 2004, p. 80).

Deve-se ressaltar que, no processo de aprendizagem com o uso do Objeto de Aprendizagem, a ênfase deve estar, também, na mediação pedagógica e não apenas nos recursos ou nas técnicas empregadas em aulas expositivas, as quais são utilizadas apenas para transmissão de informações, conhecimentos, experiências. Para além disso, o objetivo axial é o desenvolvimento intelectual, afetivo e social dos estudantes. Logo, a tecnologia deverá ser adequada e variada para atingir tais metas. Privilegiar, então, o processo de aprendizagem por meio do uso da tecnologia consiste em trabalhar com técnicas que incentivem a participação dos estudantes, a interação entre eles, o debate e o diálogo.

Desta forma, os OAs podem dinamizar o processo de ensino-aprendizagem dos estudantes quando são usados não apenas para demonstrações, mas associados à discussão, comparações e debates que permitem aos sujeitos se colocarem diante de realidades que talvez não conhecessem, ou a elas não tivessem acesso, a não ser por meio desses recursos.

2.4.1 OBJETOS DE APRENDIZAGEM

Os Objetos de Aprendizagem (OAs) podem ser considerados uma tecnologia relativamente recente, não existindo ainda um consenso universalmente aceito sobre sua definição. Segundo Audino (2012, p. 57), “*Objetos de aprendizagem são recursos digitais dinâmicos, interativos e reutilizáveis em diferentes ambientes de aprendizagem elaborados a partir de uma base tecnológica*”. Desta forma, são desenvolvidos com fins educacionais, cobrindo as modalidades de ensino presencial, híbrida ou a distância; atendendo a diversos campos de atuação, seja ela educação formal, corporativa ou informal. Como exemplo de OA cito o apresentado em Braga (2015), o qual considera como OA qualquer recurso digital que possa ser reutilizado e que interfira diretamente na aprendizagem.

As vantagens do uso dos OA, no ambiente escolar, é que o professor tem a oportunidade de perceber as opiniões dos alunos e intervir quando necessário no processo de elaboração do pensamento coletivo, enquanto os alunos também são significativamente beneficiados quando inseridos em um projeto de construção colaborativa. Os alunos mais tímidos têm a chance de se posicionarem em relação ao

que está sendo construído, da mesma forma que os alunos mais participativos são conduzidos a dividir o espaço com os demais.

A flexibilidade e possibilidade de reutilização são algumas das características de um OA, que facilita a disseminação do conhecimento, assim como sua atualização. Existem vários tipos de recursos digitais que podem ser considerados como OA, tais como: imagens, vídeos, *softwares* e simulação.

A seguir, apresentam-se os dois tipos que foram utilizados na oficina que integrou este trabalho:

- ✓ *Softwares*: é um agrupamento de comandos escritos em uma linguagem de programação. Estes comandos, ou instruções, criam as ações dentro do programa e permitem o seu funcionamento. Dentre os *softwares* educacionais existentes será utilizado o GeoGebra, o qual será descrito, posteriormente, de forma mais detalhada;
- ✓ Simulação: são animações que podem representar um modelo da natureza e, devido a isso, podem ser muito utilizadas como objetos de aprendizagem.

A utilização inteligente de recursos digitais aliados aos objetivos educacionais representa elementos motivadores, já que os estudantes, em sua maioria, vivem em uma cultura onde a habilidade visual e a capacidade de processar informações são constantemente exercitadas. Portanto, não interessa apenas transmitir uma informação, mas, também, uma informação mediada pedagogicamente. (GUTIERREZ; PRIETO, 1994).

Para lidar com essa realidade, os professores são convocados a desenvolver novas competências quanto ao uso das novas tecnologias, uma vez que é necessário ter a habilidade de decidir por que, quando, onde e como os OAs podem contribuir com os objetivos de aprendizagem, bem como quais são os mais adequados em determinados momentos e contextos pedagógicos.

2.4.2 GEOGEBRA: UMA FERRAMENTA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Dentro do cenário da proposta deste trabalho, tendo em vista o uso de OA, nesta seção será feita uma breve abordagem sobre o *software* GeoGebra e sua relevância no ensino da Matemática, ressaltando-se o motivo da sua escolha em detrimento de outros *softwares* educacionais.

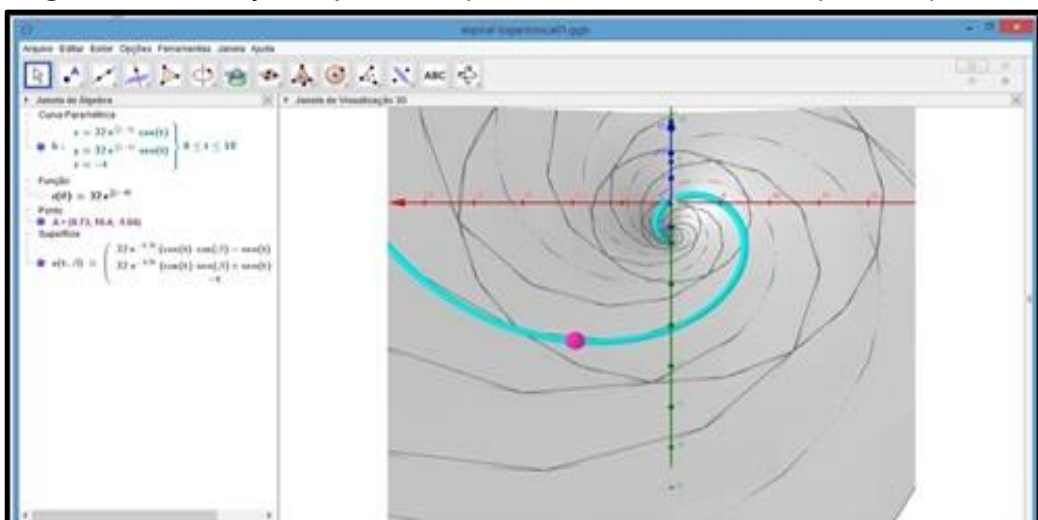
O GeoGebra é um *Software* Dinâmico de Matemática (DMS) para ensino e aprendizagem, que une álgebra, geometria e cálculo. Ele foi desenvolvido por Markus Hohenwarter e uma equipe internacional de programadores para ser utilizado em ambiente de sala de aula. O GeoGebra é um *software* livre, distribuído sob General Public License (GPL) e disponível gratuitamente no site www.geogebra.org, podendo ser acessado ou baixado em qualquer computador ou celular.

O uso do GeoGebra em sala de aula proporciona ao professor, por meio de várias atividades, criar um ambiente mais propício para a aprendizagem de Matemática (LIEBAN; MULLER, 2012). Assim, o *software* pode ser utilizado como instrumento para auxiliar o ensino dos termos matemáticos abstratos e, também, é uma possibilidade de aumentar o interesse e a motivação do estudante em relação à Matemática.

O GeoGebra fornece três diferentes vistas dos objetos matemáticos: a zona gráfica, a zona algébrica (ou numérica) e a folha de cálculos. Elas permitem mostrar os objetos matemáticos em três diferentes representações: graficamente (pontos, linhas, todas as seções cônicas e gráficos de funções); algebricamente (coordenadas de pontos e equações) e nas células da folha de cálculo. Assim, todas as representações do mesmo objeto estão ligadas dinamicamente e adaptam-se automaticamente às mudanças realizadas em qualquer uma delas, independentemente da forma como esses objetos foram inicialmente criados.

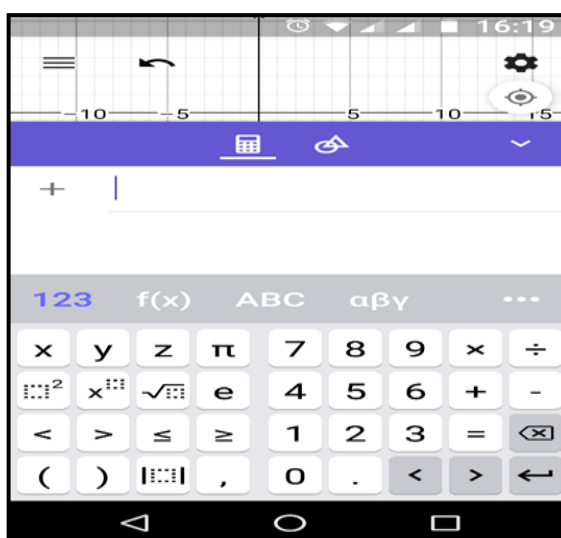
A possibilidade de visualização em uma única janela das três representações é de extrema relevância, pois um grande número de estudantes apresenta dificuldades no aprendizado da Geometria e Funções, o que se deve, em parte, à dificuldade de visualizar conceitos e propriedades. Portanto, a interface gráfica do GeoGebra (Figs. 2.1 e 2.2) é um recurso muito poderoso, tendo em vista que proporciona um trabalho no campo algébrico e também geométrico numa mesma janela de visualização, permitindo, assim, muitas interpretações e conclusões.

Figura 2.1 – Ilustração da janela do aplicativo GeoGebra *Classic 5* para computadores



Fonte: Acervo pessoal do autor.

Figura 2.2 – Ilustração da janela do aplicativo Calculadora Gráfica GeoGebra para celulares



Fonte: Acervo pessoal do autor.

No GeoGebra, o estudante, mediante os recursos de animação, pode construir, mover e observar de vários ângulos as figuras geométricas e os gráficos, sendo que os invariantes que aí aparecem correspondem às propriedades geométricas e também das funções (REZENDE, PESCO, BORTOLOSSI, 2012). Outros aspectos positivos que influenciaram na escolha do referido *software* foram os seguintes:

possuir vários tutoriais, guias de utilização, ser de fácil manipulação e entendimento, ter uma versão em português e uma interface gráfica intuitiva.

2.5 EXPERIMENTO/PROTOTIPAGEM COMO ATIVIDADE PRÁTICA DEMONSTRATIVA-INVESTIGATIVA

Neste tópico, aborda-se a importância do uso de experimentos/prototipagem como uma prática de atividade demonstrativa-investigativa para a compreensão e entendimento de propriedades e conceitos matemáticos, contextualizada na Física e na Astronomia. Assim, neste trabalho, entende-se prototipagem como o desenvolvimento ou criação de protótipos, modelos iniciais de alguma coisa que podem ser, posteriormente, usados como padrão.

As dificuldades de aprendizagem em matemática não são problemas recentes, de modo que, durante vários anos, estas vêm sendo diagnosticadas, fazendo com que pesquisadores da área de ensino as reconheçam e tentem desvendar o que está envolvido nessa difícil problemática do ensino. Pode-se destacar que a utilização de experimentos em sala de aula reduz a dificuldade de aprendizagem do conteúdo de Matemática, pois, além de ser uma excelente metodologia, também possibilita aos alunos testarem hipóteses, esboçarem conjecturas e criarem estratégias para resolver problemas (BRASIL, 2006). As atividades experimentais são importantes estratégias didáticas que contribuem para o ensino e a aprendizagem, contanto que não sejam compreendidas como simplesmente disponibilizar o experimento para ser utilizado em sala de aula. As mesmas devem trazer um significado às teorias que forem abordadas, tornando-as compreensíveis, não para serem apenas comprovadas, mas para serem estudadas, compreendidas e discutidas (SILVA, 2001).

A utilização de experimentos demonstrativos-investigativos representa uma estratégia que coloca os estudantes como protagonistas no processo de construção do conhecimento, tornando o professor mediador ou facilitador desse processo. Essas atividades experimentais podem proporcionar aos estudantes uma aprendizagem significativa, por meio da melhor compreensão da relação teoria-experimento. Ainda incentivam a participação de todos desde a interpretação do problema, feita por meio de diferentes concepções e discussões que proporcionam as formulações das

hipóteses e a elaboração dos conceitos baseados nos conteúdos abordados (SANTOS; MALDANER, 2010). Sendo assim, os Parâmetros Curriculares Nacionais também expressam a importância da experimentação, ao afirmarem que:

Para o aprendizado científico, matemático e tecnológico, a experimentação, seja ela de demonstração, seja de observação e manipulação de situações e equipamentos do cotidiano do aluno e até mesmo laboratorial, propriamente dita, é distinta daquela conduzida para a descoberta científica e é particularmente importante quando permite ao estudante diferentes e concomitantes formas de percepção qualitativa e quantitativa, de manuseio, observação, confronto, dúvida e de construção conceitual (BRASIL, 1999, p. 266).

Portanto, tendo em vista uma perspectiva interdisciplinar, a utilização de experimentos/prototipagem possibilita aos estudantes ressignificar a aprendizagem, formular novos conceitos e, também, compreender e reconhecer a natureza do conhecimento científico como uma atividade humana.

Acreditando nessa perspectiva interdisciplinar, propõe-se a utilização de experimento/prototipagem didático de Física usando conceitos de Astronomia no contexto do ensino de funções, na Matemática.

2.6 OFICINAS PEDAGÓGICAS

Nesta seção serão abordados aspectos sobre o uso de oficinas pedagógicas no ensino, as oficinas pedagógicas no contexto da Matemática e também as oficinas pedagógicas nas Ciências Naturais.

2.6.1 USO DE OFICINAS PEDAGÓGICAS NO ENSINO

As oficinas pedagógicas trazem consigo diversas estratégias de ensino e também de aprendizado, e por meio das suas aplicações pode-se desenvolver formas de aquisição e produção de conhecimento, mediante o processo de interação ativa e reflexiva entre os indivíduos (PAVIANI; FONTANA 2009, p. 78). Neste processo, o

papel do professor é redimensionado, e cada vez mais ele se tornará um incentivador, um orientador, um marco significativo para os seus estudantes no processo de aquisição e compreensão do conhecimento.

Ao trabalhar com oficina pedagógica na sala de aula, deve-se incorporá-la dentro dos pressupostos das teorias que solicitam dos educadores interação, interatividade e construção de conhecimentos que estejam associados à realidade de cada aluno, de modo a poder contribuir para o processo de aprendizagem coletiva e cooperativa. Mas para isso exige-se, no mínimo, tempo de estudo e desejo de aprender. Sem essas condições, a aplicação da oficina pedagógica até pode estar presente na sala de aula, porém não produzirá uma abordagem que contenha elementos mediadores da compreensão da realidade. A perspectiva é que a oficina pedagógica promova uma análise da realidade dos estudantes sem perder de vista o conteúdo a ser abordado, além de permitir a troca de experiências, em que o saber não se constitui apenas como o resultado final, mas sim perpassa todo o processo de aprendizagem.

2.6.2 OFICINAS PEDAGÓGICAS NO CONTEXTO DA MATEMÁTICA

A Matemática está inserida na vida cotidiana em diferentes momentos, e noções básicas como o reconhecimento das formas geométricas, quantidade, espaço e localização são aprendidos antes mesmo do ingresso na escola. Então, compreendendo a relevância do ensino da matemática durante todas as séries do período escolar, é essencial que os educadores utilizem metodologias diferenciadas para despertar e também manter o interesse dos estudantes sobre os conteúdos abordados. Neste aspecto, a utilização de oficina pedagógica se apresenta como uma excelente estratégia metodológica para sair da rotina das aulas expositivas, diversificando, assim, as metodologias de ensino/aprendizagem.

A abordagem metodológica dos conteúdos matemáticos por meio de oficinas pedagógicas pode proporcionar significativa melhoria nas aprendizagens dos estudantes, pois possibilita a interação do estudante com o objeto de estudo, em um processo ativo na busca e construção do conhecimento. Neste sentido, é necessário

que o professor elabore, de forma contextualizada, atividades criativas e dinâmicas, adequando-as aos variados procedimentos metodológicos que estimulem a participação dos estudantes, a interação entre eles, o debate, e que realmente promovam a construção do conhecimento, por meio da própria ação de fazer.

2.6.3 OFICINAS PEDAGÓGICAS NAS CIÊNCIAS NATURAIS

A prática pedagógica em ciências requer momentos de reflexão, nos quais os professores possam atualizar-se, buscando novas metodologias e formas para desenvolver pesquisas, organizar os momentos coletivos e individuais e avaliar o decurso de aprendizagem dos estudantes. Cabe ainda ressaltar que as Ciências Naturais devem desenvolver, no estudante, competências e saberes que possibilitem a compreensão do mundo e atuação do mesmo como indivíduo e cidadão, a partir da utilização de conhecimentos científicos e tecnológicos (BRASIL, 1998, p. 32).

Para lidar com esta realidade, propõe-se pensar as oficinas pedagógicas no contexto de atividades práticas como um importante elemento para a compreensão ativa dos conceitos científicos, pois os estudantes podem estabelecer uma relação mais significativa com o objeto de estudo/conhecimento, tornando, assim, a aprendizagem dos estudantes mais significativa.

2.7 A ASTRONOMIA NO ENSINO MÉDIO

O ato de olhar o céu acompanha a humanidade desde a aurora do homem. Olhar o céu é contemplar a maior expressão da criação, despertando em cada um o fascínio pelo infinito, pelo desconhecido. Não importa o que prende a atenção, se as dimensões, se as cores, se o brilho ou as formas esculpidas pela imaginação do homem em seu processo de conhecimento do cosmos. Rendemo-nos sempre a uma “olhadinha” para o céu. É desta forma que todos somos inseridos, ainda que por um breve instante, no universo da Astronomia. Neves (1986) argumenta:

O estudo da astronomia deveria começar nas séries iniciais pela observação de fenômenos reais como o nascer e o pôr do Sol, a variação do tamanho

das sombras no decorrer do dia, as fases da Lua, e ir amadurecendo de forma gradativa. Tal procedimento se estenderia até a oitava série, onde seria possível desenvolver pequenas observações quantitativas, atingindo o seu ápice com a chegada desse aluno ao ensino médio, onde todos os fenômenos por ele observados seriam modelados matematicamente com base nas leis da Física, Química e demais ramos do conhecimento humano (NEVES, 1986, p. 26).

A Astronomia foi inserida gradualmente nas disciplinas que compõem o Ensino Médio, como na Física, ao se abordar a óptica ou a relatividade; na Biologia, ao se debater sobre a vida no planeta e a possibilidade dela fora da Terra; na Química, ao se estudar a formação de elementos químicos pesados no ciclo de vida de uma estrela; ou, ainda, na Matemática, quando as funções trigonométricas podem ser associadas ao movimento aparente do Sol durante o período de um dia, um mês ou um ano. Apesar disso, nem sempre todos os conteúdos de Astronomia fundamental são trabalhados durante a educação formal. Consta-se que grande parte dos estudantes da rede pública de ensino deixam o ciclo básico de estudos sem conhecimento de assuntos de Astronomia que são pertinentes à sua formação (BRETONES, 1999; MALUF, 2000).

O ensino de Astronomia é um importante recurso, pois, além de apresentar uma forte interdisciplinaridade com outras ciências – por exemplo, com a Matemática –, desenvolve o raciocínio lógico, noções sobre os sistemas de localização, escalas numéricas enormes e pequenas ao mesmo tempo. Ademais, vem sendo de fundamental importância para uma formação minimamente aceitável do indivíduo e cidadão, profundamente dependente da ciência e das tecnologias atuais (OLIVEIRA, 1997).

No PCNE, a Astronomia ganha espaço com o tema estruturador Universo, Terra e Vida, transcendendo o tradicional conteúdo Gravitação, objetivando propiciar aos alunos:

[...] uma visão cosmológica das ciências que lhes permita situarem-se na escala de tempo do Universo, apresentando-lhes os instrumentos para acompanhar e admirar, por exemplo, as conquistas espaciais, as notícias sobre as novas descobertas do telescópio espacial Hubble, indagar sobre a origem do Universo ou o mundo fascinante das estrelas e as condições para a existência da vida como a entendemos no planeta Terra (BRASIL, 2002, p. 78).

Entretanto, à margem dessas orientações, nas primeiras séries do ensino fundamental a grande maioria dos livros didáticos de Ciências aborda temas como fases da Lua, eclipses da Lua e do Sol. Embora a Astronomia seja abordada na maioria das coleções, seu destaque ainda é distante de temas que propõem observação direta do céu ou, ainda, que objetivam a construção de uma visão de Universo (LEITE; HOSOUME, 2007).

A interação permanente entre Astronomia e Matemática pode ser aproveitada para tentar ultrapassar as dificuldades que a maioria dos alunos experimenta, quer na compreensão dos conceitos matemáticos, quer na sua aplicação à realidade, aproveitando também o fato de a Astronomia, por si só, ser bastante motivadora pela curiosidade que desperta nas pessoas. Trata-se de uma ciência que, partindo do que observa (MOURÃO,1997), tenta chegar a uma interpretação coerente com suas observações, estabelecendo teorias, quantificando e relacionando grandezas por meio de ferramentas matemáticas como a geometria, as funções, entre outras, permitindo uma relação de causa e efeito, investigando o passado, conhecendo o presente e perspectivando o futuro. Por isso, a Astronomia não cabe como um mero acréscimo de conteúdos a serem tratados em aula. Ela oferece alternativas às formas de abordar mesmo outros temas e pode promover ricos debates sobre a história e a filosofia das ciências.

2.8 MOVIMENTO DE OBJETOS ASTRONÔMICOS EM TORNO DE UM BURACO NEGRO

Segundo (FRANCHI, DOS REIS e BORGES NETO, 2013), a ideia de um corpo tão massivo que nem a luz poderia escapar foi brevemente proposta pelo pioneiro astronômico e clérigo inglês John Michell em uma carta publicada em novembro de 1784. Os cálculos simplistas de Michell supunham que esse corpo pudesse ter a mesma densidade que o Sol e concluiu que esse corpo se formaria quando o diâmetro de uma estrela excedesse o do Sol por um fator de 500 e a velocidade de escape da superfície fosse superior a velocidade usual da luz. Michell observou corretamente que esses corpos supermassivos, mas não irradiantes, podem ser detectados por

seus efeitos gravitacionais em corpos visíveis próximos. Esses objetos são os chamados atualmente de buracos negros, pois são vácuos escuros no espaço.

Provavelmente, grande parte das galáxias possui no seu centro um buraco negro supermassivo. Esse tipo de buraco negro possui uma massa na ordem dos milhões ou mesmo bilhões de massas solares que estão situadas no centro das galáxias e teriam surgido quando o Universo era bem mais jovem. No caso da Via Láctea, Sagittarius A – designação que se dá a uma fonte de ondas de rádio bastante intensa que está localizada no centro da nossa galáxia e na origem dessa fonte de rádio, está, provavelmente, um buraco negro supermassivo – o qual se situa a cerca de 26.000 anos-luz do Planeta Terra. A massa deste buraco negro não é conhecida com precisão. Porém, existem estimativas que apontam para que seja equivalente a 4 milhões de massas solares, enquanto, por outro lado, há quem defenda que chegue próximo a 1 milhão de massas solares. Por causa dessa característica, a força gravitacional dos buracos negros fica concentrada de maneira absurda, a tal ponto que nem a luz, a energia mais rápida que existe, pode escapar de sua superfície. Ainda mais grave é a situação das estrelas muito próximas: elas tendem a ser, simplesmente, destruídas pelo buraco negro. Depois disso, sua matéria seria engolida por ele, gerando a energia luminosa que se vê no centro galáctico.

