

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS ENERGÉTICAS NA
MODELAGEM DO CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS CURTAS DE AÇO
SOB FLEXÃO

Júlia Barbosa Neves

FEIRA DE SANTANA, BA - BRASIL
SETEMBRO/2012

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS ENERGÉTICAS NA
MODELAGEM DO CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS CURTAS DE AÇO
SOB FLEXÃO

Júlia Barbosa Neves

Orientadores: Prof. José Mário Feitosa Lima, D.Sc.

Prof. Paulo Roberto Lopes Lima, D.Sc.

Dissertação submetida ao corpo docente do
Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil e
Ambiental como parte dos requisitos necessários à
obtenção do Título de Mestre em Ciências em
Engenharia Civil e Ambiental.

FEIRA DE SANTANA, BA - BRASIL
SETEMBRO/2012

APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS ENERGÉTICAS NA
MODELAGEM DO CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS CURTAS DE AÇO
SOB FLEXÃO

Júlia Barbosa Neves

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil e Ambiental da Universidade Estadual de Feira de Santana como parte dos requisitos necessários à obtenção do Título de Mestre em Ciências em Engenharia Civil e Ambiental.

Aprovado por:

Prof. José Mário Feitosa Lima, D.Sc. (Orientador)
Universidade Estadual de Feira de Santana

Prof. Paulo Roberto Lopes Lima, D.Sc. (Orientador)
Universidade Estadual de Feira de Santana

Prof. Flávio Pietrobon Costa, D.Sc.
Universidade Estadual de Santa Cruz

Prof.^a Cintia Maria Ariani Fontes, D. Sc.
Universidade Estadual de Feira de Santana

FEIRA DE SANTANA, BA - BRASIL

SETEMBRO/2012

DEDICATÓRIA

Aos meus pais

“Esse eu que é vós
pois não aguento ser apenas mim,
preciso dos outros [DE VOCÊS]
para me manter de pé [...].”

(Clarice Lispector)

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelos desígnios de Sua vontade. Dignidade.

Aos meus pais, minhas maiores referências, que acreditam incondicionalmente no meu potencial e vibraram com esse trabalho, cientes de que, na verdade, é mais uma conquista alcançada por eles. “Amor matéria-prima”.

Ao meu irmão, que me ensina diariamente a dar às coisas, às situações e às pessoas o valor que elas realmente têm. Nem mais, nem menos. “Amor que não prescreve”.

Aos meus Orientadores, Professores José Mário e Paulo Roberto, por terem contribuído com meu amadurecimento pessoal e profissional. Compromisso.

Aos meus colegas de turma, que me fizeram saber que o todo é maior que a soma das partes. Unidade.

Aos Professores do PPGECEA, pela competência no exercício de suas atividades. Admiração.

Aos Funcionários do PPGECEA e do LABOTEC pela leveza do dia a dia. Motivação.

Ao Professor Antônio Sérgio por confiar em mim, por acreditar na minha competência. Incentivo.

Aos familiares que estão sempre dispostos a me ajudar. Proteção.

Às minhas avós pelas orações diárias. Ternura.

Aos meus avôs pelo legado. Memória.

À Tia Val pela intercessão. Fé.

Aos amigos que tão docemente acompanharam a minha trajetória neste projeto, como costumam fazer, sempre que julgo algo muito importante para mim. Solidez.

À FAPESB por ter financiado minha intenção. Viabilidade.

“...dança
na corda bamba de sombrinha
em cada passo dessa linha
pode se machucar.
Azar! A esperança equilibrista
sabe que o show de todo artista
tem que continuar.”

(João Bosco e Aldir Blanc)

Resumo da Dissertação apresentada ao PPGECEA/UEFS como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS ENERGÉTICAS NA
MODELAGEM DO CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS CURTAS DE AÇO
SOB FLEXÃO

Júlia Barbosa Neves

SETEMBRO/2012

Orientadores: Prof. José Mário Feitosa Lima, D.Sc.

Prof. Paulo Roberto Lopes Lima, D.Sc

Programa: Engenharia Civil e Ambiental

A previsão do comportamento de vigas de concreto armado sob flexão é fundamental para o adequado dimensionamento destes elementos. Usualmente, os modelos não incorporam a contribuição do concreto tracionado, o que pode subestimar as deformações no elemento estrutural que utilizem o concreto reforçado com fibras (CRFA) sob cargas de curta e longa duração. No presente trabalho é apresentada uma formulação variacional com base no método das diferenças finitas energéticas (MDFE) para a previsão do comportamento à flexão de vigas de concreto simples ou armado reforçadas com fibras de aço. O modelo proposto combina a teoria clássica de laminados (TCL) com um modelo de dano (Mazars, 1984) aplicado ao concreto. O reforço (armadura longitudinal) foi considerado como uma lâmina de um material elasto-plástico perfeito. A comparação dos resultados numéricos com resultados encontrados na literatura para vigas de concreto armado, em termos de carga-deslocamento, demonstra a coerência do modelo proposto.