Os buracos negros não “se alimentam” de tudo que está a sua volta, no entanto, o seu campo gravitacional pode prender estrelas e planetas longínquos em órbitas que descrevem curvas conhecidas como cônicas ou seções cônicas (Fig.2.3). Para que algo seja, de fato, “engolido” para o interior de um buraco negro sem qualquer chance de fuga, é necessário que se estabeleça uma distância mínima ao seu centro, chamada horizonte de eventos. A essa distância, a velocidade de escape, ou seja, a mínima velocidade para se escapar de um buraco negro é maior que a própria velocidade da luz.

Figura 2.3 – Simulação das órbitas de um grupo apertado de estrelas próximo ao buraco negro supermassivo no coração da Via Láctea



Fonte: ESO < <https://www.eso.org/public/videos/eso1825f/> >

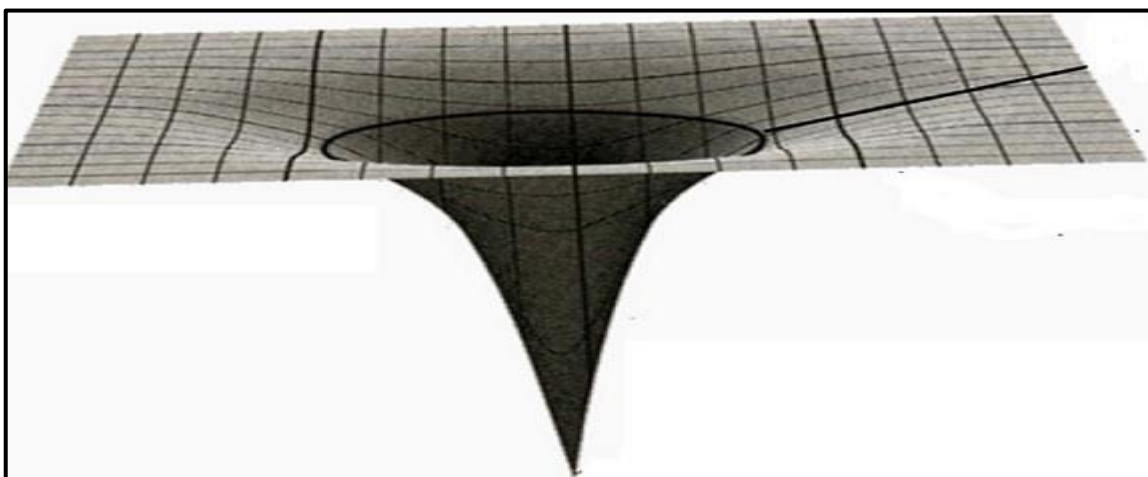
Crédito: ESO/L. Calçada/spaceengine.org

2.8.1 BURACO NEGRO E FORÇA GRAVITACIONAL

Em relação às forças gravitacionais, é possível classificá-las em dois tipos: forças de contato e forças de ação à distância. Forças de contato são aquelas que necessitam de contato para atuarem sobre determinado corpo. Pode-se citar, por exemplo, a força de atrito. Se não houver contato entre dois corpos, não haverá atrito. Os sujeitos também estão acostumados a empurrar objetos com as mãos. Se não tocam nos objetos, não conseguirão movê-los. Quanto às forças de ação à distância, são aquelas que não necessitam de contato para atuarem sobre determinado corpo. Entre elas estão a força gravitacional, a força elétrica e a força magnética. Em relação à primeira, quando um corpo cai em queda livre em direção à Terra, sabe-se que existe uma força puxando-o para baixo. No entanto, não existe contato entre o planeta e o corpo até o instante em que este toque o solo – por isso chama-se a força gravitacional de força de ação à distância.

É muito útil introduzir o conceito de campo quando se estuda forças de ação à distância. Em física, campo é uma região de influência ou uma região onde atua determinada força. Pode-se dizer que a Terra possui, à sua volta, um campo gravitacional. Todo campo gravitacional é sempre atrativo e diminui de intensidade à medida que aumenta a distância entre os corpos. Dessa forma, ao invés de pensar na atração gravitacional como força de ação mútua, trabalha-se com o conceito de campo gravitacional (Fig.2.4) existente ao redor de um determinado corpo. Para melhor compreensão, pode-se imaginar que o universo é bidimensional. Supõe-se, então, que o universo é um lençol esticado. Colocando-se uma esfera de aço no centro do lençol, ela provocará uma deformação, como na figura 2.5. Qualquer outro corpo que seja colocado na proximidade do buraco criado pela esfera, ou seja, na região de influência, cairá em direção a ela. Corpos que estejam mais longe não sentirão a deformação do lençol e não serão atraídos, pois estarão fora do campo gerado pela esfera.

Figura 2.4 – Esquema ilustrativo de um campo gravitacional



Fonte: Adaptação: <https://odiferencialdafisica.files.wordpress.com/2015/08/singularidade.jpg>

Figura 2.5 – Ilustração da deformação sofrida pelo lençol



Fonte: Acervo pessoal do autor.

A figura do lençol² é bastante útil para a visualização de um campo gravitacional. No entanto, normalmente, utiliza-se outra representação de campo, que consiste em linhas indicando a orientação da força. Como o campo gravitacional é sempre atrativo, as linhas devem apontar para o centro do corpo, na região próxima da superfície. Sabe-se que o campo é mais intenso e isto está representado pela proximidade das linhas – quanto mais próximas entre si estiverem as linhas, mais intenso será o campo. Num ponto afastado da superfície, as linhas estão muito distantes umas das outras, indicando que o campo é menos intenso.

Diante disso, utiliza-se a representação de prototipagem (experimento/prototipagens) para o ensino de funções em matemática, contextualizada na Astronomia, sendo alguns exemplos os poços gravitacionais encontrados em alguns museus (Fig.2.6), ilustrando a deformação do campo gravitacional produzido por um corpo massivo deformando o espaço-tempo ao seu redor.

² Essa é uma maneira de tentar imaginar a curvatura do espaço devido à gravitação. Contudo, esta visualização não está correta, pois ela ainda faz uma analogia com uma superfície bidimensional para o universo quadridimensional (MAIA, 2009).

Figura 2.6 – Poços gravitacionais



Fontes: Poço gravitacional (Museu da PUC/RS) <https://www.youtube.com/watch?v=kcQygMxB3y8>
 Poço Gravitacional – Gramado <https://www.youtube.com/watch?v=KRIm0YpXuRM>

2.9 ÓRBITAS E LEIS DE KEPLER E NEWTON

As órbitas de corpos celestes é a trajetória que um corpo percorre ao redor de outro sob a influência da Força Gravitacional. Segundo as leis do movimento planetário de Johannes Kepler (1571-1630), que se apoiou nas observações meticulosas de Tycho Brahe (1546-1601), as órbitas são aproximadamente elípticas, embora os planetas próximos ao Sol ao redor do qual orbitam tenham órbitas quase circulares. Mais tarde, Isaac Newton (1643 – 1727) demonstrou que algumas órbitas, como as de certos cometas, são hiperbólicas e outras parabólicas. Assim, serão abordadas a Lei das Órbitas, a Segunda Lei de Newton e, também, a Lei da Gravitação Universal. Será mostrado como, a partir da lei da gravitação universal de Newton, é possível inferir a primeira lei de Kepler sobre o movimento planetário.

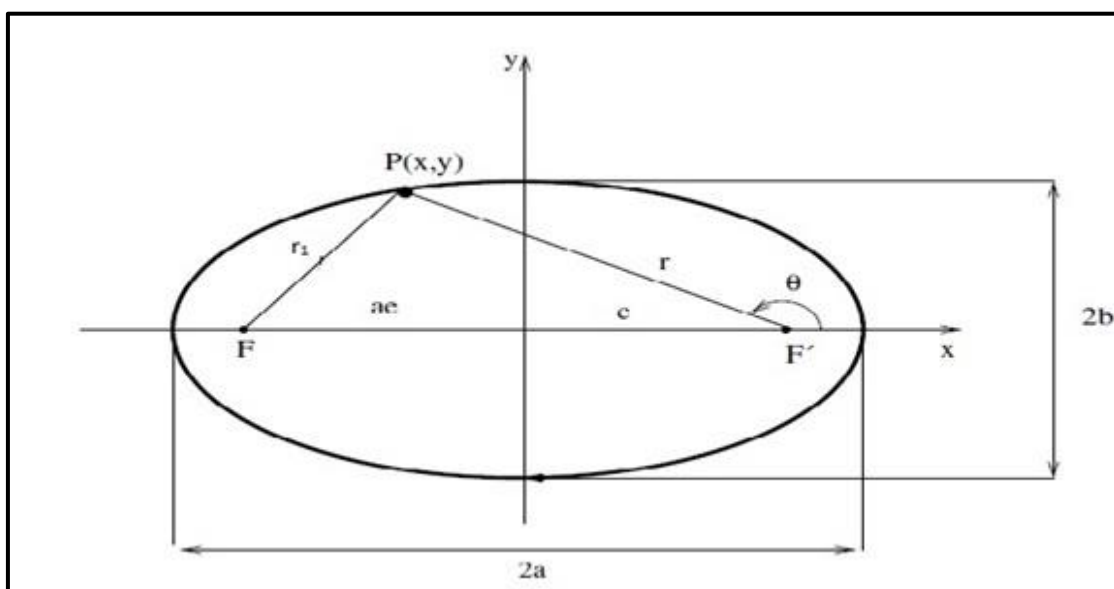
Lei da Órbitas (1ª Lei de Kepler)

Kepler teorizou, a partir de suas observações e de outros cientistas, que:

- ✓ Primeira Lei – o movimento descrito por um planeta em torno do Sol era uma órbita elíptica.

Definição de Elipse - Uma elipse é, por definição, um conjunto de pontos equidistantes de dois focos (F_1 e F_2) separados por $2ae$, onde a é o semieixo maior e e a excentricidade (Fig.2.7).

Figura 2.7 – Elipse



Fonte: Fonte: FILHO, Kepler de Souza O.; SARAIVA, Maria de Fatima Oliveira, p.78.

Dado um ponto $P(x,y)$ ou $P(r,\theta)$ sobre a elipse, então, usando a lei dos cossenos, temos :

$$r_1^2 = r^2 + (2ae)^2 - 2r(2ae) \cos(180^\circ - \theta)$$

$$r_1^2 = r^2 + (2ae)^2 + 2r(2ae) \cos \theta$$

Por definição de elipse,

$$r + r_1 = 2a$$

ou seja:

$$r_1 = 2a - r$$

$$(2a - r)^2 = r^2 + 4a^2e^2 + 4rae \cos \theta$$

$$4a^2 + r^2 - 4ar = r^2 + 4a^2e^2 + 4rae \cos \theta$$

$$a^2(1 - e^2) = ar(1 + e \cos \theta)$$

e finalmente:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{(1 + e \cos \theta)} \quad (2.1),$$

que afirma-se ser a equação polar de uma elipse (equação geral da órbita) com excentricidade e .

A equação (1) descreve mais do que a órbita de um planeta em torno do Sol; descreve um conjunto de curvas que recebe o nome de cônicas. As cônicas são caracterizadas pelo valor da excentricidade e se dividem em quatro famílias distintas: elipses, círculos, parábolas e hipérbolas; a depender dos valores da excentricidade conforme mostrado na Tab.2.1, a seguir:

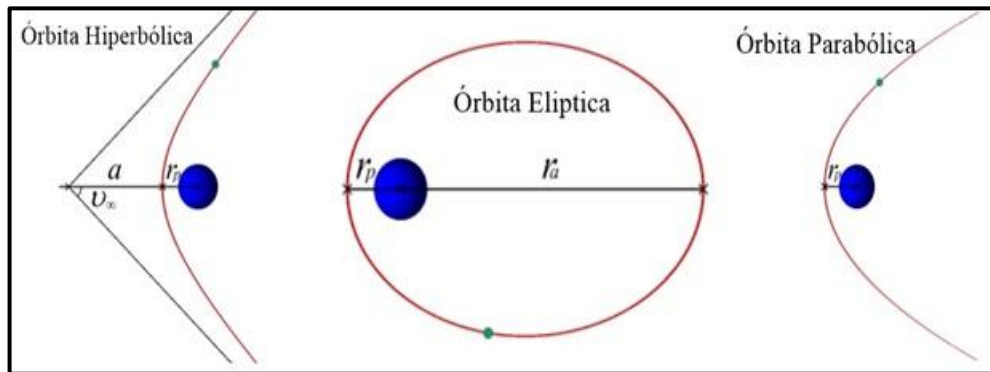
Tabela 2.1 – Excentricidade e Trajetória

Excentricidade (e)	Trajetória
$e = 0$	Circular
$0 < e < 1$	Elíptica
$e = 1$	Parabólica
$e > 1$	Hiperbólica

Fonte: Fonte: FILHO; SARAIVA, 2014, p.79.

Nesse caso, pode-se considerar uma órbita elíptica quando um corpo está preso ao outro pela atração gravitacional e órbita hiperbólica quando os corpos não estão presos e, com o passar do tempo, afastam-se indefinidamente (Fig.2.8). Pode-se citar como exemplos: alguns cometas e asteroides têm órbitas hiperbólicas, o que significa que eles não estão presos ao sistema solar.

Figura 2.8 – Classificação das Órbitas



Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/%C3%93rbita>.

Lei da Gravitação Universal

A demonstração da Primeira Lei de Kepler só ocorreu com Isaac Newton (1642 -1727), ao conceber a força da gravidade como principal responsável pelo formato da órbita. Dessa forma, fez com que a Lei da Gravitação Universal e a Segunda Lei do Movimento estivessem presentes nessa dedução.

A lei da gravitação universal (2), que relaciona a força entre duas massas M e m , separadas por \vec{r} e a constante gravitacional universal G , derivada por Newton, é dada por:

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r} \quad (2.2)$$

Aqui, será utilizada a seguinte nomenclatura:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \vec{v} \equiv \dot{\vec{r}}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \equiv \vec{a} \equiv \ddot{\vec{r}}$$

Será mostrado que, a partir da lei da gravitação de Newton, pode-se derivar as leis de Kepler (cf. HALLIDAY; RENISCK, 2009). Aplicando-se a lei da gravitação e a segunda lei do movimento:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (2.3)$$

tem-se:

$$\vec{F} = m\vec{a} = -GMm \frac{\hat{r}}{r^2} \quad (2.4)$$

Cancelando a massa m de ambos os lados da equação e escrevendo $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$ em coordenadas polares, pois a análise temporal de uma órbita não tem tanta informação quanto a descrição do movimento no plano orbital (do ponto de vista geométrico), obtém-se a seguinte equação vetorial (cf. FIGUEIREDO; NEVES, 2002):

$$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} = -\left(\frac{GM}{r^2}\right)\hat{r} \quad (2.5)$$

Originando duas equações escalares de movimento:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\left(\frac{GM}{r^2}\right) \quad (2.6)$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \quad (2.7)$$

Eliminando $\dot{\theta}$ em (5) por meio de (6) pela relação $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}$ (L - momento angular), obtém-se:

$$\ddot{r} - \frac{L^2}{m^2 r^3} = -\left(\frac{GM}{r^2}\right) \quad (2.8)$$

Tal equação diferencial de r em função t pode ser modificada de modo que r seja uma função de θ modificando a segunda derivada temporal por meio da regra da cadeia (cf. FIGUEIREDO; NEVES, 2002), resultando, então, a equação para a função $r(\theta)$:

$$\frac{L^2}{m^2 r^4} \frac{d^2 r}{d\theta^2} - \frac{2L^2}{m^2 r^5} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - \frac{L^2}{m^2 r^3} = -\left(\frac{GM}{r^2}\right) \quad (2.9)$$

Para resolver (7), define-se a função $u \equiv \frac{1}{r(\theta)}$ e, conseqüentemente, suas derivadas em relação a θ . Assim, será obtida a equação do oscilador harmônico (cf. HALLIDAY; RESNICK, 2009):

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GMm^2}{L^2} \quad (2.10)$$

Cuja solução geral pode ser escrita como:

$$u(\theta) = \frac{GMm^2}{L^2} + A \cos(\theta - \delta) \quad (2.11)$$

Em que A e δ são constantes arbitrárias. É conveniente escrever $A = \frac{GMm^2}{L^2} e$, em que (e) é a nova constante, denominada excentricidade. Assim,

$$r(\theta) = \frac{L^2}{GMm^2} \frac{1}{1 + e \cos(\theta - \delta)} \quad (2.12)$$

Observando a equação (12), nota-se que é a mesma equação da trajetória mostrada na equação (1). Com isso, Newton demonstrou que as órbitas planetárias têm a forma de elipses, com o Sol em um dos focos, tal como fora observado por Kepler. Ele também mostrou que trajetórias parabólicas e elípticas são possíveis, correspondendo a movimentos que não ficam limitados a uma região finita em torno do Sol.

O problema das órbitas num campo de forças gravitacionais também pode ser resolvido a partir da conservação da energia e da conservação do momento angular (cf. MARQUES, 2012).

Vamos utilizar a seguinte nomenclatura:

$$v = \frac{dr}{dt} = \dot{r}$$

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}, \text{ onde } L \text{ é o momento angular.}$$

$$U(r) = -\frac{mMG}{r} \text{ é a energia potencial.}$$

$$K = \frac{m}{2}v^2 \text{ é a energia cinética.}$$

A conservação da energia implica que, ao longo do movimento, tem-se a seguinte identidade:

$$E = K + U(r) \quad (2.13)$$

ou

$$E = \frac{m}{2}v^2 - \frac{mMG}{r}, \text{ que em coordenadas polares é}$$

expressa por:

$$E = \frac{m}{2} \left(\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) - \frac{mMG}{r} \quad (2.14)$$

Utilizando, aqui, a conservação do momento angular, a energia se escreve agora como função apenas da derivada de r com respeito ao tempo e da própria variável r . Obtém-se explicitamente:

$$E = \frac{m}{2} \left(\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2} \right) - \frac{mMG}{r} \quad (2.15)$$

Pode-se agora interpretar a igualdade acima como uma equação diferencial para a variável r . A solução dessa equação diferencial levará a uma das curvas conhecidas como cônicas ou secções cônicas. O tipo de cônica dependerá da energia da partícula. A órbita em qualquer caso dependerá dos valores da energia e do momento angular. Levando-se em conta que a energia mecânica e o momento angular são conservados, pode-se escrever:

$$E = \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{mMG}{r} \quad (2.16)$$

Investigando a solução de (11) por meio da conservação de energia, tem-se:

$$\frac{dr}{\sqrt{\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{mMG}{r}\right)}} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} dt \quad (2.17)$$

Utilizando a relação dada por $\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}$, tem-se que:

$$\frac{-d\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{mMG}{r}\right)}} = + \sqrt{\frac{L^2}{2m}} d\theta \quad (2.18)$$

Fazendo agora outra mudança de variáveis, ou seja, definindo a variável $u = 1/r$ e integrando membro a membro a expressão acima, obtém-se a solução para órbita a partir de uma integral. Tal integral é:

$$\theta = \theta_0 - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{2m^2MG}{L^2}u - u^2}} \quad (2.19)$$

Assim, a solução para a órbita é:

$$\theta = \theta_0 - \arccos \frac{\frac{L^2 u}{m^2 MG} - 1}{\left(\sqrt{1 + \frac{2E^2 L^2}{m^3 M^2 G^2}}\right)} \quad (2.20)$$

A qual, escrita em termos da variável r , assume a forma da equação descrevendo uma cônica. Isto é:

$$r = \frac{L^2}{m^2 MG} \cdot \frac{1}{\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m^3 M^2 G^2}} \cos(\theta - \theta_0)\right)} \quad (2.21)$$

Donde inferimos que a excentricidade depende de uma forma simples do sinal da energia.

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m^3M^2G^2}} \quad (2.22)$$

Então:

- Para energias negativas, mas, tais que

$$E \geq -\frac{m^3M^2G^2}{2L^2} \quad (2.23)$$

a órbita será uma elipse;

- Para energias positivas ($E > 0$), a órbita é uma hipérbole;
- Para energia nula ($E = 0$), a trajetória é uma parábola.

Espiral

Ao trabalhar com o experimento/prototipagem ou poço gravitacional os objetos apresentam decaimento de órbita devido ao atrito. Por isso, a representação que melhor se assemelha a trajetória dos objetos é uma espiral, o que proporciona trabalhar a função exponencial/seno/cosseno.

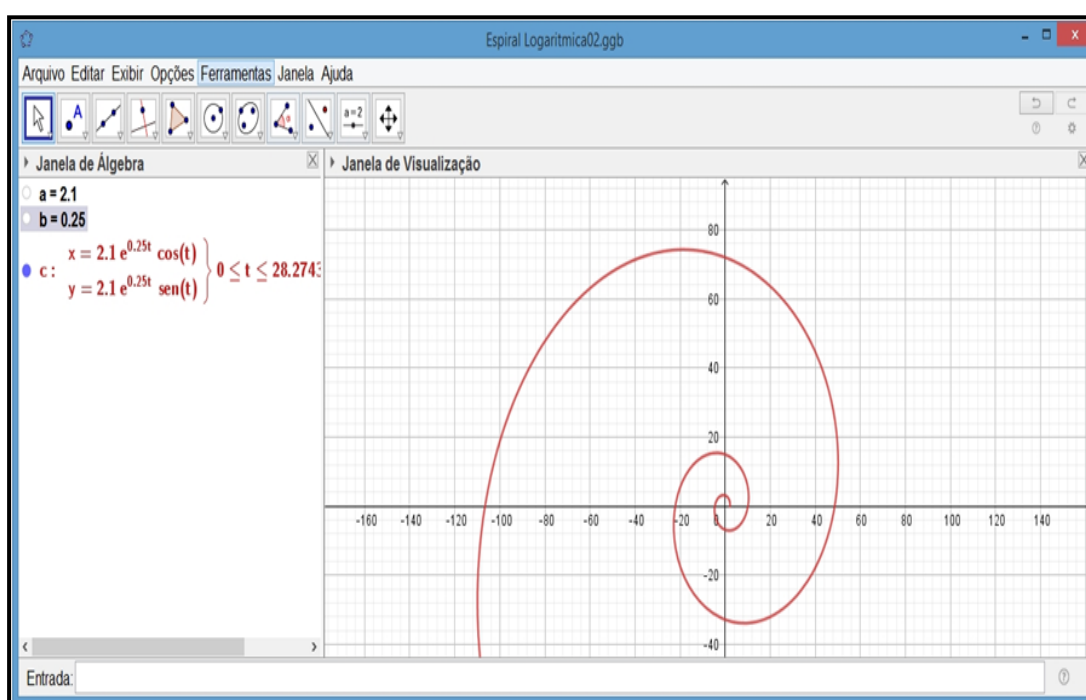
Na matemática, espiral é uma curva plana que gira em torno de um ponto central (chamado polo), dele se afastando ou se aproximando conforme a equação (24). Quando se volta para a direita é chamada de dextrogira e, para a esquerda, de sinistrogira ou levogira.

Uma espiral bidimensional pode ser descrita usando coordenadas polares dizendo que o raio r é uma função contínua e monotônica do ângulo, a qual resulta de sua expressão analítica nas coordenadas polares r e θ :

$$r(\theta) = Re^{\beta \cos \theta} \quad (2.24)$$

onde R é o raio associado ao valor de $\theta = 0$. Esta expressão apresenta a distância à origem O , de um ponto da curva em função de θ . Por meio desta equação, vê-se que a parte da curva que corresponde aos valores positivos de θ (de 0 até 2π) parte do ponto $A = (0, R)$ (Fig.2.9) e dá um número indeterminado de voltas em torno da origem, aproximando-se ou afastando-se da origem conforme o valor de β . Este caso, sob o ponto de vista físico está associado aos processos de decaimento de órbita, por exemplo, quando β é negativo.

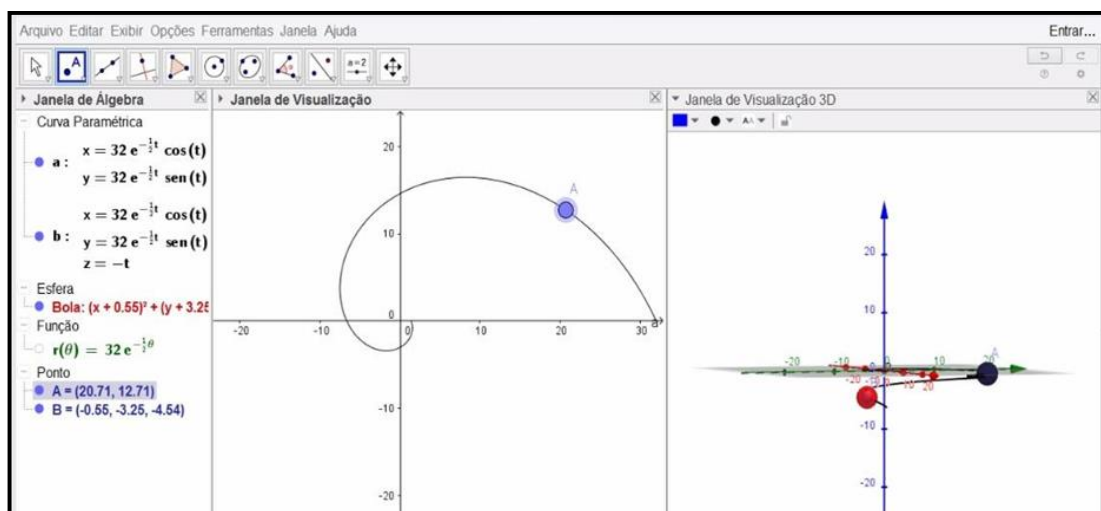
Figura 2.9 – Gráfico de uma espiral logarítmica



Fonte: Acervo pessoal do autor.

Em relação às propriedades, pode-se inferir que: cada linha reta que atravessa o centro da espiral forma, com esta última, sempre o mesmo ângulo; por isso, essa espiral também é conhecida como espiral equiangular. Ao percorrer a espiral por arcos iguais em uma mesma reta radial, a distância ao centro aumenta por meio de uma mesma razão, isto é, seu raio aumenta em uma progressão geométrica (Fig. 2.10).

Figura 2.10 – Função e seus respectivos gráficos gerados no GeoGebra



Fonte: Acervo pessoal do autor.

3 METODOLOGIA

Neste capítulo serão descritos os caminhos metodológicos deste trabalho, abordando a natureza da pesquisa, o seu contexto e desenvolvimento. Serão apresentados, assim, o universo de estudo, o perfil da instituição participante, os sujeitos investigados, bem como a metodologia de estruturação da oficina pedagógica e os instrumentos de coleta de dados utilizados.

3.1 METODOLOGIA DA PESQUISA

Sobre a questão do problema do ensino de funções no Ensino Médio, a proposta tem como objetivos a implementação de estratégias metodológicas para sanar as dificuldades apresentadas por estudantes do 2º ano do Ensino Médio da escola estadual Colégio Modelo Luís Eduardo Magalhães, localizado no município de Feira de Santana - Bahia. Para isso, a abordagem metodológica utilizada teve caráter interpretativo (qualitativo), haja vista que “envolve a obtenção de dados descritivos sobre pessoas, lugares e processos interativos pelo contato direto do pesquisador com a situação estudada, procurando compreender os fenômenos segundo a perspectiva dos sujeitos, ou seja, dos participantes da situação em estudo” (GODOY, 1995, p. 58). No âmbito de uma abordagem interpretativa, a pesquisa buscou analisar criticamente cada significado em cada contexto, conforme observa Moreira (2003):

O pesquisador interpretativo observa participativamente, de dentro do ambiente estudado, imerso no fenômeno de interesse, anotando cuidadosamente tudo o que acontece nesse ambiente, registrando eventos - por meio de fotos e /ou vídeos - coletando documentos tais como trabalhos de alunos, materiais distribuídos pelo professor, ocupa-se não de uma amostra no sentido quantitativo, mas de grupos ou indivíduos em particular, de casos específicos, procurando escrutinar exaustivamente determinada instância tentando descobrir o que há de único nela e o que pode ser generalizado a situações similares (MOREIRA, 2003, p. 50).

Assim como as situações estudadas/analizadas por meio de instrumentos como registro de situações vivenciadas (diálogos, fotografias, gravações de áudios ou vídeos) e trabalhos realizados, de forma que eles

abordem aspectos que auxiliem na pesquisa, pois todos esses resultados coletados são utilizados na validação do trabalho.

O contexto da abordagem didático/pedagógica tem como pano de fundo a ressignificação de práticas pedagógicas (conforme apresentado na Seção 2.3), configurando-se uma dimensão norteadora do trabalho. Então, a ressignificação acontece quando o professor apresenta uma situação ou problema dentro de um contexto atual e, por meio da teoria, consegue provocar o desejo de aprender nos estudantes, elevar a capacidade de compreensão, possibilitando aos mesmos utilizar-se deste conhecimento para: o desenvolvimento intelectual, afetivo, de competências e atitudes, assim como terem a capacidade de produzirem novos conhecimentos (HENGEMÜHLE, 2008, p.23).

Neste trabalho, o uso das TICs dinamizou o processo de ensino-aprendizagem dos educandos, por meio da utilização do *Software GeoGebra*, do ambiente virtual (*Google Classroom*), pois foi possível perceber as opiniões dos estudantes, intervindo, quando necessário, no processo de elaboração do pensamento coletivo. Os estudantes também foram significativamente beneficiados por serem inseridos num projeto de construção colaborativa. Cabe enfatizar que o uso do experimento/prototipagem propõe um significado real a situação/problema, além de possibilitar aos estudantes fazerem observações, interagindo com o experimento poço gravitacional.

3.2 CARACTERIZAÇÃO DO LOCUS DE PESQUISA

A proposta metodológica foi implementada na escola pública Colégio Modelo Luís Eduardo Magalhães, no município de Feira de Santana-BA (Fig.3.1), com estudantes do 2º ano do Ensino Médio. Esta Unidade Escolar foi criada pelo governo do estado para atender à demanda do Ensino Médio da cidade, funcionando nos turnos matutino, vespertino e noturno. Porém, a escola deixou de funcionar no turno noturno. O Colégio possui, em média, 877 alunos matriculados no turno matutino e

816 no turno vespertino, perfazendo um total de 1.693 alunos nos dois turnos, sendo aproximadamente entre 40 e 45 alunos por sala.

Figura 3.1 – Fachada da Unidade Escolar: C. M. Luís Eduardo Magalhães



Fonte: Acervo pessoal do autor.

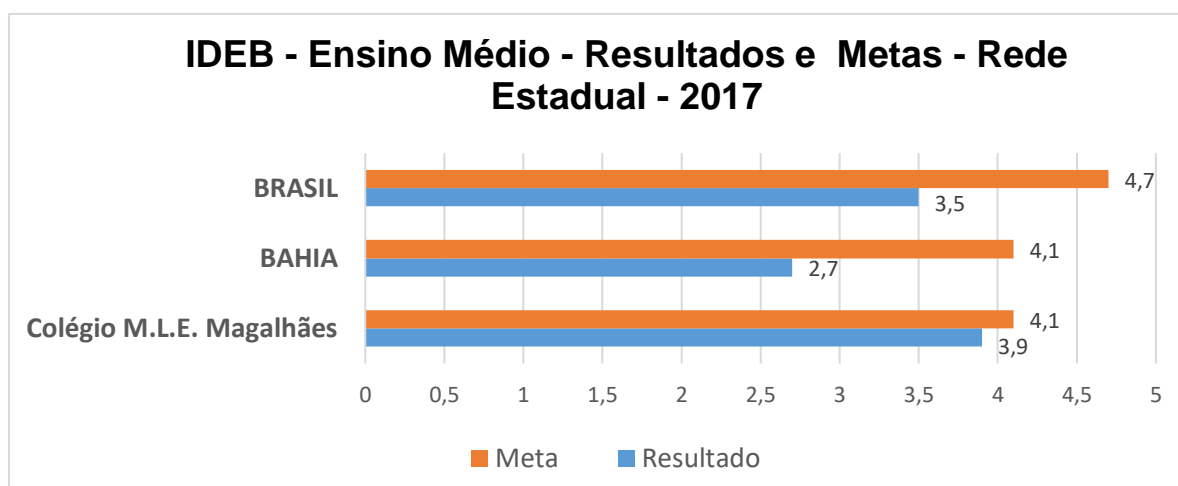
O Colégio Modelo Luís Eduardo Magalhães (C.M.L.E.M) propõe-se a construir e praticar um currículo em que, incorporando as necessidades tecnológicas da civilização contemporânea, busque, também, uma síntese entre humanismo, ciência e tecnologia que implique a superação do paradigma puramente positivista. Além do domínio lógico, o homem também deve construir valores éticos e morais que se impõem à vida, na coexistência do indivíduo com o social. Assim, a escola desenvolve o papel social de promover a apropriação, pelos estudantes, dos saberes historicamente construídos e o desenvolvimento de habilidades e atitudes que favoreçam uma inserção cidadã na vida social e no mundo do trabalho.

O C.M.L.E.M, por ser exclusivo de ensino médio, participa diretamente de três avaliações externas: o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), que apesar da adesão ser individual do aluno, por incentivo da escola e também por ter a

possibilidade de ingresso no ensino superior, a participação é muito expressiva; o SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica) e, também, o Avalie Ensino Médio, Projeto de avaliação externa do desempenho dos estudantes do Ensino Médio da Bahia, que inscreve automaticamente todos os alunos.

A despeito dos problemas encontrados e inerentes às escolas públicas de modo geral, como falta de verbas para as necessidades mais básicas, o C.M.L.E.M representa um diferencial em relação às outras unidades da rede estadual em seus índices (avaliações externas) e na implantação de uma série de projetos e programas estruturantes da rede. Contudo, vale ressaltar que, mesmo com todo o trabalho desenvolvido por todos os seguimentos da unidade escolar (equipe gestora, professores, funcionários, pais e alunos), a escola ainda não alcançou os índices desejados.

Gráfico 3.1 – IDEB do Colégio Modelo Luís Eduardo Magalhães



Fonte: MEC/ Inep (2017).

Tabela 3.2 – ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio

ENEM - Escolas Públicas Estaduais - Feira de Santana			
Ano	Média (Objetivas)	Redação	Posição (Média – Objetivas + Redação)
2016	516	589	1º Lugar
2017	525	589	1º Lugar
2018	541	576	1º Lugar

Fonte: Adaptação <https://blogdoenem.com.br/resultado-enem-feira-de-santana/>

3.3 PERFIL DOS ESTUDANTES

Pelo fato de o Colégio Modelo Luís Eduardo Magalhães está localizado no centro da cidade, a unidade de ensino recebe alunos provenientes de diversos bairros de Feira de Santana e, também, dos municípios circunvizinhos. A localização central e o fácil acesso em termos de transporte são fatores que influenciam na procura por vagas na escola, porém, o que gera uma expressiva demanda é a credibilidade que a comunidade vem depositando no colégio ao longo desses anos, em reconhecimento ao trabalho da comunidade escolar, pautado no compromisso de todos por uma educação pública de qualidade.

Uma turma do 2º ano da unidade escolar foi selecionada para participar do projeto. A turma possui 39 estudantes, sendo a maioria composta por meninas (24). Boa parte dos estudantes é interessada e demonstra uma vontade enorme de aprender; contudo, a turma apresenta dificuldades no que diz respeito ao entendimento, compreensão e aplicação do conceito de funções.

Em relação ao uso da tecnologia, os estudantes utilizam-na em diversos contextos de sua vida, principalmente a internet. Sobre o acesso à internet, de modo geral, costumam acessar em casa por meio do aparelho celular. Verificou-se que a maioria dos alunos tem acesso à internet, mesmo aqueles oriundos de famílias com rendas mais baixas, o que facilitou muito o processo de ensino-aprendizagem, haja vista que possibilita ao aluno fazer uso do *software* GeoGebra, acessar o ambiente virtual (Google Sala de Aula) e, também, desenvolver as atividades do treinamento.

3.4 PLANEJAMENTO DA OFICINA: PROPOSTAS PARA O ENSINO DE FUNÇÕES

A educação vem suscitar um repensar das práticas pedagógicas no espaço de construção do conhecimento como forma de tentar encontrar uma nova direção para o contexto educacional. Então, é necessário repensar, analisar, questionar e redimensionar esse de transmissão de conhecimento. Sabe-se que o processo de ensino e aprendizagem consiste em uma troca de saberes, no qual o professor opera como um intermediador entre os estudantes e o conhecimento. Para tanto, é requerido

o uso de práticas educativas e metodologias ativas que coloquem o estudante na condição de sujeito cognoscente.

A busca por metodologias que promovam o interesse dos estudantes e melhorem a qualidade do ensino deve ser uma das preocupações dos professores de Matemática. Por isso, entende-se que abordar conteúdos por meio de oficinas é uma forma de construir conhecimento, com ênfase na ação, sem perder de vista a base teórica e os conhecimentos matemáticos. Logo, as oficinas pedagógicas são instrumentos poderosos para o aperfeiçoamento didático. A oficina extrapola o estudo da fundamentação teórica e potencializa os sujeitos nas suas capacidades emocionais e intelectuais, possibilitando a produção de bens culturais. Esse procedimento metodológico de trabalho é uma forma de realização do processo ensino-aprendizagem, privilegiando a interação dos sujeitos entre si e com o contexto, bem como o exercício de habilidades. Dentre estas, podem ser destacadas: autonomia, flexibilidade, expressão oral, criatividade, relação inter e intrapessoal e trabalho em grupo, as quais são imprescindíveis aos sujeitos que atuam em diferentes espaços no mundo contemporâneo.

As oficinas também trazem como característica a abertura de espaços de aprendizado que buscam o diálogo entre os participantes. Segundo Vieira e Valquind (2002):

Na oficina surge um novo tipo de comunicação entre professores e alunos. É formada uma equipe de trabalho, onde cada um contribui com sua experiência. O professor é dirigente, mas também aprendiz. (VIEIRA; VALQUIND, 2002, p. 17):

Trata-se de uma situação de aprendizagem aberta e dinâmica, que possibilita a inovação, a troca de experiências e a construção de conhecimentos. Diferentemente de um modelo mais engessado e baseado na mera transmissão de informações, o estudo de um tema em oficinas pedagógicas permite a comparação entre experiências diversificadas, o que propicia uma abordagem reflexiva dos desafios enfrentados pelos sujeitos da educação. Em uma oficina, tem-se a oportunidade de vivenciar situações concretas e significativas, baseadas no tripé sentir-pensar-agir, com objetivos pedagógicos. Nesse sentido, a metodologia da oficina muda o foco tradicional da aprendizagem (cognição), passando a incorporar a ação e a reflexão.

Em outras palavras, em uma oficina ocorrem apropriação, construção e produção de conhecimentos teóricos e práticos, de forma ativa e reflexiva.

O planejamento para a produção e aplicação da oficina se estruturou em três fases distintas, a saber:

1. A fase pré-oficina, que consistiu nos passos e processos organizacionais que precisariam ser levados em consideração antes da realização da mesma;

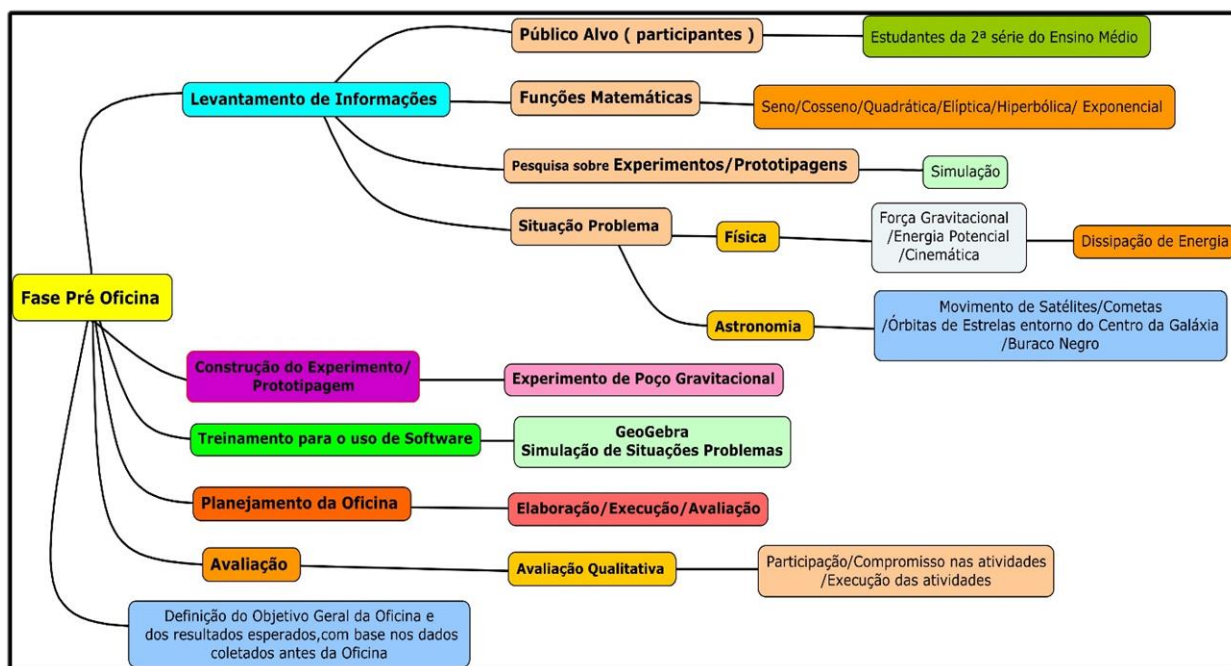
2. A fase durante a oficina, onde foram desenvolvidas as atividades relacionadas ao tema da oficina e as suas inter-relações com os diferentes níveis – individual, grupal e coletivo – que facilitam a aprendizagem, a troca de saberes e articulam o conteúdo, dando embasamento teórico e metodológico;

3. A fase de avaliação após a oficina, na qual foram feitas as medições dos efeitos, do impacto e do grau de aprendizado alcançado na mesma.

3.4.1 FASE PRÉ-OFFICINA

Esta fase, conforme citado anteriormente, esteve concentrada nos passos e processos organizacionais que precisaram ser levados em consideração antes da realização da oficina propriamente dita (Fig.3.2). Esta etapa incluiu: seleção dos participantes; organização do ambiente de aprendizagem; planejamento, incluindo a preparação, organização de recursos e de materiais para distribuição; objetivos; e avaliações.

Figura 3.2 – Esquema da Fase Pré-Oficina



Fonte: Acervo pessoal.

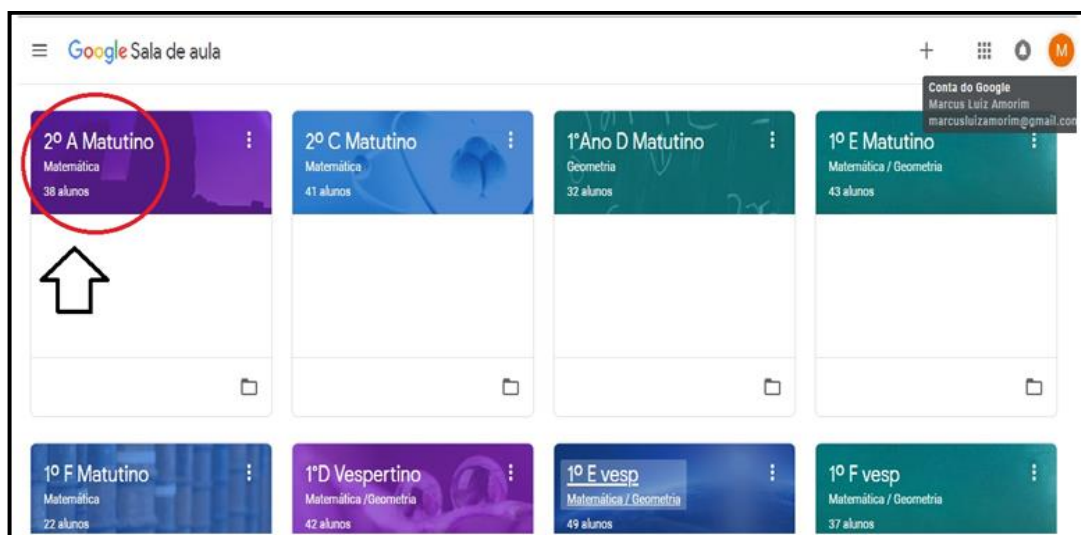
Um aspecto importante do planejamento antes da oficina é a seleção dos participantes. Definir o perfil dos participantes ajudou, também, na escolha de estratégias mais adequadas para o desenvolvimento do tema proposto. Na oficina, os participantes foram os alunos do 2º ano do Ensino Médio do Colégio Modelo Luís Eduardo Magalhães (Feira de Santana - BA).

Em relação à organização do ambiente de aprendizagem, trata-se de um espaço fecundo de significação em que um indivíduo e objetos técnicos interagem, potencializando, assim, a aprendizagem. Na oficina, utiliza-se, além da Sala de Aula, o Google Sala de Aula (*Google Classroom*). O *Google Sala de aula* (Fig.3.3) é um serviço gratuito da *web* para escolas e organizações sem fins lucrativos. Qualquer pessoa com uma conta pessoal do *Google* pode criar um ambiente virtual. No caso dos professores, esse ambiente pode ser utilizado para compartilhar materiais (textos, vídeos e imagens, por exemplo) com os alunos, bem como criar e receber tarefas, além de trocar informações por meio de e-mail e mensagens instantâneas.

O planejamento – referente à preparação e à organização de recursos e materiais para distribuição – foi composto por uma quantidade reduzida de atividades significativas e envolventes, nas quais o participante teve tempo para sensibilizar-se,

provocar, questionar, criar, analisar e sintetizar o conhecimento. Essa definição também ajudou na identificação de todo o material necessário para a execução das atividades, o que permitiu otimizar o tempo.

Figura 3.3 – Imagem das salas virtuais, com destaque para a sala da turma do 2º ano A



Fonte: Acervo pessoal do autor.

A escolha das atividades a serem realizadas também foi muito importante. Uma vez que essa etapa depende de vários fatores, deve-se considerar o contexto em relação a oficina como um todo. Ou seja, teve-se o cuidado de definir bem em que momento a(s) atividade(s) deveria(m) ser realizada(s). Entende-se que as atividades de aprendizado devem refletir um processo participativo e dinâmico. Vale ressaltar, aqui, que nenhum material didático pode, por mais bem elaborado que seja, garantir por si só a qualidade e a efetividade do processo de ensino e aprendizagem. Dessa forma, se um filme for apresentado na oficina, pode ter sua projeção, por vezes, interrompida para fixar cenas, discutir com os alunos e, em seguida, produzir-se um texto avaliativo. Em suma, o material didático deve se integrar em um ciclo mais completo de ensino-aprendizagem.