Palavras-chave: concreto reforçado com fibras de aço, modelo de dano de Mazars; teoria clássica de laminados; método das diferenças finitas energéticas.

Abstract of Dissertation presented to PPGECEA/UEFS as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

APPLICATION OF THE ENERGY FINITE DIFFERENCES METHOD IN STEEL
FIBER REINFORCED CONCRETE UNDER BENDING MODEL

Júlia Barbosa Neves

SEPTEMBER/2012

Advisors: Prof. José Mário Feitosa Lima, D.Sc.
Prof. Paulo Roberto Lopes Lima, D.Sc

Department: Civil and Environment Engineering

The prediction of the reinforced concrete beams behavior under bending is essential to design these elements. Usually the models do not incorporate the concrete stress contribution, which may underestimate the structural element strain that use steel fiber reinforced concrete (SFRC) under permanent or temporary loads. This work presents a variational formulation based on the finite difference energy method (EFD) in predicting the flexural behavior of concrete beams reinforced, that uses SFRC. The proposed model uses the classical lamination theory (CLT) with a damage model (Mazars, 1984) applied to the SFRC. The reinforcement was considered as a layer of a perfect elastic-plastic material. Comparing the load-displacement numerical results with those of the literature to reinforced concrete beams demonstrates the consistency of the proposed model.

Keywords: steel fiber reinforced concrete, Mazars damage model, classical lamination theory, finite difference energy method

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	OBJETIVOS	4
1.2	ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO	4
2	INFLUÊNCIA DAS FIBRAS CURTAS DE AÇO NO COMPORTAMENTO DO CRFA	5
2.1	ESTADO FRESCO	5
2.2	COMPORTAMENTO EM COMPRESSÃO	8
2.2.1	Propriedades mecânicas em compressão.....	8
2.2.2	Leis constitutivas de compressão	11
2.3	COMPORTAMENTO EM TRAÇÃO	14
2.3.1	Propriedades mecânicas em tração.....	14
2.3.2	Leis constitutivas de tração.....	17
2.4	COMPORTAMENTO EM FLEXÃO	19
2.5	RESISTÊNCIA AO CISALHAMENTO	25
3	ASPECTOS NORMATIVOS SOBRE A APLICAÇÃO ESTRUTURAL DO CRFA.....	27
4	PREVISÃO DO COMPORTAMENTO DE VIGAS CONSTITUÍDAS POR CRFA	31
5	MODELO TEÓRICO PROPOSTO	37
5.1	SISTEMA DE REFERÊNCIA E HIPÓTESES BÁSICAS.....	37
5.2	CAMPO DE DESLOCAMENTOS.....	38
5.3	RELAÇÕES DEFORMAÇÃO-DESLOCAMENTO LINEARES	39

5.4	RELAÇÕES CONSTITUTIVAS	40
5.4.1	Relação constitutiva para o concreto	42
5.4.2	Relação constitutiva para o aço	42
5.5	ESFORÇOS SOLICITANTES	42
5.6	PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS	46
5.7	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS QUE REGEM O PROBLEMA E SUAS CONDIÇÕES DE CONTORNO	48
6	DESENVOLVIMENTO DA FORMULAÇÃO COMPUTACIONAL.....	51
6.1	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA.....	52
6.1.1	Discretização do elemento estrutural e sistemas de numeração dos deslocamentos.....	54
6.1.2	Expressão do trabalho virtual interno.....	55
6.1.2.1	Trabalho virtual interno do primeiro trecho de integração.....	56
6.1.2.2	Trabalho virtual interno dos trechos intermediários de integração	57
6.1.2.3	Trabalho virtual interno do último trecho de integração	59
6.1.3	Expressão do trabalho virtual externo	61
6.1.4	Introdução das condições de contorno	63
6.1.5	Programação automática	64
7	APLICAÇÃO E DISCUSSÃO DE RESULTADOS.....	67
7.1	PREVISÃO DO COMPORTAMENTO EM FLEXÃO DO CRFA ..	67
7.1.1	Determinação das curvas tensão-deformação.....	67
7.1.2	Modelagem do comportamento sob flexão.....	73

7.2	PREVISÃO DO COMPORTAMENTO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO.....	80
7.3	PREVISÃO DO COMPORTAMENTO EM FLEXÃO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO.....	85
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	90
8.1	SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS	91
	REFERÊNCIAS.....	92