Dentre outros aspectos importantes na elaboração de uma oficina, ressalta-se: definir prioridades; identificar questões que estão afetando a organização no momento, caso surjam no decorrer da oficina; elaborar as atividades da oficina e definir materiais de apoio para cada tópico; planejar uma variedade de atividades

participativas, como apresentações, experimento/prototipagens, simulações e atividades de resolução de problemas; e decidir como fazer a avaliação reflexiva das atividades e avaliar o aprendizado.

Quadro 3.1 – Subfases do Processo Metodológico

ETAPAS	CONTEUDOS
Levantamento de Informações	Público Alvo
	39 estudantes da 2ª Série do Ensino Médio
	Funções Matemáticas Seno/Cosseno/Quadrática/Elíptica/Hiperbólica/Exponencial
	Situação Problema
	Física Força Gravitacional/ Energia Potencial/Cinemática/ Dissipação de Energia
	Astronomia Movimento de Satélites/Cometas/Órbitas de Estrelas em torno do Centro da Galáxia/Buraco Negro
	Pesquisa sobre Experimento/prototipagens Simulação
Construção do Experimento Prototipagem	Experimento de Poço Gravitacional
Treinamento para o uso de Software	GeoGebra Simulação de Situações Problemas
Planejamento da Oficina	Elaboração, Execução e Avaliação
Avaliação	Avaliação Qualitativa Participação/Compromisso nas atividades/Execução das atividades

Fonte: Acervo do Autor

Em relação aos objetivos, a identificação dos resultados esperados e dos objetivos de aprendizagem proporciona indicadores a respeito das informações, conhecimentos, capacidades ou habilidades que os alunos serão incentivados a alcançar até o final do processo. O objetivo geral da oficina foi, dessa forma, estabelecido depois da sistematização das informações coletadas. A escolha das atividades a serem realizadas também foi muito importante e dependeu de vários fatores. Deve-se considerar o contexto em relação à oficina, ou seja, ter bem definido em que momento a atividade deve ser realizada. Assim, no Quadro 3.1, mostra-se as subfases da elaboração do processo de implementação das atividades do projeto.

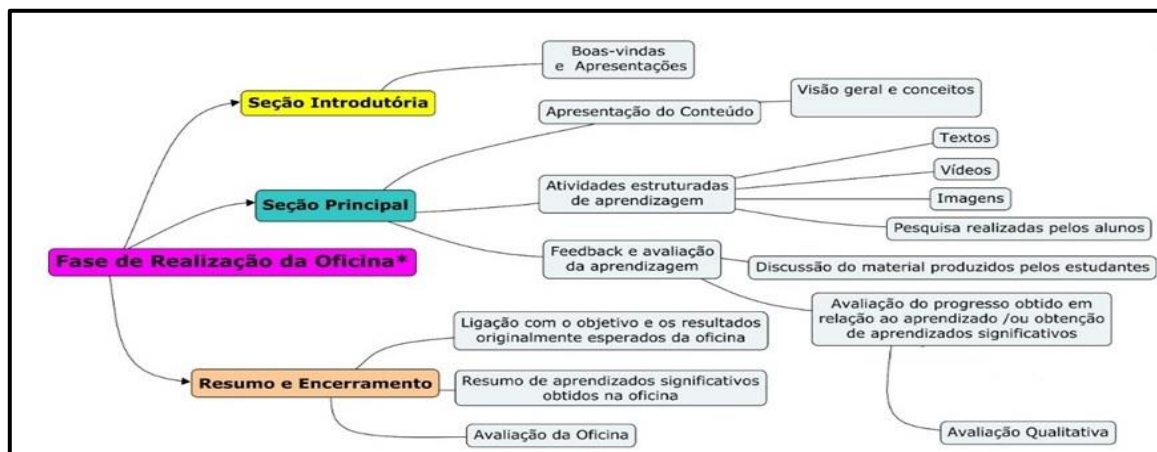
3.4.2 FASE DE REALIZAÇÃO DA OFICINA

Para a introdução da oficina, foi elaborada uma apresentação sobre as funções matemáticas, o que é a Astronomia e sobre o uso das funções matemáticas na Astronomia. A avaliação dos conteúdos trabalhados na oficina foi realizada por meio da participação e compromisso nas atividades propostas relacionadas ao tema. Na sequência, foram apresentados os objetivos de ensino-aprendizagem da oficina, bem como as atividades que deverão ser realizadas em cada uma delas.

A oficina, como qualquer ação pedagógica, pressupõe planejamento. No entanto, é durante a execução que ela assume características diferenciadas das abordagens centradas no professor e na mera transmissão de conhecimento. Trata-se de uma situação de aprendizagem aberta e dinâmica, que possibilita a inovação, a troca de experiências e a construção de conhecimentos, onde o aluno é o agente de sua formação, com ideias prévias e experiências diversas, e o professor assume o papel de investigador social e organizador de atividades problematizadoras. Além disso, o plano de uma oficina deve proporcionar estrutura e sequência. Porém, também precisa ser flexível o suficiente para permitir que atividades não planejadas e espontâneas possam surgir no decorrer da mesma.

Para criar um ambiente acolhedor, que reflita um clima positivo e empolgante, que prenda a atenção e o interesse dos alunos, deve-se levar em consideração as seguintes etapas e processos: seção introdutória; boas-vindas e apresentação; seção principal; apresentação do(s) conteúdo(s); atividades estruturadas de aprendizagem; *feedback* e avaliação do aprendizado; e resumo e encerramento (Fig.3.4). A etapa introdutória deverá ter como objetivo estabelecer um ambiente acolhedor de aprendizagem e proporcionar oportunidades para refletir e dialogar sobre os principais tópicos da oficina. Será um momento importante, pois definirá o contexto da oficina em termos de energia, motivação e expectativas em relação ao tempo restante em que passarão juntos.

Figura 3.4 – Esquema da fase de realização da oficina



Fonte: Acervo pessoal do autor.

O momento de exposição teórica do tema proposto para a oficina representa uma das atividades mais desafiadoras, pois está na parte do fluxo contínuo de aprendizagem, onde há menos interatividade com o aprendiz. Se não for muito bem elaborado, pode ocorrer uma quebra no ritmo de aprendizagem e apreensão do conhecimento, desperdiçando todo o esforço motivador feito anteriormente.

Após a fase de abertura, as atividades relativas ao tema da oficina devem ser desenvolvidas. Primeiramente, há a descrição dos objetivos específicos da atividade de aprendizagem, seguido de uma explicação acerca das instruções referentes a cada tarefa (inclusive, por escrito) e de um momento no qual os estudantes terão a oportunidade de perguntar ou expressar preocupações antes do início da atividade.

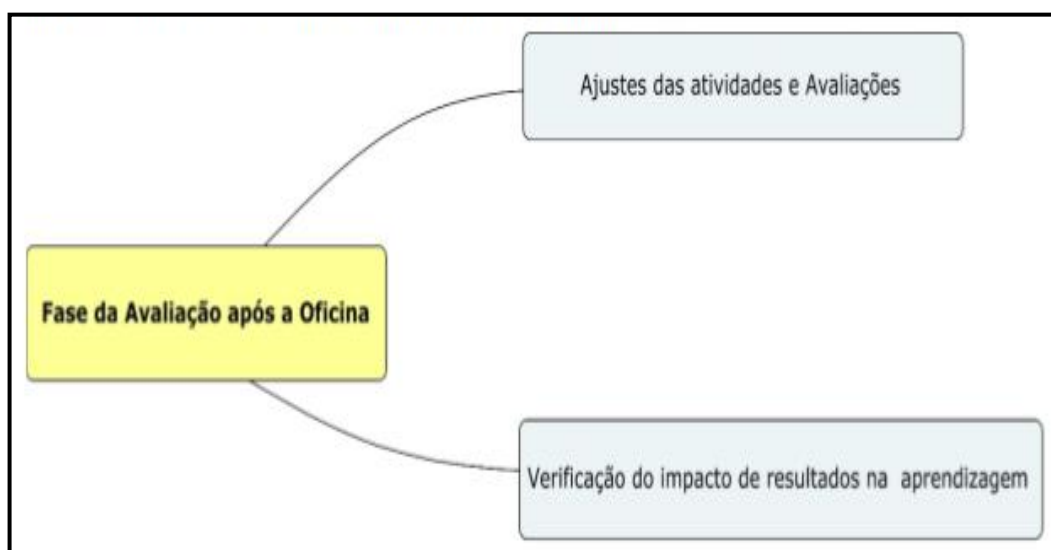
Na organização das atividades, padrões de comunicação e de interação foram determinados em relação à atividade (individual, em duplas ou em grupos pequenos). Para isso, um planejamento prévio foi imprescindível, tendo em vista a necessidade de pensar em alternativas que se ajustem a possíveis situações-problema apresentadas pelos estudantes, a partir de seus contextos reais de trabalho. Por meio de negociações que passarão todos os encontros previstos para a oficina, devem ser propostas tarefas para a resolução de problemas ou das dificuldades que possam vir a existir, incluindo o planejamento de projetos de trabalho, a produção de materiais didáticos, a execução de materiais em sala de aula e a apresentação do produto final dos projetos, seguida de reflexão crítica e avaliação. As técnicas e os procedimentos

utilizados foram bem variados, incluindo trabalhos em duplas e em grupo, a fim de promover a interação entre os participantes, sempre com foco em atividades práticas.

3.4.3. FASE DE AVALIAÇÃO APÓS A OFICINA

Como visto anteriormente, a avaliação é uma atividade tão importante quanto qualquer outra para a preparação e desenvolvimento de uma oficina. Trata-se de um processo contínuo de fundamental importância no dia a dia de uma sala de aula. Por isso, tornou-se um dos temas mais discutidos na área da educação, embora as novas ideias relacionadas a esse conceito não sejam fáceis de serem postas em prática. Entende-se que, durante e após a oficina, o professor mediador terá adquirido um grande leque de informações que favorecerá a avaliação de todo o processo. Caberá ao professor fazer uma análise sobre a oficina utilizando estas informações, observações e contribuições dos estudantes, sem perder de vista suas próprias ponderações, considerações e pareceres. Posto isto, optou-se por uma avaliação de caráter qualitativo que levará em consideração os seguintes critérios: participação, compromisso nas atividades e execução das tarefas (Fig.3.5).

Figura 3.5 – Esquema da fase de avaliação após a oficina



Fonte: Acervo pessoal do autor.

O roteiro da oficina e as explicações detalhadas sobre a organização e a estrutura da mesma foram reunidas em um Caderno Pedagógico, produto educacional deste trabalho. Este pode servir como proposta didática para os professores que desejarem aplicar em suas aulas, fazendo as adequações que atendam às necessidades e especificidades de sua prática docente e do público com o qual trabalha.

4 IMPLEMENTAÇÃO DAS AÇÕES DAS FASES: PRÉ-OFFICINA E REALIZAÇÃO DA OFFICINA

Neste capítulo discorre-se sobre a implementação das ações nas fases pré oficina e na realização da oficina.

4.1 FASE PRÉ-OFFICINA

Esta fase concentrou-se nos passos e processos organizacionais que precisaram ser levados em consideração antes da realização da oficina propriamente dita. Esta etapa foi dividida da seguinte forma: Seleção dos estudantes participantes; Organização do ambiente de aprendizagem; Treinamento, Desenvolvimento do experimento/prototipagem para simulação das órbitas entorno de objetos massivos; Desenvolvimento da simulação e, também, elaboração da atividade sobre função exponencial/seno/cosseno.

4.1.1 SELEÇÃO DOS ESTUDANTES PARTICIPANTES

Lecionava em oito turmas do 1º ano e também em três turmas do 2º ano todas do Ensino Médio no C.M.L.E.M, sendo que todas possuíam uma sala no ambiente virtual (*Google Classroom*), mas apenas as turmas do 2º ano tinham recebido o treinamento para utilizar o programa GeoGebra. No entanto, durante o treinamento e ao executar as atividades, a turma do 2º A mostrou - se mais envolvida com a proposta do trabalho, por isso, foi selecionada.

4.1.2 ORGANIZAÇÃO DO AMBIENTE DE APRENDIZAGEM

Um ambiente de aprendizagem é um espaço fecundo de significação em que um indivíduo e objetos técnicos interagem, potencializando, assim, a aprendizagem.

Na oficina desenvolvida neste trabalho, utilizou-se os seguintes ambientes: a sala de aula e o *Google Sala de Aula (Google Classroom)*.

No *Google Classroom* (Figs. 4.1 e 4.2) foram criadas salas de aulas virtuais para todas as turmas de 1º e 2º anos, porém apenas uma turma do 2º ano do Ensino Médio, 2º ano A, foi escolhida para participar do trabalho. Nelas, frequentemente, postava avisos, tarefas e vídeos; ou seja, era um ambiente que proporcionava uma maior conexão entre professor - estudantes, sendo possível criar e desenvolver trabalhos dentro e fora da sala de aula. Tal ambiente de aprendizagem foi de fundamental importância para o desenvolvimento da oficina, pois nele foram postados:

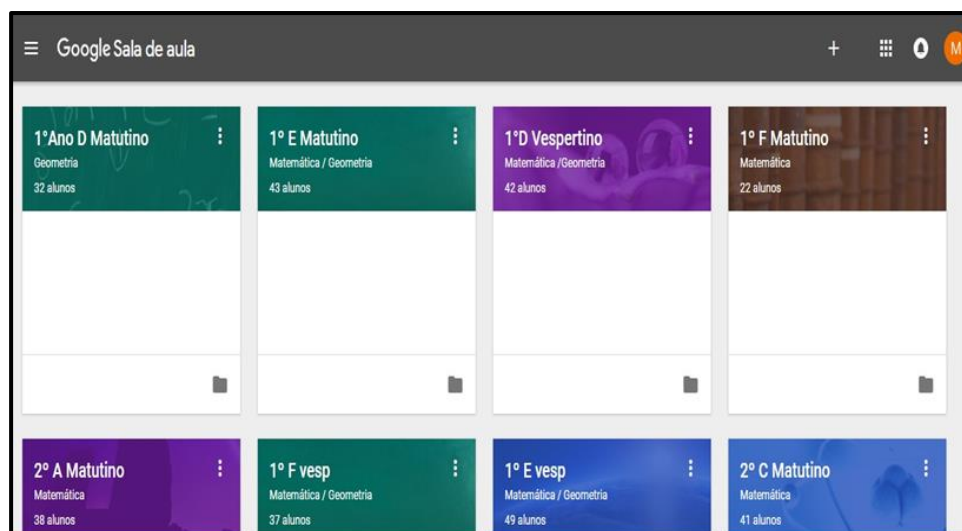
- ✓ Os vídeos com os conteúdos de funções, os sobre o *GeoGebra* (produzidos por mim e os disponibilizados no *YouTube*);
- ✓ Vídeos sobre *Astronomia*;
- ✓ Textos;
- ✓ Atividades;
- ✓ Formulários;
- ✓ Testes.

Figura 4.1 – Visão geral do ambiente virtual *Google Classroom*



Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=W_4OmpYdXyk

Figura 4.2 – Salas de Aula Virtuais do *Google Classroom*



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Vale ressaltar que existem outros ambientes de aprendizagens, porém, a escolha do *Google Classroom* passou pelos seguintes critérios:

- ✓ A configuração em Língua Portuguesa;
- ✓ A disponibilidade de um aplicativo para celular; logo, é possível fazer todas as atividades por meio deste aparelho;
- ✓ A possibilidade do acompanhamento individual do estudante por meio da sala virtual.

Contudo, ocorreram dois imprevistos durante a implementação dessa etapa, os quais resultaram em um atraso de 3 semanas. Foram eles:

- ✓ No primeiro momento, não houve uma adesão significativa por parte dos alunos (tinham salas virtuais com apenas 10 estudantes de um total de 40, nas turmas presenciais).

Esse problema só foi resolvido após muita conversa, ressaltando-se a importância da participação de todos no ambiente virtual de aprendizagem, mostrando, assim, a relevância desse canal de comunicação.

- ✓ Mesmo disponibilizando os *links* com tutoriais sobre como acessar o *Google Classroom* e o seu funcionamento, houve vários casos de estudantes

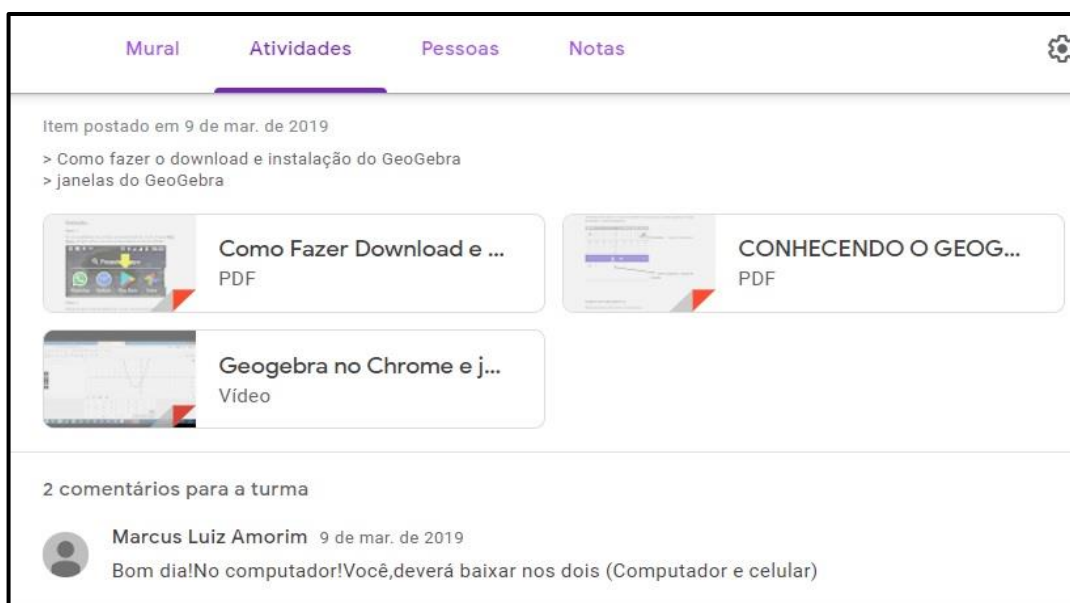
“perdidos” com relação a acessar as salas virtuais, demandando mais tempo e explicações nessa etapa.

4.1.3 TREINAMENTO

O treinamento foi uma das etapas mais importantes da fase pré oficina, pois, a partir dele, o estudante se apropriou do programa GeoGebra, conhecendo os seus comandos, suas janelas e as principais construções geométricas e gráficas que o mesmo oferece. Assim, nesse primeiro contato, foi significativo transformar essa atividade em algo lúdico, algo motivador. Quando foi permitido que os alunos “brincassem” com o programa houve maior interesse pelo tópico de funções, em especial a partir do momento que surgia um gráfico diferente, com cores diferentes ou em uma situação oposta ao que já tinha sido apresentado. Então, aproveitou-se a situação para trabalhar os conceitos e propriedades das funções usando os gráficos construídos pelos estudantes e, também, explorando seus questionamentos.

O treinamento incluiu a preparação e a organização de recursos e de materiais para distribuição, além de uma quantidade reduzida de atividades significativas e envolventes. Em relação à carga horária necessária para a capacitação, foram disponibilizadas 3 aulas de 50min para que os estudantes conhecessem o programa *GeoGebra* (janelas, comandos e aplicações). Ainda, dias antes do treinamento, foram postados, no ambiente virtual, vídeos mostrando cada janela do programa e as suas respectivas funções, além de vídeos de resolução de exercícios por meio do *GeoGebra* (Fig.4.3). Vale salientar que não é possível fazer o treinamento sem o uso do *Datashow*. Procedendo dessa forma, notou-se que os estudantes não sentiram muita dificuldade na utilização do programa durante as aulas práticas.

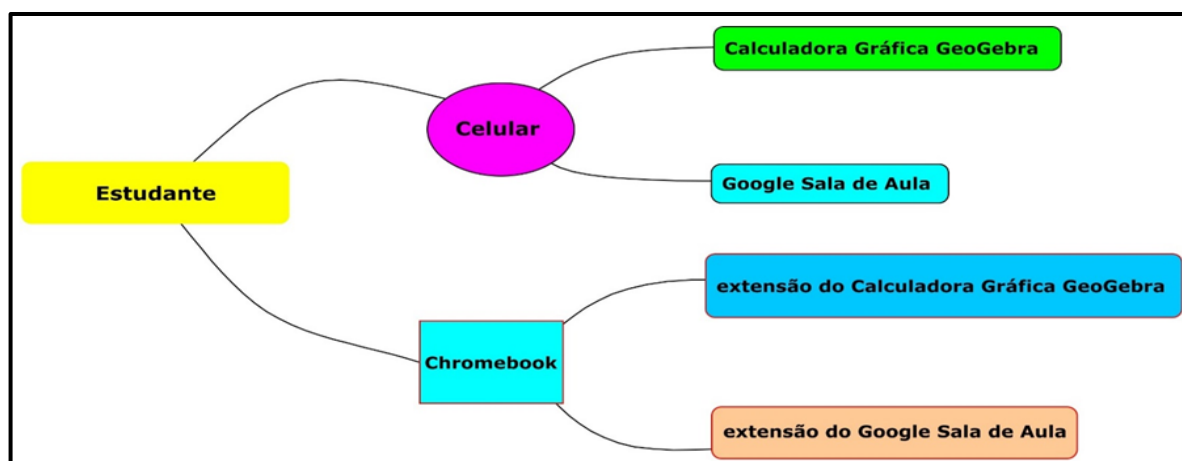
Figura 4.3 – Material do GeoGebra na Sala de Aula Virtual



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Em relação à organização de recursos destinados aos estudantes para a execução do treinamento, os mesmos tinham como possibilidade usarem o celular ou os *chromebooks* da escola. Os alunos baixaram em seus respectivos celulares os aplicativos *Google Classroom* e a Calculadora Gráfica GeoGebra (Fig. 4.4).

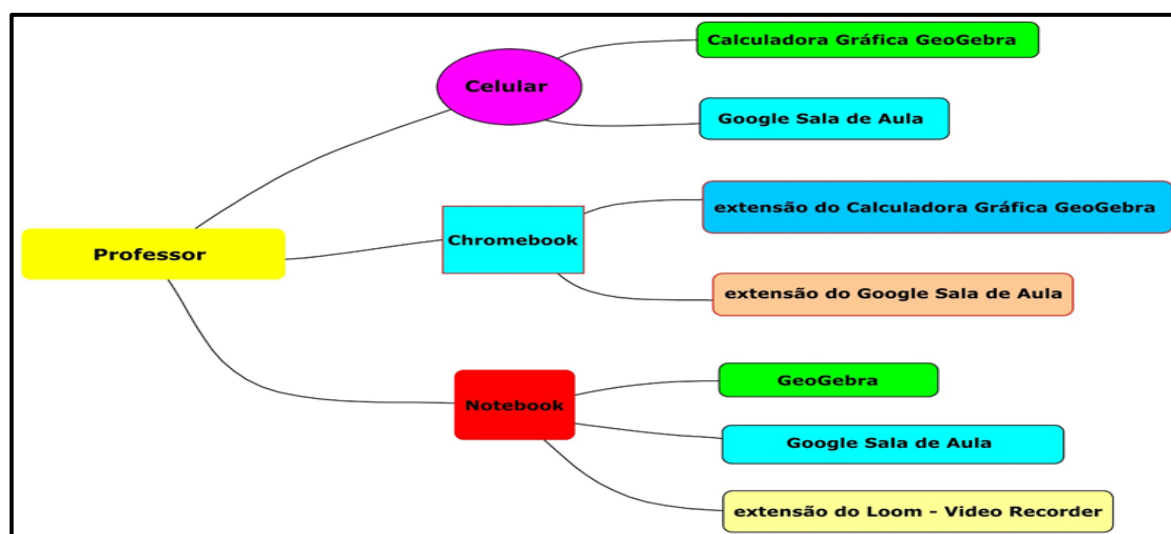
Figura 4.4 – Recursos dos Estudantes



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Como professor mediador, tinha em meu celular os aplicativos *Google Sala de Aula* e o *Calculadora Gráfica GeoGebra*. Entretanto, em meu *notebook*, além dos aplicativos, também estava instalada a extensão do *Loom - Vídeo Recorder* (<https://www.youtube.com/watch?v=o7T3skTAheY>) – com ela é possível criar os próprios vídeos (Fig.4.5). Existiam vários vídeos na plataforma do *Youtube* que ensinavam construir gráficos com *GeoGebra*. Contudo, a maioria deles abordava os conteúdos de forma geral. Por isso, utilizou-se o *Loom* para criar os vídeos a serem postados, sendo possível abordar os assuntos de maneira específica, também a partir das dúvidas que surgiam durante as aulas.

Figura 4.5 – Recursos do Professor



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

As subseções, a seguir, abordam os seguintes tópicos: experimento/prototipagem, simulação e atividade. Contudo, os processos de elaboração e criação das atividades são apresentados de forma mais detalhada no Caderno Pedagógico.

4.1.4 DESENVOLVIMENTO DE PROTOTIPAGEM PARA O EXPERIMENTO/PROTOTIPAGEM USADO NA SIMULAÇÃO DAS ÓRBITAS EM TORNO DE OBJETOS MASSIVOS

Nesta subseção aborda-se aspectos relevantes sobre o experimento/prototipagem, que são: O que construir? Como construir? E como utilizar?

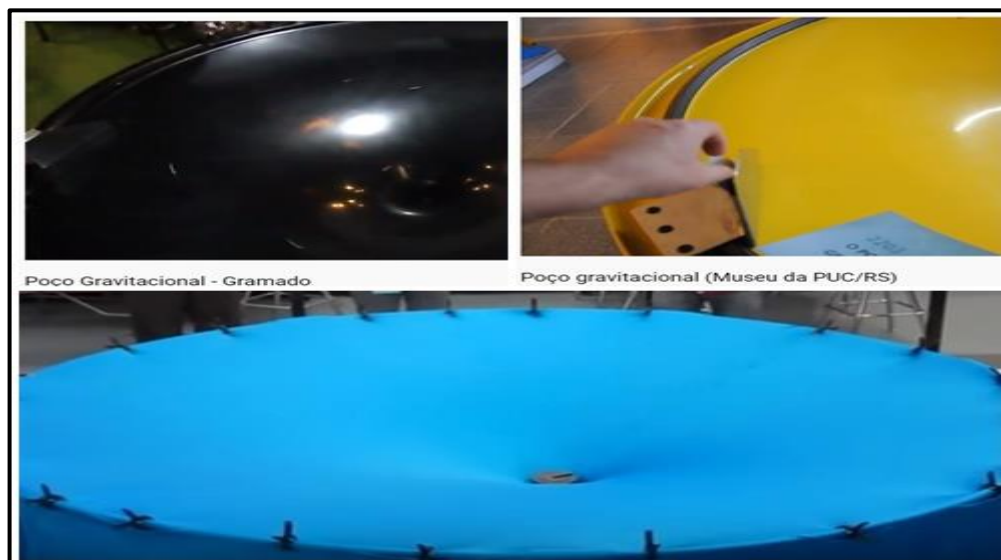
O que construir?

Para responder esse questionamento, deve-se entender o que o experimento/prototipagem tentará representar. Com o experimento/prototipagem, pretendeu-se simular órbitas (elípticas, parabólicas e hiperbólicas); mas, para isso, precisou-se ativar o conceito de gravidade, pois, de acordo com as leis do movimento de Newton, ela é a responsável por prender objetos à superfície de planetas e, também, por manter objetos em órbita em torno uns dos outros.

Usando a definição dada pela Teoria da Relatividade Geral (usa-se apenas a definição), tem-se que: “A Gravidade não é uma simples força atrativa entre corpos que possuem massa, mas que ela é uma consequência direta da curvatura do espaço-tempo causada pela presença de massa ou energia” (MAIA, 2009, p. 80).

Baseando-se nas definições de órbitas e gravidade, tem-se que um experimento/prototipagem que se encaixa com os objetivos dessa etapa da oficina é o poço gravitacional. Fazendo-se uma pesquisa rápida na internet, tem-se alguns exemplos (Fig.4.6). Assim, identifica-se o que construir.

Figura 4.6 – Ilustrações de poços gravitacionais



Fontes: Gravidade Visualizada: <https://www.youtube.com/watch?v=l-BVkhRHPfo>
 Poço gravitacional (Museu da PUC/RS): <https://www.youtube.com/watch?v=kcQyqMxB3y8>
 Poço Gravitacional – Gramado: <https://www.youtube.com/watch?v=KRIm0YpXuRM>

Com o que construir?

Observando os vários exemplos de poços gravitacionais da internet, pode-se notar que o material empregado na sua construção ou é fibra de vidro ou é uma malha. Com base nessa informação, tentou-se a construção com os 2 tipos de materiais. Segue um breve relato das tentativas de construção do experimento/prototipagem.

✓ Usando fibra de vidro

Construir o experimento/prototipagem usando a fibra de vidro seria a escolha mais lógica, pois o experimento/prototipagem feito com esse material não apresentaria muito atrito durante a simulação e, também, ficaria muito bonito. Contudo, trabalhar com este material requer experiência, cuidados com o manuseio, além de outras especificidades. Então, depois do fracasso do segundo protótipo, essa ideia foi descartada. Vale salientar que foram feitos alguns orçamentos em casas especializadas, mas o custo mostrou-se muito alto.

✓ Usando malha

A construção usando malha foi mais tranquila, haja vista que este é um material fácil de manusear. Entretanto, no experimento/prototipagem feito com malha, notou-se muito atrito, o que atrapalhava a simulação.

Por sugestão, utilizou-se outro material, que era um tipo de tecido plástico. Ele apresentava baixo atrito, porém, era muito difícil produzir a deformação necessária para a simulação.

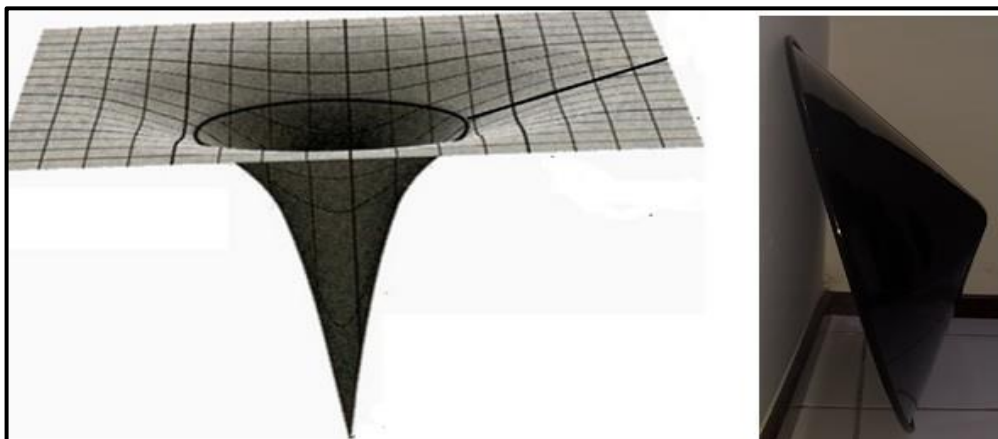
É importante salientar que esse breve relato deve ser entendido como uma troca de experiências e não como uma imposição quanto ao material a ser utilizado. Mesmo testando todos esses materiais, optou-se por usar, ao final, uma bateia³ de aço para a construção do experimento/prototipagem.

E como utilizar?

Antes de descrever o processo de utilização do experimento/prototipagem, faz-se necessário uma observação sobre o experimento/prototipagem construído usando a bateia. Pode-se notar que a configuração geométrica associada ao experimento/prototipagem é diferente da configuração geométrica associada ao poço gravitacional (Fig.4.7). No entanto, o experimento/prototipagem feito com a bateia cumpre de forma satisfatória o seu objetivo.

³ Utensílio usado na mineração em pequena escala, geralmente em depósitos de sedimentos em cursos de água, para a obtenção de concentrados de minérios metálicos.

Figura 4.7 – Comparação entre a geometria do poço gravitacional e o experimento/prototipagem



Fontes: Arquivo pessoal do autor / adaptação:

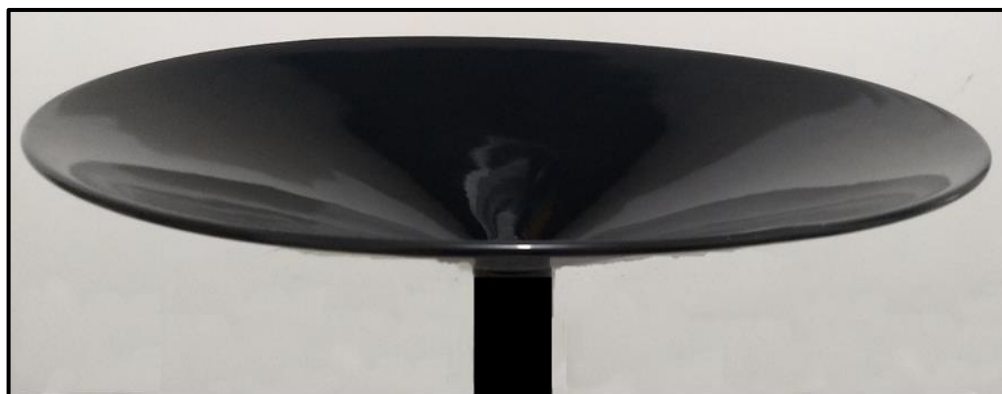
<https://odiferencialdafisica.files.wordpress.com/2015/08/singularidade.jpg>

O experimento/prototipagem foi utilizado para promover debates, retomar conceitos trabalhados durante a oficina, sanar dúvidas, introduzir e discutir novos conceitos e, assim, consolidar a aprendizagem. O roteiro para a utilização do experimento/prototipagem, buscou perfazer os seguintes passos:

1. Mostrar o experimento/prototipagem e, por meio de perguntas, chegar à conclusão de que ele representa a deformação do espaço-tempo. Então, questionar aos estudantes: qual é a consequência desse fato?
2. A partir da resposta dos estudantes, falar sobre Força Gravitacional;
3. Relembrar aos estudantes a determinação das órbitas num campo de forças gravitacionais a partir da conservação da energia;
4. Depois dessas discussões, utilizar 2 esferas de ferro e lançá-las da seguinte forma: a 1ª com força suficiente para que ela saia do experimento/prototipagem e a 2ª com força suficiente para que fique rodando dentro do experimento/prototipagem. Após executar essas ações, discutir sobre energia potencial e velocidade de escape;
5. Discutir o movimento da 2ª esfera usando a questão do atrito e das órbitas fechadas. A partir dessa discussão, abordar o tema espiral e, na sequência, conceitos de funções.

6. Antes do início da atividade de espiral, deixar os estudantes “brincando” um pouco com o poço gravitacional (experimento/prototipagem). Aproveitar o clima lúdico para fazer intervenções.

Figura 4.8 – Experimento/prototipagem feito com a bacia

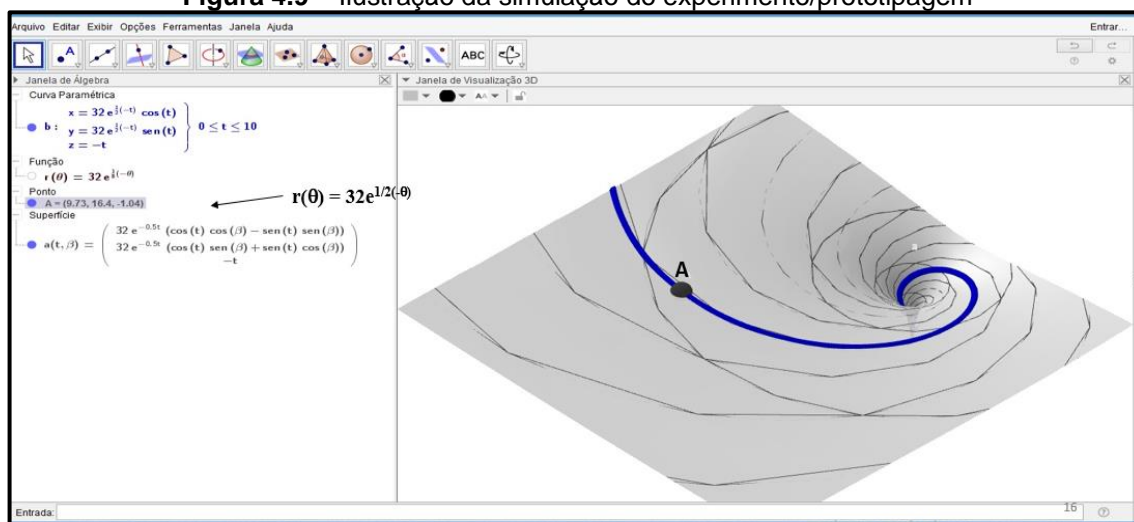


Fonte: Arquivo pessoal do autor.

4.1.5 ELABORAÇÃO DA SIMULAÇÃO DO EXPERIMENTO/PROTOTIPAGEM USANDO O GEOGEBRA

Após o encerramento das discussões geradas pelo uso do experimento/prototipagem, pretende-se exibir uma simulação criada no GeoGebra. O objetivo da simulação é mostrar como seria a trajetória de um objeto que está no disco de acreção e sendo “puxado” para dentro do buraco negro (Fig.4.9). Para tanto, use a equação (2.24) (conforme apresentado na seção 2.9). Assim, durante a execução da simulação torna-se possível observar e comentar a variação dos valores das variáveis da equação (2.24). Vale ressaltar que, embora não seja idêntico à situação real, acredita-se que seja uma aproximação plausível e, na medida do possível, satisfatória.

Figura 4.9 – Ilustração da simulação do experimento/prototipagem



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

4.1.6 ELABORAÇÃO DA ATIVIDADE: CONSTRUINDO UMA ESPIRAL

Esta atividade será realizada após as interações estudantes – experimento/prototipagem, estudantes – simulação. Ela tem como objetivo reforçar o conceito de função trabalhado durante as interações, por meio da definição e propriedades das funções exponenciais, além das definições de seno e cosseno. Todos esses tópicos serão discutidos durante a construção da espiral.

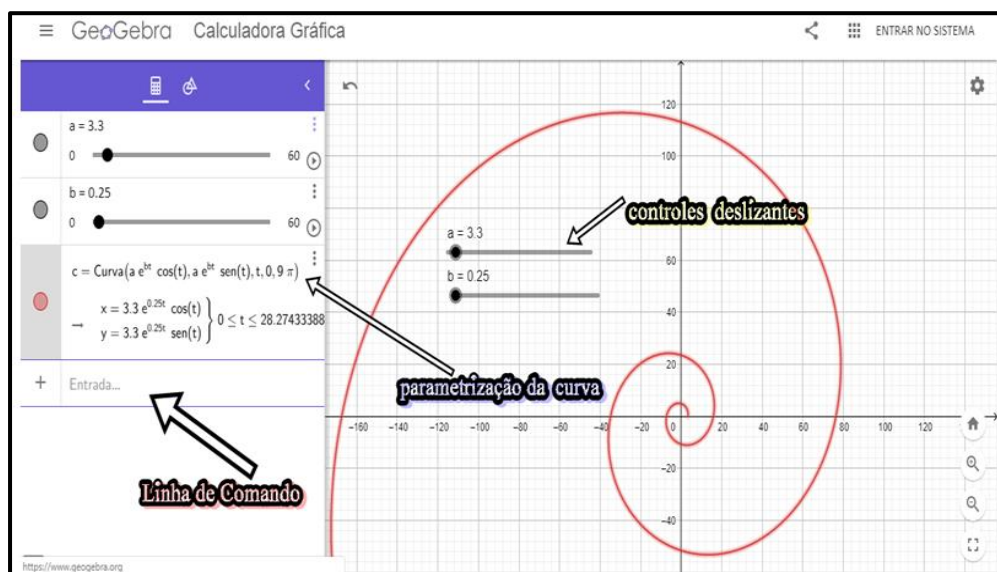
Para a realização da atividade, o grupo de estudantes formarão duplas por meio do processo de auto-seleção, no qual os participantes deverão escolher seus parceiros de trabalho de acordo com suas afinidades. As atividades com o celular ou o *chromebook* serão realizadas, no máximo, em dupla.

O processo de elaboração dessa atividade no GeoGebra será apresentado, posteriormente, de forma mais detalhada, no Caderno Pedagógico.

Na construção da Espiral por meio do *chromebook* (Fig.4.10), deve-se criar:

- ✓ Os parâmetros a e b ;
- ✓ Os controles deslizantes para os parâmetros a e b na Janela de Visualização.

Figura 4.10 – Resultado da construção da Espiral no *chromebook*



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

No aparelho celular, os passos são os seguintes (Fig.4.11):

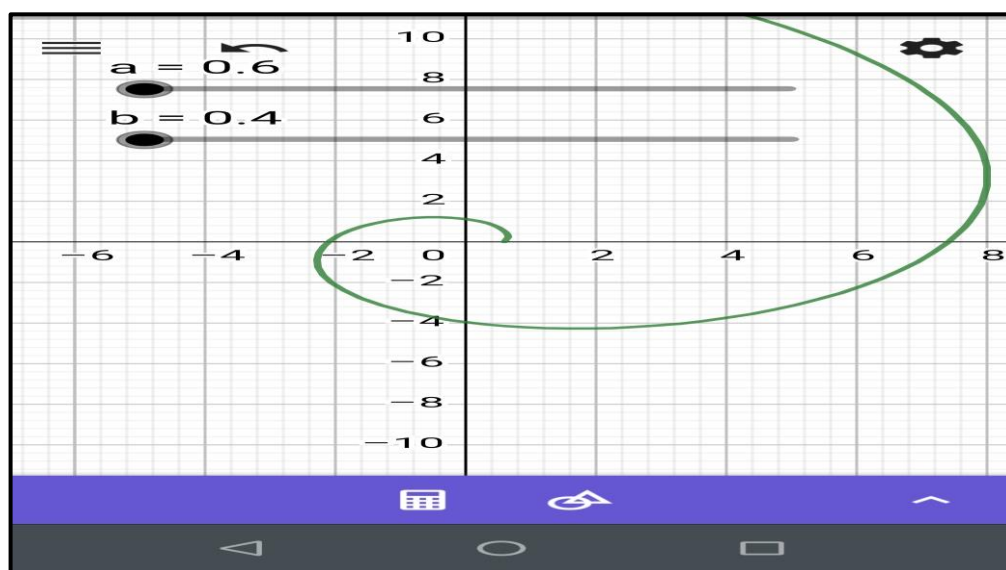
- ✓ Criar os parâmetros a e b ;
- ✓ Criar controles deslizantes para os parâmetros a e b na *Janela de Visualização*.
- ✓ Aperte 1 e, logo depois, o 2. Conforme (Fig.4.12).

Figura 4.11 – Passos da criação de uma Espiral utilizando o GeoGebra no aparelho celular



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Figura 4.12 – Resultado da construção da Espiral no celular



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

4.2 FASE DE REALIZAÇÃO DA OFICINA

A importância dessa fase reside na socialização da aprendizagem, pois, é nela que os participantes interagem, trocam informações, formam conceitos, experimentam e se comunicam. Esta etapa foi dividida da seguinte forma: Seção introdutória: boas-vindas e apresentação; e Seção principal: apresentação do conteúdo, atividades práticas e Avaliação.

4.2.1 SEÇÃO INTRODUTÓRIA: BOAS -VINDAS E APRESENTAÇÃO

Esta etapa teve como objetivo criar um ambiente acolhedor de aprendizagem e proporcionar oportunidades para refletir e dialogar sobre os principais tópicos da oficina (Fig.4.13).

Figura 4.13 – Boas-vindas, Apresentação do Título da oficina e tópicos abordados



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Título da Oficina: Oficina para o Entendimento de Funções Matemáticas por Intermédio da Astronomia: aplicações no Ensino Médio.

Tópicos:

- ✓ Cônicas
- ✓ Órbitas.

Na apresentação surgiram alguns questionamentos, por parte dos estudantes: “qual a importância da órbita no meu cotidiano?” E “Onde eu uso isso?”. Tais questionamentos geraram discussões fluidas sobre os tópicos (Cônicas e Órbitas) e até mesmo sobre a importância da Ciência.

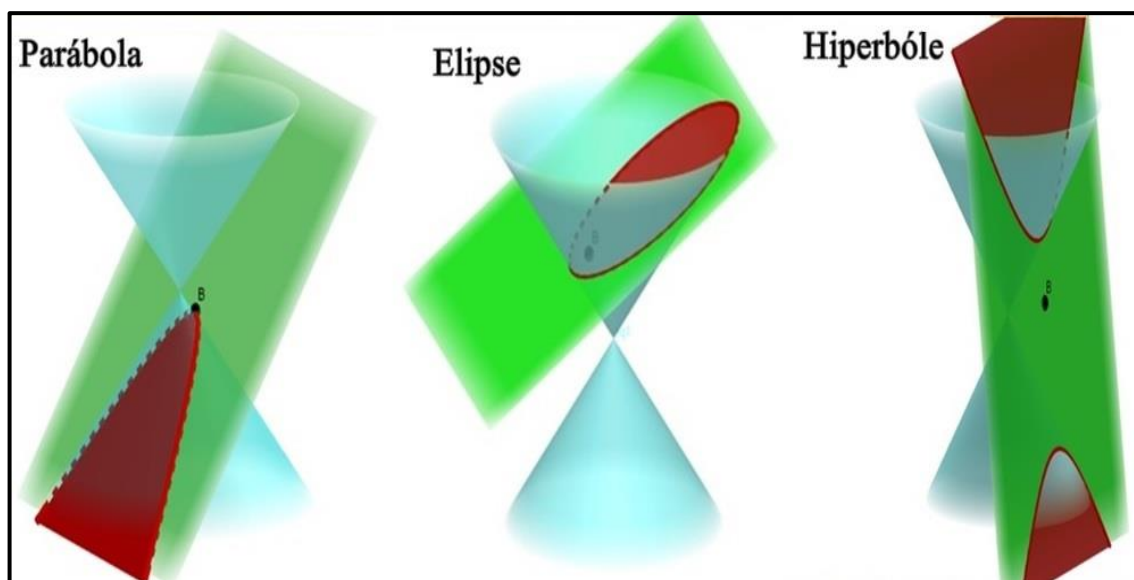
4.2.2 SEÇÃO PRINCIPAL: APRESENTAÇÃO DO CONTEÚDO

Ao iniciar a exposição teórica do tema proposto para a oficina, explicitou-se aos estudantes que eles poderiam fazer, a qualquer momento, perguntas e colocar suas dúvidas. Assim, essa etapa se tornou mais dinâmica e produtiva.

O primeiro tópico abordado foi sobre as Cônicas (Parábola, Elipse e Hipérbole) (Fig.4.14), cujos aspectos contemplados foram os seguintes:

- ✓ Definição;
- ✓ Elementos;
- ✓ Equações canônicas.

Figura 4.14 – Cônicas: Parábola, Elipse e Hipérbole

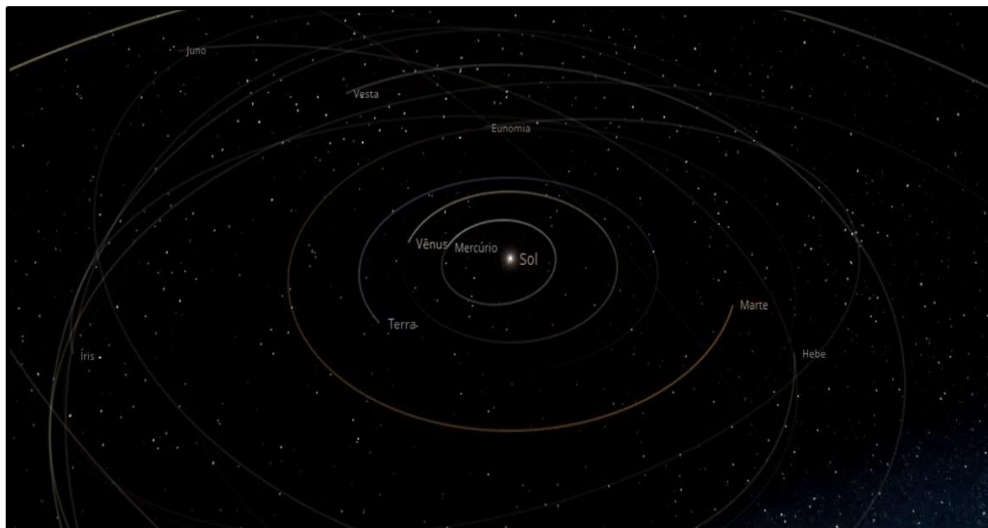


Fonte: Arquivo pessoal do autor.

O segundo tópico foi sobre Órbitas:

Antes de iniciar o assunto, houve a exibição de um vídeo produzido usando uma simulação do Sistema Solar. (Fig.4.15)

Figura 4.15 – Simulação do Sistema Solar



Fonte: Jogo Universe Sandbox²

Logo após a exibição do vídeo foram abordados os seguintes subtópicos:

- ✓ Um pouco de História.

Foi desenvolvida uma breve abordagem sobre: **Tycho Brahe e Johannes Kepler**

- ✓ Houve exibição do vídeo sobre as leis das órbitas (Fig.4.16).

Figura 4.16 – ABC da Astronomia| Kepler

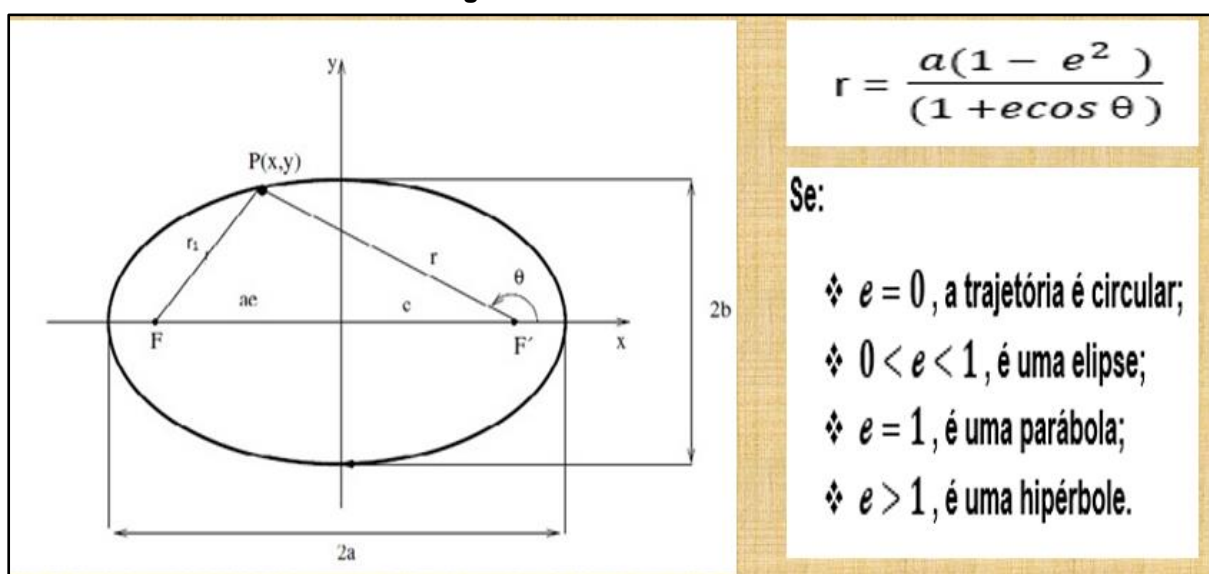


Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=6jXN_1Xt20M&list=PL786495B96AB0CC3C&index=12

Lei das Órbitas (Primeira Lei de Kepler)

Ocorreu uma abordagem matemática, na qual voltou-se a discutir com os estudantes a definição e os elementos da elipse, porém, não houve um aprofundamento sobre a obtenção da fórmula do raio (r) por intermédio da equação (2.1) (conforme apresentado na seção 2.9), haja vista que isso desviaria a atenção dos objetivos propostos para a oficina (Fig.4.17).

Figura 4.17 – Lei das Órbitas



Fonte: FILHO; SARAIVA, 2014, p. 78.

Mais um pouco de História:

- ✓ Foi desenvolvida uma breve abordagem sobre: **Isaac Newton**;
- ✓ Força Gravitacional.

Houve uma discussão sobre determinação das órbitas num campo de forças gravitacionais a partir da conservação da energia e da conservação do momento angular.

Figura 4.18 – Determinação das órbitas num campo de forças gravitacionais a partir da conservação da energia

$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}$, onde L é o momento angular.

$U(r) = -\frac{mMG}{r}$, é a energia potencial.

$K = \frac{m}{2}v^2$, é a energia cinética.

$E = k + U(r)$ ou $E = \frac{m}{2}v^2 - \frac{mMG}{r}$ (1)

Após resolvermos (1) obtemos, escrita em termos da variável r, a solução forma da equação descrevendo uma cônica. Isto é:

$$r = \frac{L^2}{m^2MG} \cdot \frac{1}{\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m^3M^2G^2}} \cos(\theta - \theta_0)\right)}$$
 (2)

Donde inferimos que a excentricidade depende de uma forma simples do sinal da energia.

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m^3M^2G^2}}$$
 (3)

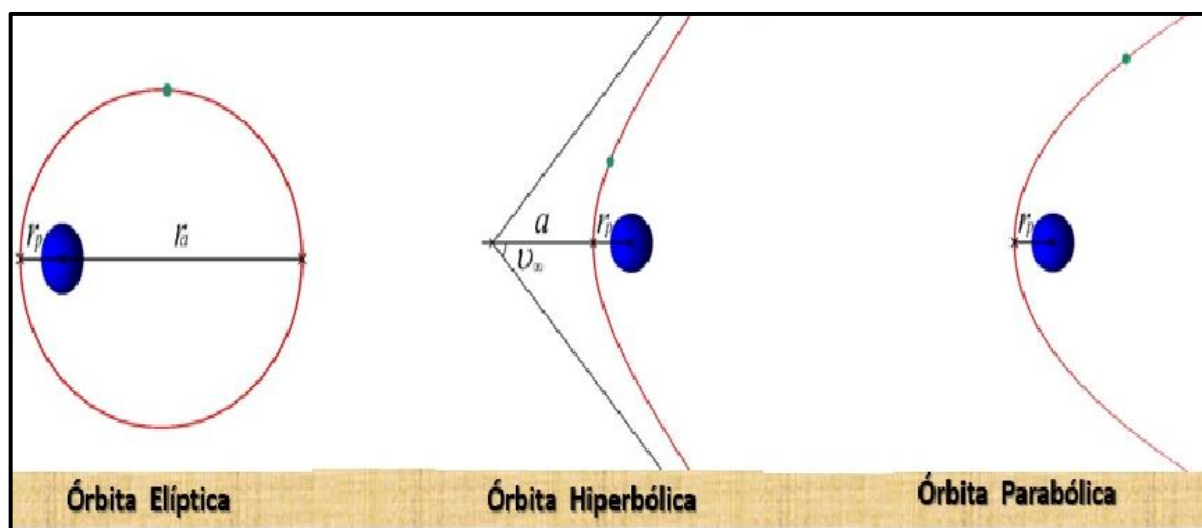
Então:

- Para energias negativas, mas, tais que $E \geq -\frac{m^3M^2G^2}{2L^2}$ a órbita será uma elipse;
- Para energias positivas, a órbita é uma hipérbole;
- Para energia nula ($E = 0$), a trajetória é uma parábola.

Fonte: FILHO; SARAIVA, 2014, p.82.

Com base na discussão sobre energia, realizou-se a classificação das órbitas.

Figura 4.19 – Classificação das Órbitas



Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/%C3%93rbita>

Simulação das órbitas

- ✓ Houve a exibição de um vídeo sobre a Simulação das órbitas de um grupo apertado de estrelas próximo ao buraco negro supermassivo no coração da Via Láctea;

Figura 4.20 – Simulação das órbitas de estrelas em torno do buraco negro situado no centro da Via Láctea.

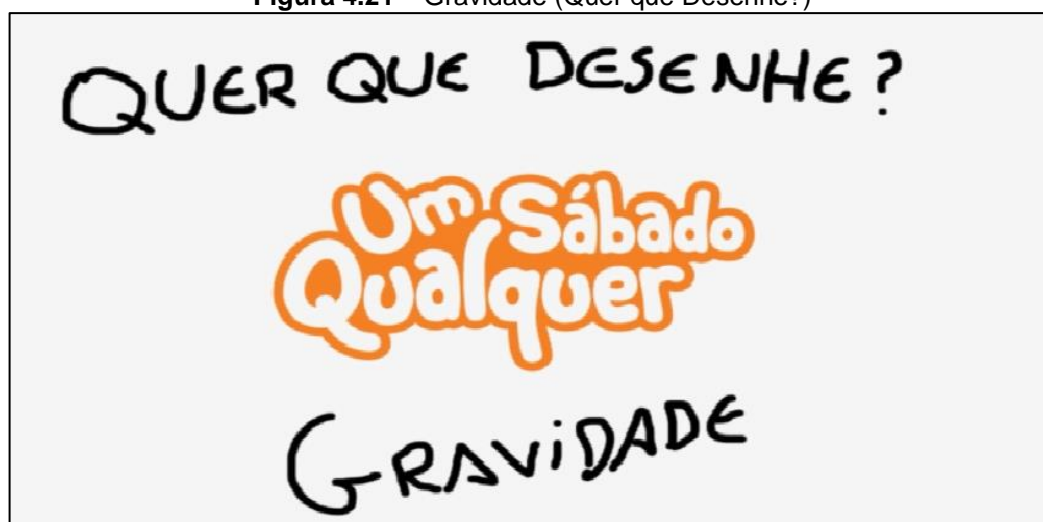


Fonte: <https://www.eso.org/public/brazil/videos/eso1825f/>
Crédito: ESO/L. Calçada/spaceengine.org

Força Gravitacional e velocidade de escape

- ✓ Quer que desenhe: é uma série destinada a explicar de uma maneira simples, direta e bem-humorada vários fatos da Ciência. (Fig.4.21)

Figura 4.21 – Gravidade (Quer que Desenhe?)



Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=jSSVmJltv8E&t=146s>

Força Gravitacional: de Newton a Albert Einstein

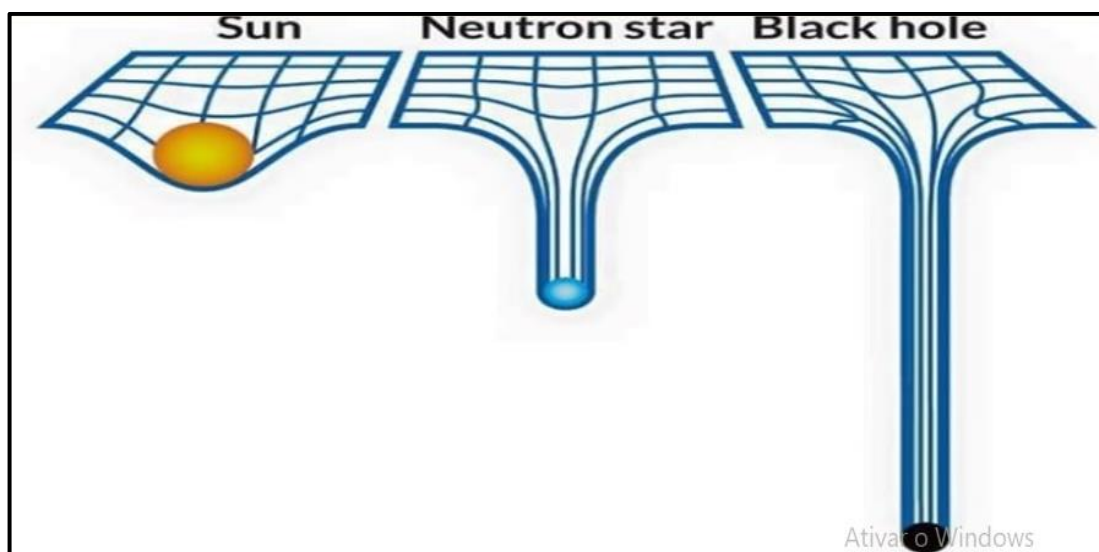
Figura 4.22 – Além do Cosmos: O Espaço (Dublado) Documentário *National Geographic*



Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=nJJGZny5un0>

Após o vídeo, foi feita uma discussão sobre deformação do tempo-espaço e sobre campo gravitacional.

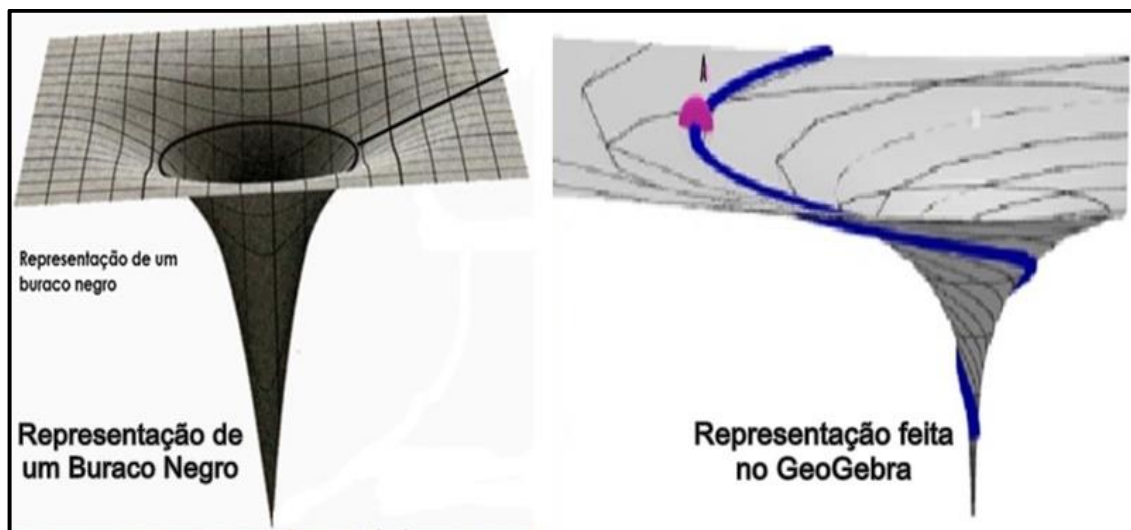
Figura 4.23 – Ilustração Deformação do Espaço



Fonte : <https://www.pinterest.cl/pin/482377810069014296/>

Comparação entre a deformação do espaço-tempo e a simulação feita no GeoGebra.

Figura 4.24 – Comparação entre as representações da deformação do espaço-tempo



Fontes: Arquivo pessoal do autor / adaptação:

<https://odiferencialdafisica.files.wordpress.com/2015/08/singularidade.jpg>

Exibição simultânea de vídeos

- ✓ No vídeo é exibido a órbita de estrela envolta de um buraco negro. Com o experimento/prototipagem, tentou-se simular a mesma situação.

Figura 4.25 – Comparação da simulação feito no experimento/prototipagem



Fonte: Arquivo do autor / UCLA Galactic Center Group :

https://www.youtube.com/watch?time_continue=13&v=1PTNpTy2bY0&feature=emb_title.

Crédito: Advanced Visualization Lab, Centro Nacional de Aplicações de Supercomputação, Universidade de Illinois.

Uso do experimento/prototipagem

Dando sequência a atividade, foram mostradas 2 esferas de ferro aos alunos. Logo após, foi iniciado o uso do experimento/prototipagem propriamente dito, lançando-se uma esfera por vez (Fig. 4.26).

➤ 1º Lançamento da esfera

Lançou-se uma esfera dentro do experimento, com velocidade suficiente para que a esfera fizesse uma trajetória parabólica/hiperbólica, e saísse do “poço de gravidade”.

➤ 2º Lançamento da esfera

Lançou-se a esfera dentro do experimento com uma velocidade bem menor do que a utilizada na primeira, fazendo com que a esfera permanecesse “presa” dentro do “poço de gravidade”. Notou-se que a esfera começou com uma trajetória elíptica e, com passar do tempo, essa trajetória mudou, tornando-se uma trajetória em espiral.

➤ 3º Lançamento da esfera

Lançou-se, pela terceira vez a esfera, iniciando-se uma explicação com mais detalhes. No experimento de “poço gravitacional”, ao jogar a esfera, ela começa com uma velocidade inicial, essa velocidade vai decaindo por conta do atrito entre a esfera e a superfície do experimento. Devido a isto, a esfera vai perdendo velocidade e a sua trajetória também vai mudando, até se transformar em uma trajetória espiral, conforme ocorre em alguns fenômenos astrofísicos, como por exemplo: nos discos de acréscimo de matéria entorno de objetos compactos, tais como estrelas anãs brancas, estrelas de nêutron e buracos negros.

Antes de iniciar a segunda parte da etapa prática, foi exibido o vídeo contendo a simulação da trajetória espiral da esfera dentro do experimento/prototipagem, feito no GeoGebra (fig.4.25). A trajetória espiral é explicada matematicamente como uma combinação das funções exponenciais e seno/cosseno.

Tendo executado estes passos, procedeu-se aos questionamentos e discussões sobre o observado:

- ✓ O que acontece no experimento?
- ✓ Quais são os fatores observados que provocam mudanças nas trajetórias?
- ✓ Deformação do espaço-tempo;
- ✓ Força gravitacional;
- ✓ Energia – classificação das órbitas;
- ✓ Dissipação de energia;
- ✓ Velocidade de Escape;

Figura 4.26 – Explicando e usando o experimento/prototipagem



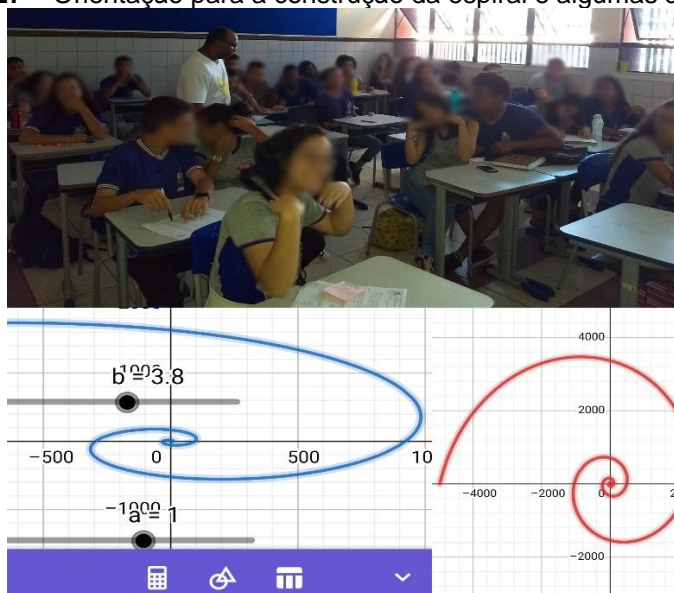
Fonte: Arquivo do autor.

Início do processo para a atividade de construção da espiral.

A execução da atividade construção da espiral só foi possível, após os estudantes terem visto os vídeos que foram exibidos durante a oficina, serem apresentados a situação problema com a temática da Física e Astronomia (Órbita) e

também realizar a atividade com o experimento poço gravitacional. Só assim, os estudantes poderiam fazer os gráficos e as discussões sobre função exponencial/seno/cosseno usando o GeoGebra (Fig. 4.27).

Figura 4.27 – Orientação para a construção da espiral e algumas construções



Fonte: Arquivo do autor.

Ao discutir a função exponencial/seno/cosseno, foram revisados os seguintes pontos: suas definições, seus domínios, sua imagem e propriedades. Logo depois, foi aberto o GeoGebra no computador do professor/mediador e projetada a sua janela principal no quadro. Começou-se, então, a trabalhar as seguintes partes da construção:

➤ Controles deslizantes

Os controles deslizantes são essenciais para a construção da espiral e, também, na interpretação das funções exponenciais. Assim, é importante trabalhar com valores dados pelos estudantes. Por isso, foi permitido que cada dupla escolhesse os valores de máximo e mínimo.

➤ Valor do ângulo (t)

A única exigência feita foi para que o valor de t não estivesse no intervalo menor que uma volta completa ($0 \leq t \leq 2\pi$), pois queria mostrar a variação do seno e cosseno dentro desse intervalo.

➤ Valor da base exponencial (a)

Foi usado e (número de Euler), mas, também, deixou-se a escolha a cargo das duplas.

Foram construídas as espirais. Antes de iniciar as discussões, o estudante D levantou a mão e perguntou:

– Posso usar um controle deslizante na base?

Ao que a resposta, pelo professor, foi “depende”.

Aproveitando a pergunta, foi criado o seguinte intervalo $-2 \leq a \leq 2$. Alguns alunos falaram que estava errado, mas, foi solicitado que mantivessem a calma, pois seria mostrado o que aconteceria com a função e também com a espiral.

Foram feitas as variações no controle deslizante para números negativos e para o valor de 1. Antes de ser perguntado, um grupo já estava falando que o problema era a base. Ao que foi dito (pelo professor):

– Pode ser qualquer intervalo dentro da definição da base ($a > 0$ e $a \neq 1$).

Solicitou-se que as duplas colocassem o expoente b igual a zero ($b = 0$). Depois, indagou-se onde estava a espiral?

A estudante G respondeu:

– Só estou vendo um ponto.

Confirmando o que a mesma havia dito, foi perguntado o porquê estava ocorrendo o fato. Os alunos, porém, não conseguiram responder. Sendo assim, foi lembrado aos mesmos a propriedade $b^0 = 1$ (com $b \neq 0$).

Embora o objetivo principal fosse o conceito de função, a atividade permeou outros assuntos, como intervalos e plano cartesiano. Não foi possível trabalhar as

espirais de todas as duplas, pois a Oficina ficou muito extensa e já havia ultrapassado uma aula além do previsto. Pediu-se que tirassem um *print* das suas espirais e que postassem no ambiente virtual. Além disso, ficou acordado que seria levado o Datashow para mostrar todas as outras espirais e comentar.

- ✓ Os estudantes escolheram as suas respectivas duplas para executarem a atividade construção de uma espiral;
- ✓ Durante a atividade, foi trabalhado o conceito geral de função, função exponencial, definição de seno e cosseno e, também, voltou-se a falar de órbita.

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo expõe-se a análise e discussão dos resultados obtidos na segunda execução do trabalho, posto que na primeira ocorreram erros teóricos, de contextualização e também nas implementações das ações. O capítulo está subdividido em 4 segmentos, respectivamente: Aplicação do Roteiro da Oficina; Análise de Resposta ao Uso das TICs; Análise da Ressignificação de Práticas Pedagógicas; Análise Global do Trabalho

5.1 APLICAÇÃO DO ROTEIRO DA OFICINA

A referida oficina, que tem como título ***Oficina para o entendimento de funções matemáticas por intermédio da Astronomia: aplicações no Ensino Médio***, foi aplicada dentro do componente curricular de Matemática para o 2º ano, envolvendo conteúdos de Astronomia e Física. O trabalho foi desenvolvido em uma turma do 2º ano do Ensino Médio, envolvendo 39 estudantes. O foco do assunto abordado versou sobre Funções, cujo conteúdo foi trabalhado de forma contextualizada e interdisciplinar, em interface com temas relacionados a Astronomia e mais especificamente órbitas de corpos celestes. Essa etapa se estruturou em três fases distintas, a saber: 1. A fase antes da sua aplicação; 2. A fase da aplicação; e 3. A fase de avaliação após aplicação.

5.1.1 FASE PRÉ- OFICINA

A primeira fase da oficina se destaca por exigir mais do professor e por ser a mais complicada, haja vista que é a base para o sucesso da aplicação da oficina, de modo que sua realização não depende exclusivamente do professor. Assim, por mais que o professor selecione materiais adequados, criativos e que abordem os conteúdos de maneira lúdica e significativa, se não conseguir atrair os estudantes, fazendo-os participar da atividade, ela certamente estará fadada ao fracasso. Deve-se considerar, também, as questões de recursos materiais, tais como falta de internet para o uso dos chromebooks e o número de computadores insuficiente.

Em relação à organização do ambiente de aprendizagem, com a criação do ambiente virtual no *Google Sala de Aula*, foi possível acompanhar os estudantes no desenvolvimento das atividades e atribuir comentários nas produções realizadas, quando necessário. Além disso, a cada nova atividade inserida, os estudantes recebiam uma mensagem via e-mail. Neste sentido, o ambiente virtual foi fundamental para a realização da oficina, uma vez que ajudou no desenvolvimento das habilidades de comunicação, colaboração, pensamento crítico e criatividade e na distribuição e postagem dos vídeos, tutoriais e materiais para estudo.

Deve-se ter cuidado ao produzir os materiais, principalmente os vídeos relacionados com o uso do GeoGebra, tendo em vista que mesmo escolhendo uma extensão que seja adequada, é possível que ocorra algum imprevisto. Isso porque há o uso da tecnologia, máquinas e pessoas, que podem ser falhos em algum momento. Assim, aconselha-se postar os vídeos e tutoriais no ambiente de aprendizagem com uma boa antecedência.

Na fase da capacitação, foram programadas duas aulas para que os estudantes pudessem conhecer o Programa GeoGebra (janelas, comandos e aplicações). Essas aulas tinham como propósito a preparação, o desenvolvimento e a aquisição de conhecimentos, habilidades e atitudes por parte dos estudantes, favorecendo, desse modo, o cumprimento das atividades propostas durante a oficina. Depois de sanadas as dificuldades encontradas no ambiente virtual em relação aos tutoriais e os vídeos, iniciou-se um diálogo com os estudantes a respeito da capacitação. Poucos dias antes da capacitação, foram disponibilizados alguns minutos das aulas para verificar se os mesmos tinham baixado o GeoGebra no celular, e se havia alguma dúvida sobre o programa.

Devido aos problemas técnicos com os *chromebooks*, os estudantes foram avisados que usariam apenas os celulares. No entanto, os problemas foram resolvidos em tempo hábil, tornando possível a utilização dos dois recursos durante a capacitação. Inicialmente, foram reservadas duas aulas para o treinamento, sendo que os alunos foram organizados em duplas. No entanto, devido às dificuldades apresentadas por um grupo de estudantes, acrescentou-se mais uma aula. Durante a capacitação com os *chromebooks*, alguns estudantes apresentaram certa resistência

em usar a máquina – “É besteira usar isso aqui, posso fazer no papel?”, disse um dos estudantes participantes. Por fim, outro estudante – componente da mesma equipe – relatou que a relutância do aluno em utilizar a máquina era porque ele não sabia usar o computador e estava com vergonha de informar ao professor. Posteriormente, verificou-se que esse fenômeno estava ocorrendo em outras quatro duplas. Para tentar resolver o problema, foi feita a troca das duplas e, com a ajuda da turma, “criou-se” a figura do estudante monitor. Com este fato, observa-se a necessidade de um levantamento prévio sobre a fluência dos estudantes referente ao uso de TICs.

As atividades desenvolvidas na capacitação consistiam em construir e analisar os gráficos das funções exponenciais e logarítmicas (domínio, imagem e condição de existência) e na resolução de questões do livro didático. A avaliação, nessa etapa, foi oral e de caráter qualitativo, ou seja, configurou-se em uma verificação e acompanhamento da aprendizagem, observando o quanto os alunos estavam entendendo de todo o processo. As atividades foram realizadas da seguinte maneira:

- ✓ Solicitou-se a construção do gráfico de uma função exponencial ou logarítmica – fornecendo a base e domínio, somente a base ou somente o domínio, além de pedir para determinar o valor da imagem para um certo valor de x ;
- ✓ Aguardou-se alguns minutos para as duplas processarem as informações e apresentarem uma resposta. No decorrer desse tempo, a dupla poderia tirar qualquer dúvida sobre a atividade ou comandos do programa, sendo orientadas a não corrigir as suas respostas, caso errassem;
- ✓ Passado o tempo, a resposta correta foi projetada no quadro (usando o datashow) e analisada. A seguir, as respostas incorretas foram projetadas em um mesmo plano e as discussões iniciadas.

Em uma das atividades, pediu-se que os alunos construíssem o gráfico de uma função exponencial qualquer. Então, uma dupla apresentou o seguinte questionamento: “Por que é sempre 1?” (Fig.5.1). No final das contas, o problema foi exposto para a turma e, após a discussão em sala de aula, via ambiente virtual (Fig.5.2), os alunos concluíram que o erro estava relacionado a definição da base da função exponencial ($a \neq 1$). A importância da realização desta etapa consiste na

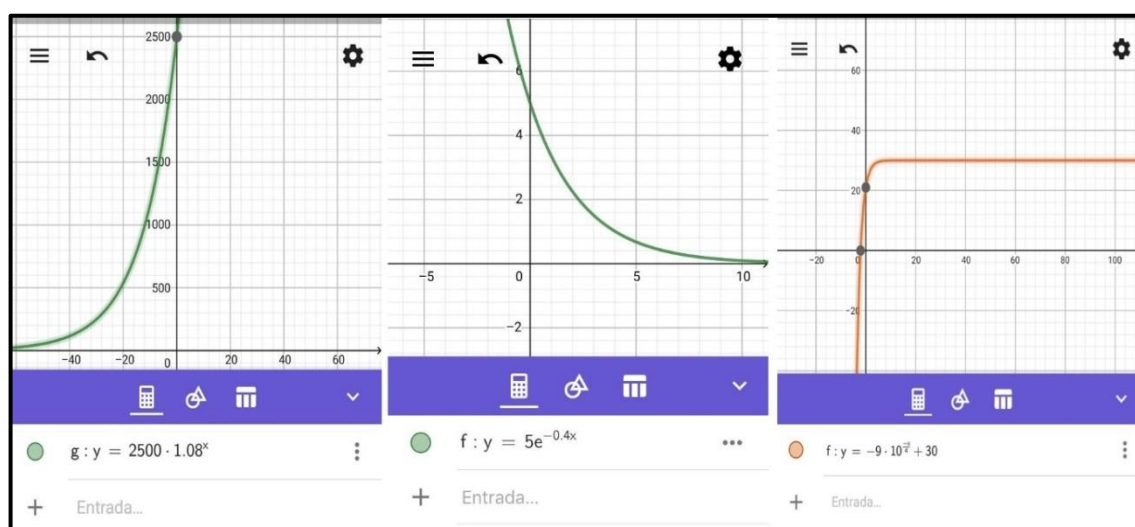
compreensão, construção e verificação por parte dos estudantes das características e condições de existência da função exponencial.

Figura 5.1 – Ilustração contendo uma resposta incorreta dada por uma dupla durante o treinamento



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Figura 5.2 – Ilustração contendo respostas corretas dadas durante o treinamento



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

5.1.2 FASE DE REALIZAÇÃO DA OFICINA

Nesta seção, serão descritas as diferentes etapas da realização da oficina, a saber: introdutória da teoria, feita por meio de vídeos e imagens; demonstrativa e experimental da prototipagem de movimento orbital de corpos celestes usando o experimento poço gravitacional, além da interpretação da prototipagem usando o GeoGebra (simulação); e também a execução da atividade sobre função exponencial/seno/cosseno (construção da espiral) no GeoGebra.

5.1.2.1 Introdução por meio de vídeos

Ao iniciar a oficina, falou-se sobre quais seriam os tópicos abordados, explicando-se que iria tratar de funções matemáticas, mas por meio da Física e Astronomia, com ênfase em órbita de corpos celestes. Então, ocorreu o seguinte fato: O estudante A levantou a mão e perguntou: “Professor, mas para que serve isso? Eu vou usar isso onde?”. Neste sentido, o estudante aponta para a necessidade que o professor tem de promover um ensino contextualizado, levantando uma discussão que tornou a introdução da oficina mais atrativa. Atentou-se para o fato de não ter ocorrido nenhum outro questionamento, o que levou o professor à necessidade da realização de algumas perguntas para a introdução de temas transversais e igualmente para a introdução do conceito de órbita:

– Quem aqui já usou o serviço do Uber? Ou já pediu comida por um aplicativo? E quem tem celular?

Como as respostas foram positivas para todas as perguntas, foi feito mais um questionamento.

– Como o motorista do Uber e o entregador sabem como chegar ao endereço certo?

– Pelo GPS, responderam.

Assim, o professor complementou a resposta dada pelos alunos da seguinte forma:

– O GPS precisa de satélites para funcionar corretamente e os mesmos estão em órbita. Por isso, podemos concluir que a aplicação do conceito de órbita faz parte do nosso cotidiano.

A segunda etapa das atividades englobou fenômenos astronômicos. Nela, houve uma participação um pouco maior em relação às outras, antes mesmo de começar a exibição dos vídeos e as suas respectivas discussões.

O primeiro vídeo exibido foi uma simulação do sistema solar, do jogo *Universe Sandbox*.^a Nessa simulação, é possível observar o sistema solar em 360 graus. O objetivo foi mostrar as órbitas de outros planetas e corpos celestes em torno do Sol. Ao terminar a explicação, uma estudante perguntou:

– Os planetas ficam rodando desse jeito mesmo?

Foi elucidado que, apesar de ser uma simulação, as órbitas estão bem próximas do que acontece na vida real.

Ao chegar no *slide* que falava sobre a determinação das órbitas, relacionada ao campo de força gravitacional, a partir da conservação da energia (Fig.4.18), os alunos ficaram apreensivos, acreditando que haveria uma avaliação. Então, foi mencionado que, apesar de envolver uma matemática “pesada”, ocorreria apenas a discussão acerca dos possíveis resultados da excentricidade, que estava sendo dada em função da energia, de modo que o quadro era um demonstrativo de como chegar ao resultado.

Resolvida a confusão inicial, mostrou-se (de forma bem resumida) que a partir da Força Gravitacional é possível definir órbitas por meio da energia (falou-se um pouco sobre energia potencial e cinética). Ao falar sobre energia potencial e energia cinética, houve uma boa surpresa: os alunos conseguiram se expressar claramente, exemplificando cada uma delas, evidenciando que eles conseguiram estabelecer uma relação entre temas ligados ao conteúdo de Física.

O quarto vídeo, cujo título é Gravidade (Fig.4.21), é de autoria do *designer* gráfico Carlos Ruas. Nele, o tema “gravidade” é abordado de maneira simples e divertida, por meio de animações. Vale ressaltar que, após a exibição do vídeo, ocorreu uma nova discussão sobre Gravidade, Força Gravitacional, Energia Potencial e Velocidade de Escape, sendo apresentado, também, um breve histórico sobre a vida de Newton.

Utilizou-se um trecho do documentário Além do Cosmos: O Espaço (Dublado) (Documentário *National Geographic*) (Figura 4.22) para mostrar como Albert Einstein redefiniu o conceito de gravidade falando sobre a deformação do espaço-tempo. Aproveitando essa “nova” definição, debateu-se a questão da gravidade como sendo o resultado da deformação provocada por corpos massivos no espaço-tempo. Então, foi possível introduzir a ideia de poço gravitacional. Nos dois *slides* seguintes, foi reforçado o conceito de deformação no espaço-tempo e poço gravitacional, além de ser traçado um paralelo entre o experimento/prototipagem e a ideia de poço gravitacional.

O vídeo: simulação das órbitas de estrelas em torno do buraco negro situado no centro da Via Láctea (Fig.4.20) foi usado para contextualizar a discussão sobre as órbitas (elíptica, parabólica e hiperbólica) para os estudantes. Mas, voltou-se a

abordá-lo por causa da sua relevância para o trabalho, pois esta simulação foi utilizada para:

- ✓ Discutir as questões sobre as órbitas de corpos celestes e sobre problemas físicos reais ligados à Astronomia;
- ✓ À deformação do espaço-tempo provocada por corpos massivos (neste caso buraco negro);
- ✓ Para comparações e discussões feitas ao exibir simultaneamente a simulação (Fig. 4.20) e a execução do experimento poço gravitacional (Fig. 4.25);
- ✓ E após a atividade prática com o poço gravitacional para explicar o decaimento das órbitas e o atrito.

Ao terminar a parte teórica da oficina, deu-se início a etapa prática, constituída por duas fases: a primeira relacionada ao uso do experimento/prototipagem e discussão das teorias; e a segunda referente à utilização do programa GeoGebra na descrição das órbitas de forma matemática, abordando o conceito das funções exponencial, senoidal e cossenoidal.

A estratégia utilizada na etapa prática da oficina se baseia no questionamento, ou seja, o ato de perguntar, norteando, dessa forma, o processo de ensino e aprendizagem. A etapa prática consistiu no uso do experimento/prototipagem e também no desenvolvimento de atividades por meio do GeoGebra, conforme detalhamento a seguir:

5.1.2.2 Apresentação e uso do experimento/prototipagem

O experimento/prototipagem (Fig.4.8) consistiu no modelo físico desenvolvido para demonstrar como seria o caso das órbitas dos corpos massivos, conforme apresentado no vídeo sobre o movimento de estrelas entorno do buraco negro no centro de nossa Galáxia (Fig. 4.20).

Ao apresentar o experimento/prototipagem aos grupos de estudantes, a primeira pergunta foi:

– Porque o experimento/prototipagem tem essa forma?

A maioria dos estudantes relacionou a forma do experimento/prototipagem a deformação do espaço-tempo, provocada por um corpo massivo. Mas, em um dos grupos, o aluno B disse:

– Não entendo como é possível.

Então, outro componente do grupo respondeu:

– Tu não viu não? É o “peso” do planeta.

Iniciou-se a intervenção, aproveitando uma parte da resposta do estudante, afirmando-se que planetas também provocam a deformação do espaço-tempo, mas o correto é falar massa do planeta e não peso.

Assim, foi retomado o exemplo da malha do lençol⁴ deformado por uma massa colocada sobre ele, para resgatar o conhecimento de que corpos massivos deformam o espaço-tempo, relembrando trechos do vídeo “Além do Cosmo”. Ademais retomou-se o *slide* onde há ilustrações exemplificando deformações do espaço-tempo. Antes mesmo que fosse realizada a segunda pergunta, o mesmo estudante falou sobre gravidade, afirmando que por isso as coisas giravam. Então, foi feita a correção, falando-se sobre força gravitacional e órbitas (ao que ele sorriu). Particularmente, a participação desse grupo foi bastante significativa.

Os grupos estavam interagindo, por meio do debate e questionamentos de forma satisfatória, sendo necessário fazer intervenções pontuais. Porém, o último grupo é que foi realmente desafiador, haja vista que um dos participantes, o estudante C, falou que não tinha entendido nada. Diante dessa afirmação foram feitas algumas perguntas a fim de compreender o que realmente ele não havia entendido. Assim, foi perguntado:

– Você sabe o porquê de o experimento/prototipagem ter essa forma? (pergunta do professor)

⁴ Essa é uma maneira de tentar imaginar a curvatura do espaço devido à gravitação. Contudo, esta visualização não está correta, pois ela ainda faz uma analogia com uma superfície bidimensional para o universo quadridimensional (MAIA, 2009).

Ele respondeu:

– Ah, professor, isso eu sei. O problema é que se tudo fica girando...

– Em órbita (fiz a correção).

– Tá! Em órbita. Então, por que ali (apontou para o experimento/prototipagem) acaba caindo, mas as coisas não caem no dia a dia?

Depois desta afirmação, houve uma compreensão sobre o problema. O aluno acompanhou fragmentos das interações e debates dos outros grupos, porém, sem participar das intervenções, ficou confuso. Por ter afirmado que sabia o motivo do experimento/prototipagem ter aquela forma, pedi que explicasse. Durante a explicação dada pelo estudante C, foram feitas apenas algumas considerações sobre a confusão entre peso e massa e quando usava o verbo “girar” para designar órbitas.

A partir das respostas do estudante, ampliou-se a informação sobre a determinação das órbitas num campo de forças gravitacionais a partir da conservação de energia (fato este que não acontece na prototipagem devido à dissipação por atrito). Foi projetado o *slide* sobre o tema no quadro, mostrando-se que o valor da excentricidade dependia da energia. Assim, pensando nos valores da energia, voltou-se a falar sobre os tipos de órbitas e sobre energia potencial e cinética.

Ao longo da execução do experimento “poço gravitacional” foram realizadas as seguintes observações/questionamentos aos estudantes, após executar os dois lançamentos:

- ✓ Como podiam explicar o que ocorreu no primeiro lançamento (órbita aberta parabólica/hiperbólica). A resposta foi:

– O senhor jogou com muita força.

Depois, perguntou-se como relacionar isso aos temas abordados. Após certo tempo, os estudantes conseguiram relacionar a velocidade de escape e a energia cinética. Foi confirmado que o raciocínio deles estava certo, lembrando-se o conceito de velocidade de escape e o vídeo gravidade, do Carlos Ruas. Ademais disso, relacionou-se a velocidade de escape com a força gravitacional e, conseqüentemente, a energia potencial, cinética e a discussão de órbitas abertas. Então, foi ressaltado, especialmente para o estudante C, que naquele momento, o tópico sobre captura gravitacional, que ele não havia compreendido inicialmente.

Com relação ao segundo lançamento, a seguinte pergunta foi feita:

- ✓ Qual é o tipo de órbita descrita pela esfera?

Tendo a maioria dos estudantes respondido que a órbita era uma elipse.

De fato, a resposta estava correta (a princípio), de modo que a esfera foi lançada novamente, analisando-se a sua trajetória. Afirmou-se que a esfera começava com uma órbita elíptica e, com o passar do tempo, ela vai decaindo, decaindo e a trajetória vai mudando, tornando-se uma trajetória em espiral, devido ao atrito da esfera com a superfície do experimento.

Aproveitando sobre a dúvida relacionada à razão do decaimento da órbita, solicitou-se aos alunos que observassem, depois de um certo tempo, a esfera realmente parava ou, como o estudante falou “caía” (a forma mais adequada de expressar é “decaía”). Aproveitou-se esse momento para esclarecer um dos fatores importantes que ocorria no experimento/prototipagem e que, até aquele momento, não tinha sido discutido com eles: a questão do atrito.

5.2 ANÁLISE DE RESPOSTA AO USO DOS TICS

A implementação das salas virtuais (*Google Classroom*) foi importante, pois, por meio delas, ampliou-se, de forma significativa, a participação dos estudantes durante as aulas e também melhorou o diálogo e as relações professor-estudante e estudante-estudante. Assim como, promoveu a participação de estudantes mais tímidos, que durante as aulas em sala pouco interagiam.

No início, a adesão por parte dos estudantes não foi significativa, as salas virtuais tinham entre 5 e 10 estudantes cada. Esta situação só foi alterada depois de muito diálogo, onde alguns os estudantes relataram estar com receio e/ou não sabiam como trabalhar no ambiente virtual.

A partir do II Ciclo do ano letivo, os estudantes se apropriaram do ambiente virtual, então eles começaram a postar lista de exercícios (às vezes até de outros professores), questões de vestibulares, questões do ENEM, dúvidas sobre os

conteúdos abordados em sala links de vídeo aulas, com a finalidade de verificar se estava de acordo com os conteúdos abordados. Logo, o ambiente virtual se configurou em um prolongamento da sala de aula presencial, pois os estudantes começaram a conversar, a discutir, a expor seus argumentos sobre os conteúdos e a tirar dúvidas referentes aos assuntos abordados.

Em relação ao uso do celular durante as aulas para trabalhar com o GeoGebra, notou-se uma mudança significativa por parte dos estudantes sobre o assunto função. Antes do professor começar a abordar outras funções, os estudantes começaram a construir e tentavam analisar os gráficos, discutir a definição e determinar pontos nos gráficos. Alguns estudantes se familiarizaram tanto com o programa que chegaram a propor o uso do mesmo durante as avaliações.

O uso das TICs durante o trabalho produziu resultados satisfatórios, pois proporcionou a criação de um ambiente (salas virtuais) fecundo para os estudantes exporem as suas ideias, dúvidas e aprendizados. Do mesmo modo, constitui-se um elemento motivador para os estudantes, por meio do uso do GeoGebra.

5.3 ANÁLISE DA RESSIGNIFICAÇÃO DE PRÁTICAS PEDAGÓGICAS

A ressignificação de práticas pedagógica perpassou todas as etapas do trabalho, ela está presente na ampliação do espaço para o processo de desenvolvimento intelectual, afetivo, de competências e atitudes dos estudantes por meio da criação das salas virtuais (*Google Classroom*), cujos resultados foram estudantes mais participativos e questionadores.

Ao mudar a abordagem metodológica para apresentação do conteúdo função a partir da utilização do programa GeoGebra, notou-se que os estudantes ficaram motivados e também com grande interesse sobre os porquês (definição, domínio e imagem) do assunto.

Para além de uma metodologia tradicional, arcaica e engessada, de trabalhar o conteúdo dentro da sala de aula, optou-se pela execução de uma oficina pedagógica, cuja situação de ensino e aprendizagem é aberta e dinâmica, proporcionando aos estudantes, com o apoio da mediação pedagógica do professor, um ambiente onde possam: desenvolver a interação entre eles; o debate; o diálogo;

promover a construção do conhecimento; motivar o desenvolvimento de atitudes, respeito aos outros e as suas opiniões além do desenvolvimento da criticidade.

O resultado da ressignificação das práticas pedagógicas realizadas no trabalho por meio da utilização das TICs, da interdisciplinaridade (Matemática, Física, Astronomia) nos tópicos desenvolvidos na oficina e do uso do experimento poço gravitacional, configurou-se significativo, porque mesmo após alguns dias da aplicação da oficina pedagógica, os estudantes ainda perguntavam e debatiam sobre os tópicos discutidos, além de desejarem saber se haveriam outras e quais temas seriam abordados.

5.4 ANÁLISE GLOBAL DO TRABALHO

Durante a oficina, tudo transcorreu dentro do esperado. Foram feitos alguns comentários pontuando determinados aspectos (como duração da oficina, conteúdos trabalhados etc.). Ao final da oficina, durante o *feedback dado* pelos estudantes, foi questionado se haveria outras e quando. Ainda, durante o feedback, um estudante sugeriu fazer o experimento do poço gravitacional, utilizando um tipo de malha usada para decorar eventos. Então, momentos antes de dispensar a turma, o grupo que estava “brincando” com o poço gravitacional fez um relato sobre o tempo que uma esfera levou para cair e também o que acontecia ao colocar várias esferas em momentos diferentes. Logo depois, durante a aula subsequente, um estudante falou sobre a explosão da supernova que ocorrerá em 2022 e se era possível dar uma aula sobre o assunto. Ademais, ocorreu o fato de 2 estudantes mostrarem as configurações usadas para projetar ao mesmo tempo várias espirais de cores e tamanhos diferentes no GeoGebra.

No decurso das atividades, foi possível perceber/desenvolver o entendimento sobre o processo de construção/modelagem dos processos físicos/astronômicos na maioria dos estudantes, por meio da análise e debate sobre as dúvidas e respostas apresentadas pelos grupos ao usarem o experimento poço gravitacional. Assim, usava-se o material teórico (slides da apresentação) da oficina para validar,

questionar, ajudar a compreensão e também retificar conceitos e definições sobre as cônicas, as órbitas de corpos celestes, força gravitacional e corpos celestes.

Em relação às funções (exponencial, seno e cosseno) houve ganho significativo no tocante ao entendimento, pois as discussões foram além da simples substituição de valores nas funções para uma análise mais apuradas sobre situações e problemas contextualizados, aplicação no cotidiano e também definição, domínio e imagem, além de contemplar um pouco outras funções.

O desenvolvimento da proposta revelou-se promissora, sobretudo no que concerne à participação e engajamento dos estudantes em todas as etapas do trabalho. Então, diante desses resultados, acredita-se necessário reelaborar o verdadeiro papel do profissional em educação, que não pode ser apenas um repetidor de conteúdos, mas um profissional capaz de ter serenidade e sensibilidade para aprender e ressignificar as suas práticas pedagógicas, tendo sempre como alvo a aprendizagem significativa dos estudantes.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A discussão do tema proposto neste trabalho tem o intuito de colaborar para uma proposta relacionada com as dificuldades dos estudantes no entendimento do conceito e a representação de função na Educação Básica. Diante deste fato, tem-se a seguinte questão referente ao ensino de matemática na Educação Básica: *Como resolver o problema da compreensão do conceito e utilizações de funções no Ensino Médio?* Então, buscando sanar o problema, propôs-se a implementação de uma metodologia elaborada/executada com base no princípio da ressignificação das práticas pedagógicas, as quais se materializaram através da utilização das TICs, da contextualização/interdisciplinaridade (Matemática, Física, Astronomia) nos tópicos desenvolvidos dentro de uma oficina pedagógica e do uso do experimento/prototipagem poço gravitacional.

Sendo assim, percorreu-se o seguinte objetivo geral: aplicar conhecimentos e conceitos básicos de Astronomia como elemento motivador e de contextualização no ensino de funções matemáticas para estudantes do 2º ano do Ensino Médio em uma escola estadual. Buscou-se, também, atingir os objetivos específicos a seguir: incentivar o estudo científico de fenômenos do Universo visando a difusão da Astronomia na escola; analisar situações da vida real identificando modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução; interpretar e criticar resultados no contexto do problema; utilizar ferramentas de análise e visualização matemática; e desenvolver experimentos e realizar oficinas destinadas a contextualização das situações astronômicas sobre o ponto de vista matemático.

Neste sentido, com este trabalho, para resolver o problema, propõem-se a implementação de uma metodologia elaborada/executada por ressignificação das práticas pedagógicas realizadas por meio da utilização das TICs, da contextualização/interdisciplinaridade (Matemática, Física, Astronomia) nos tópicos desenvolvidos dentro de uma oficina pedagógica que, a partir de problemas reais, explore Funções de forma interdisciplinar, por meio de temas relacionados com Astronomia e mais especificamente Órbitas, auxiliando os estudantes na concepção sobre o conceito de função e as suas aplicações, ou seja, favorecendo uma evolução

qualitativa na forma como eles concebem tal noção. Com estas metodologias, a proposta foi aplicada no ambiente do Colégio Modelo Luís Eduardo Magalhães em uma turma de 39 estudantes do 2º ano do Ensino Médio.

Com base nos resultados obtidos ao longo do trabalho, afirma-se que os objetivos foram alcançados, pois a proposta provocou mudanças significativas nas concepções dos estudantes sobre o conceito e a representação de função, na medida em que eles passaram a relacioná-lo com seus aspectos de variação, representação, correspondência e dependência entre variáveis. E, por abordar o tema por meio de conceitos astronômicos, perceberam que algumas funções podem corresponder a situações da realidade.

Para alcançar os demais objetivos, o planejamento e a implementação do trabalho teve como parte integrante ações práticas para os alunos, tais como: criação do ambiente virtual, que proporcionou maior interação professor – estudante e estudante-estudante; apresentação de vídeos; treinamento para usar o GeoGebra; aulas práticas; construção e análise de gráficos por meio do GeoGebra; discussão do conceito de função usando o GeoGebra; e utilização de um experimento/prototipagem que permitiu a contextualização prática na oficina dos conceitos abordados sobre órbitas.

Em relação aos efeitos positivos produzidos no decurso das atividades, acredita-se ter conseguido obter os seguintes resultados, com a maioria dos estudantes:

- ✓ Participação mais ativa: na sala de aula e, principalmente, no ambiente virtual, os alunos começaram a expor mais as suas dúvidas e como entendiam os conceitos abordados em sala de aula;
- ✓ Trabalhando em duplas ou em grupo: participaram ativamente na elaboração do conceito de função, especialmente, durante as atividades envolvendo o GeoGebra;
- ✓ Compreenderam que um gráfico e uma tabela podem representar uma função, independentemente da existência e/ou conhecimento de sua representação algébrica;
- ✓ Construíram gráficos de algumas funções e reconheceram seus elementos e características principais, ora utilizando papel ora utilizando o

GeoGebra.

Mesmo que estes resultados mostrem indícios positivos, foi possível também observar os seguintes aspectos negativos na aplicação da oficina:

- ✓ Alguns estudantes mostravam uma enorme resistência na utilização do GeoGebra, alegando que o programa era complicado de mais;
- ✓ Alguns estudantes não postavam as atividades no ambiente virtual, o que fazia com que não participassem das discussões de forma efetiva e, também, comprometia o seu rendimento em algumas atividades.

Em relação às perspectivas de continuidade do trabalho, sentiu-se a necessidade de abordar alguns aspectos mais detalhadamente, como as noções de domínio e imagem. Notou-se, ainda, a necessidade de apresentar aos estudantes novas situações-problema envolvendo conceitos astronômicos, em que apareçam funções diferentes das abordadas no trabalho, porque alguns estudantes perguntaram se havia mais experimento/prototipagens e quando poderiam usá-los. Durante o uso do experimento/prototipagem, observou-se que a maioria dos estudantes não queria parar de usá-lo, pois estavam formulando hipóteses, tais como:

- ✓ Se empregasse uma determinada força em ângulos específicos;
- ✓ Se mudasse a quantidade de esferas, o que aconteceria;
- ✓ Se jogasse a esfera no sentido horário ou anti-horário, o que aconteceria com a órbita.

Em suma, em decorrência deste trabalho, levando em conta seu processo e resultados, reafirma-se, portanto, suas contribuições significativas para a melhoria do ensino de Matemática, uma vez que o aprendizado construído perpassou não apenas o conhecimento técnico, mas contemplou a formação para uma cultura ampla, desenvolvendo meios para a interpretação de fatos naturais, compreensão de procedimentos e equipamentos do cotidiano social e profissional, assim como para a articulação de uma visão do mundo natural e social.

REFERÊNCIAS

ANADON, M., MACHADO, P. B. **Reflexões teórico-metodológicas sobre as representações sociais**. Salvador: UNEB, 2001.

ARRUDA, S; M. LABURÚ, C. E. Considerações sobre a função do experimento/prototipagem no ensino de ciências. In: **Pesquisas em ensino de ciências e matemática**. Série: Ciências & Educação, n. 3, Bauru, São Paulo, 1996, p.14-24.

AUDINO, D. F. **Objetos de aprendizagem hipermídia aplicado à Cartografia escolar no sexto ano do ensino Fundamental em Geografia**. Dissertação (Mestrado em educação) –Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012.

Disponível em:< <https://nepegeo.paginas.ufsc.br/files/2015/12/Objetos-de-aprendizagem-hiperm%C3%ADdia.pdf>>. Acesso em:10 set. 2018.

BALBINO, J. Objetos de aprendizagem: contribuições para a sua genealogia. **Educação e Tecnologia**, abr. 2007, p. 1-10. Disponível em: <http://www.dicasl.com.br/educacao_tecnologia/educacao_tecnologia_20070423.php#WURZ9oAzrIU>. Acesso em: 25 abr. 2018.

BARCA, I. Aula Oficina: do projecto à avaliação. In: BARCA, Isabel (Org.). **Para uma educação histórica com qualidade**: atas da Quarta Jornada de Educação Histórica. Braga: Uminho, 2004.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática e os Professores**: A questão da formação. São Paulo: In. Bolema, 2001.

BARRETO, M. M. Tendências atuais sobre o ensino de funções no Ensino Médio. UFRGS - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. 2008. Disponível em:http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_II/modulo_II/pdf/funcoes.pdf >. Acesso em: 20 de out 2018

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Ed. Edgard Blucher Ltda., 2006.

BRAGA, J. (Org.). **Objetos de aprendizagem volume 1: introdução e fundamentos**. Santo André: UFABC, 2015. 157 p. Disponível em: <http://pesquisa.ufabc.edu.br/intera/?page_id=370>. Acesso em: 3 abr. 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais: Ensino Médio**. Brasília, Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica, 1999.

_____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica **Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Secretaria de Educação Básica. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006.

_____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio: Orientações educacionais complementares aos Parâmetros curriculares. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC/SEMT, 2002.

_____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares para o ensino Médio (PCNEM)**. Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEMT, 2000b.

BURACO NEGRO. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2020. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Buraco_negro&oldid=58348849>. Acesso em: 10 mai. 2020.

BRETONES, P. S. **Disciplinas Introdutórias e Astronomia nos Cursos Superiores do Brasil**. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, 1999. 200. f

CANIATO, R. **O que é Astronomia**. São Paulo: Brasiliense, 1994.

CORDEIRO, J. C. L. **Material didático contextualizado na astronomia para contribuir na melhoria de habilidades matemáticas dos estudantes do ensino médio em física e matemática**. 2017. Dissertação (Programa de Pós-graduação de Mestrado Profissional em Astronomia), Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, 2017. 149 f.

COSTA, C. B. J. **O conhecimento do professor de Matemática sobre conceito de função**. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008. 96 f.

FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F. Equações diferenciais de segunda ordem. In IMPA, editor, **Equações Diferenciais Aplicadas**, II, capítulo 4, p. 119. Figueiredo-Neves. 2ª ed. Rio de Janeiro, 2002.

DORNELAS, J.J.B. **Análise de uma sequência didática para a aprendizagem do conceito de função afim**. 2007. Dissertação (Mestre em Ensino das Ciências Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2007. 181 f.

FARIAS, M. F.. **Funções e GeoGebra no Ensino Médio**. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2014. 62 f.

FILHO, K. S. O.; SARAIVA, M. F. O.. **Astronomia e Astrofísica**. Departamento de Astronomia - Instituto de Física. Universidade Federal do Rio Grande do Sul ,2014.

FRANCHI, C. M. G. G.; DOS REIS, R. G.; BORGES NETO, M. F. BREVE HISTÓRIA DOS BURACOS NEGROS. **Revista Científica Unilago**, v. 1, p. 41-53, 2013.

FREITAS, R. de O.; CARVALHO, M. Tecnologias móveis: tablets e smartphones no ensino da matemática. *Laplage em Revista*, [S. l.], v. 3, n. 2, p. p.47-61, 2017.

Disponível em: <<https://www.laplageemrevista.ufscar.br/index.php/lpg/article/view/341>>. Acesso em: 2 set. 2018.

GALLOTTA, A.; NUNES, C. A. **Objetos de aprendizagem a serviço do professor**. 2004. Disponível em: <www.microsoft.com/brasil/educacao/parceiro/objeto_texto.msp>. Acesso em: 16 set. 2018.

GODOY, A. S. Introdução à Pesquisa Qualitativa e suas Possibilidades. **Revista de Administração de Empresas**. Fundação Getúlio Vargas, Escola de Administração de Empresas de S. Paulo, v. 35, n. 2, p. 57-63, 1995. Disponível em: <<https://www.scielo.br/pdf/rae/v35n2/a08v35n2.pdf> > Acesso em: 28 set. 2018

GOMES, E. R. **Objetos inteligentes de aprendizagem**: uma abordagem baseada em agentes para objetos de aprendizagem. 2005. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Instituto de Informática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2005. 98 f.

GONÇALVES, A. A. M. R. **Formação de professores mediada por tecnologias**: a televisão como recurso pedagógico. Feira de Santana: UEFS, 2003.

GUTIERRES, F.; PRIETO, D. **A mediação pedagógica**. Campinas: Papyrus, 1994.
HALLIDAY, David; RENISCK, Robert; WALKER, Jearl. (2009). Lei da gravitação universal. In LTC, editor, **Fundamentos de Física**, volume 2: gravitação, ondas e termodinâmica, volume 2, chapter 13, Halliday-Resnick, Rio de Janeiro, 8th edition.

HENGEMÜHLE, A. **Formação de professores**: da função de ensinar ao resgate da educação. 2. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2008.

HOUSE, P. A. Reformular a álgebra da escola média: por que e como? In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (org.) **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. p. 1-8.

JUNIOR, A. S. L. As novas tecnologias e a educação escolar. **Revista da FAEEBA, Educação e Contemporaneidade**, Salvador, ano 1, n. 8, p. 89-98, jan. /jun., 2002.

LEITE, C. & HOUSOME Y. Os professores de ciências e suas formas de pensar Astronomia. **Revista Latino-Americana de Educação em Astronomia** – RELEA, Limeira, v. 4, 2007.

LIEBAN, D. E.; MULER, T. J., Construção de utilitários com software GeoGebra: Uma proposta de divulgação da geometria dinâmica entre professores e alunos. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional**, São Paulo, v. 1, 2012, p. 37- 50.

LUZ, S. V. da. **Aprendizagem significativa de função do 1º grau: uma investigação por meio da modelagem matemática e dos mapas conceituais**. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá – PR, 2010. 172 f.

MAIA, N. B. **Introdução à Relatividade**. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

MALUF, V. J. **A Terra no Espaço: A Desconstrução do Objeto Real na Construção do Objeto Científico**. Dissertação (Mestre em Educação Programa Integrado de Pós - Graduação em Educação) - Universidade Federal de Mato Grosso, 2000. 144 f.

MARQUES, G. C. **Dinâmica do Movimento dos Corpos**. Disponível em: <https://midia.atp.usp.br/plc/plc0002/impressos/plc0002_16.pdf>. Acesso em: 03 ma. 2018.

MASETTO, M. T. **Competência pedagógica do professor universitário**. São Paulo: Summus, 2003.

MENDES, A. **TIC – Muita gente está comentando, mas você sabe o que é?** Portal iMaster, mar. 2008. Disponível em: <<http://imasters.com.br/artigo/8278/gerencia-de-ti/tic-muita-gente-esta-comentando-mas-voce-sabe-o-que-e/>> . Acesso em: 09 out. 2018.

MORAIS, C. A. L. **A Astronomia no Ensino da Matemática. Uma proposta para o Ensino Secundário**. Dissertação de Mestrado em Ensino de Astronomia. Departamento de Matemática Aplicada - Faculdade de Ciências. Porto: Universidade do Porto, 2003. 223 f.

MORAN, J. M.; MASETTO, Marcos T.; BEHRENS, Marilda Aparecida. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. 6. ed. Campinas, São Paulo: Papyrus, 2000.

MOREIRA, M. A. **Metodologias de pesquisa em ensino**. 1 ed. Livraria da Física, São Paulo, 2003.

MOURÃO, R. R. F. **Da terra às galáxias: uma introdução à astrofísica**. Petrópolis, RJ: Ed. Vozes, 1997

NEVES, M. C. D.. **Astronomia de régua e compasso: de Kepler a Ptolomeu**. 1986. Dissertação - Instituto de Física, UNICAMP, Campinas, 1986.

NÓBRIGA, J. C. C.; ARAÚJO, L. C. L. **Aprendendo Matemática com o Geogebra**. São Paulo: Editora Exato, 2018.

OLAVO, F. **ESPIRAL logarítmica em português**. Youtube. 14 de set de 2015. 4min.42s. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=KUSCxBIXm-c>>. Acesso em: 15 mar. 2018.

OLIVEIRA, R. S. **Astronomia no ensino fundamental**. Disponível em: <<http://www.asterdomus.com.br/>>. Texto gerado em 1997. Acesso em: 10 maio 2018

PALANGANA, I. C. **Desenvolvimento e aprendizagem em Piaget e Vigotski: A relevância do social**. 6 ed. São Paulo: Summus, 2015.

PAVIANI, N. M. S.; FONTANA, N. M. Oficinas pedagógicas: relato de uma experiência. **Conjectura**, Caxias do Sul, v. 2, n. 14, p. 77-88, maio/agosto 2009. Disponível em: <http://www.uces.br/etc/revistas/index.php/conjectura/article/view/16/15>. Acesso em: 08 ago. 2018

PINTO, C. F. **Dissertações brasileiras sobre o ensino de função afim, a partir da implementação de sequências didáticas, produzidas no período de 2009 a 2012: Questões para formação de professores e para pesquisa**. 2014. Dissertação (Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática), Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014. 199 f.

PIRES, R. F. **Concepções de Professores e Estudantes dos Ensinos Médio e Superior**. Tese (Doutor em Educação Matemática Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014. 440 f.

PIRES, R. F. **O conceito de função: uma análise histórico epistemológica**. Sociedade Brasileira de Educação Matemática: XII Encontro Nacional de Educação Matemática- Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades. São Paulo – SP, 13 a 16 de julho de 2016.

Disponível em: < http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/6006_2426_ID.pdf >. Acesso em: 17 set. 2018.

REGO, T. C. **Vygotsky: uma perspectiva histórico-cultural da educação**. 25. ed. Rio de Janeiro: Vozes, 2014.

REZENDE, W. M.; PESCO, D. U. e BORTOLOSSI, H. J., **Explorando aspectos dinâmicos no ensino de funções reais com recursos do GeoGebra**. Instituto de Matemática e Estatística. 1a. Conferência Latino Americana de GeoGebra, 2012.

RIVED – **Rede Interativa Virtual de Educação**. 2018. Disponível em: <<http://rived.proinfo.mec.gov.br/>>. Acesso em: 31 de outubro de 2018.

SÁ, A. L. de; MACHADO, M. C. O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA NO ESTUDO DE FUNÇÕES. Anais do Encontro Virtual de Documentação em Software Livre e Congresso Internacional de Linguagem e Tecnologia Online, [S.l.], v. 6, n. 1, jun. 2017. ISSN 2317-0239. Disponível em: <http://www.periodicos.letras.ufmg.br/index.php/anais_linguagem_tecnologia/article/view/12142/10362>. Acesso em: 20 set. 2018.

SCHWARZ, O. **Sobre as concepções de funções dos alunos ao termino do 2º grau**. 1995. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1995.132 f.

SEVERINO, Antônio Joaquim. **Metodologia do trabalho científico**. 22. ed. São Paulo: Cortez, 2002.

SILVA, M. Sala de aula interativa: a educação presencial e a distância em sintonia com a era digital e com a cidadania. In: CONGRESSO BRASILEIRO DA COMUNICAÇÃO, 24., 2001, Campo Grande. **Anais do XXIV Congresso Brasileiro da Comunicação**, Campo Grande: CBC, set. 2001.

SILVA, R. R.; MACHADO, L. P. F.; TUNES, E. Experimentar sem medo de errar. In: SANTOS, W. L.; MALDANER, O. A.: (Org.). **Ensino de Química em foco**. Ijuí (RS): Unijuí, 2010. p. 231-261.

SILVA, S. C.; MADRUGA, Z. E. DE F.; SILVA, F. DOS S. Modelagem Matemática como apoio ao ensino e aprendizagem de função quadrática. **Revista de Educação Matemática**, v. 16, n. 21, p. 101 - 118, 1 jan. 2019. Disponível em: <<https://www.revistasbemsp.com.br/REMat-SP/article/view/214>>. Acesso em: 05 set. 2018.

SOUZA, R. A. de. **A modelagem matemática como proposta de ensino e aprendizagem do conceito de função**. 2011. Dissertação (Mestre Profissional em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo PUC-SP, São Paulo - SP, 2011. 107 f.

VIANA FILHO, J. P. **Ensino e Aprendizagem de Função: uma metanálise de dissertações Brasileiras sobre modelagem matemática produzidas entre 1987 e 2010**. 2012. Dissertação (Mestre em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo PUC-SP, São Paulo - SP, 2012. 188 f.

VIEIRA, E.; VALQUIND, L. **Oficinas de Ensino: O quê? Por quê? Como?** 4. ed. Porto Alegre – RS. Edipucrs, 2002.

VIEIRA, C. E. M.; NICOLEIT, E. R. Desenvolvimento de Objeto de Aprendizagem, baseado em Especificações de Normatização SCORM, para o Caso de Suporte à Aprendizagem de Funções. **RENOTE** - Revista Novas Tecnologias na Educação, v. 5, n. 1, p.1- 10, jul. 2007. Disponível em: <<https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/14168/8098>> Acesso em: 17 set. 2018

WILL, C. M. Nas curvas do espaço-tempo. **Revista Superinteressante**, 31 out. 2016. Disponível em: <<https://super.abril.com.br/tecnologia/nas-curvas-do-espaco-tempo/>>. Acesso em: 6 de outubro de 2018.

ZANOLLA, S. R. S. O conceito de mediação em Vigotski e Adorno. **Psicol. Soc.**, Belo Horizonte, v. 24, n. 1, p. 5-14, abr. 2012. Disponível em <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0102-71822012000100002&lng=pt&nrm=iso>. Acesso em 15 set. 2018.