LISTA DE FIGURA

Figura 1.	Ensaio Vebe: (a) início e (b) fim (FIGUEIREDO, 2011).....	6
Figura 2.	Curva tensão-deformação do concreto submetido a esforços de compressão axial (CAMPIONE E MANGIAVILLANO, 2008)	9
Figura 3.	Curvas tensão-deformação dos concretos submetidos a esforços de compressão axial (VELASCO <i>et al.</i> , 2010)	10
Figura 4.	Esquema da curva tensão-deformação do modelo utilizado por Velasco (2008) 13	
Figura 5.	Diferentes comportamentos para o CRFA submetido a esforços de tração direta (BALAGURU e SHAH, 1992).....	15
Figura 6.	Comportamento sob tração direta das amostras prismáticas moldadas na horizontal: (a) sem reforço e (b) com 2,0% de fibras curtas de aço (VELASCO, 2008).....	16
Figura 7.	Modelos de previsão do comportamento sob tração direta do CRFA utilizados por Velasco (2008): (a) tensão-deformação até a ruptura e (b) tensão-abertura de fissura.....	17
Figura 8.	Modelo trilinear utilizado por Grossi (2006) para modelagem do CRFA em tração (GROSSI, 2006)	18
Figura 9.	Curva carga-deslocamento do concreto sob flexão (CAMPIONE E MANGIAVILLANO, 2008).....	20
Figura 10.	Representação esquemática do modo de ruptura do CRFA (WANG, WU e WANG, 2010).....	21
Figura 11.	Índices de tenacidade propostos pela norma ACI 544.4R-88 (LIMA, 2004).....	22
Figura 12.	Diagrama carga-deslocamento típica obtida a partir do ensaio de flexão proposto pela RILEM (adaptada de LOPES, 2005)	23
Figura 13.	Distribuição de tensões admitida na seção do corpo de prova	24
Figura 14.	Curvas carga-deslocamento dos concretos sob esforços de cisalhamento (VELASCO, 2008).....	25

Figura 15.	Ensaio de cisalhamento (MARAGON, 2006, modificada).....	26
Figura 16.	Diagrama de tensões e deformações no concreto armado no estado-limite último (LOPES, 2005, modificada).....	28
Figura 17.	Diagrama de tensões e deformações no CRFA armado no estado-limite último proposto pelo ACI 544.4R-88 (CAMPIONE E MANGIAVILLANO, 2008, modificado).....	29
Figura 18.	Geometria e esquema de carregamento (SOUZA, 2006).....	31
Figura 19.	Curvas carga-deslocamento de vigas de concreto armado sob flexão: (a) sem fibras de aço e (b) com fibras de aço (SOUZA, 2006).....	32
Figura 20.	Geometria (mm) e esquema de carregamento das vigas de Agopyan e Nunes (1998) (GROSSI, 2006).....	33
Figura 21.	Geometria (mm) e esquema de carregamento das vigas de Araújo (2002) (GROSSI, 2006).....	33
Figura 22.	Curvas carga-deslocamento de vigas de concreto armado sob flexão de quatro pontos (GROSSI, 2006).....	34
Figura 23.	Curvas carga-deslocamento de vigas de concreto armado sob flexão de três pontos (GROSSI, 2006).....	34
Figura 24.	Curva tensão-deformação à tração típica do concreto reforçado com fibras (ARAÚJO <i>et al.</i> , 2010).....	35
Figura 25.	Geometria (mm) e esquema de carregamento (ARAÚJO <i>et al.</i> , 2010).....	35
Figura 26.	Curvas carga-deslocamento de vigas de concreto armado sem estribos sob esforços de cisalhamento (ARAÚJO <i>et al.</i> , 2010).....	36
Figura 27.	Curvas carga-deslocamento de vigas de concreto armado com estribos sob esforços de cisalhamento (ARAÚJO <i>et al.</i> , 2010).....	36
Figura 28.	Sistema cartesiano ortogonal de referência.....	38
Figura 29.	Deslocamentos de um ponto genérico “B” (LIMA, 1995).....	39
Figura 30.	Modos de abertura da superfície de uma fissura.....	41
Figura 31.	Sentido positivo dos esforços N, Q e M (LIMA, 1995).....	43

Figura 32.	Representação de força atuando num elemento de área dA na seção transversal de uma viga laminada.....	43
Figura 33.	Carregamento externo (LIMA, 1995).....	48
Figura 34.	Esquema para representação simples da 1ª e 2ª derivadas de $f(x)$ no ponto m (LIMA, 1995).....	52
Figura 35.	Esquema para representação reduzida da 1ª derivada de $f(x)$ no ponto m (LIMA, 1995).....	53
Figura 36.	Discretização do elemento e sistema de numeração global dos deslocamentos (LIMA, 1995, adaptado)	54
Figura 37.	Sistema de numeração local dos deslocamentos (LIMA, 1995, adaptado): (a) trecho inicial, (b) trechos intermediários e (c) trecho final	55
Figura 38.	Curva tensão-deformação de compressão estimada do estudo paramétrico do concreto com 20 kg/m^3 de fibras de aço.....	69
Figura 39.	Curva tensão-deformação de compressão estimada do estudo paramétrico do concreto com 40 kg/m^3 de fibras de aço.....	69
Figura 40.	Curva tensão-deformação de compressão estimada do estudo paramétrico do concreto com 60 kg/m^3 de fibras de aço.....	70
Figura 41.	Modelo trilinear utilizado por Grossi (2006) para modelagem do CRFA em tração (GROSSI, 2006) (Repetida)	70
Figura 42.	Curva tensão-deformação de tração estimada do estudo paramétrico do concreto com 20 kg/m^3 de fibras de aço.....	71
Figura 43.	Curva tensão-deformação de tração estimada do estudo paramétrico do concreto com 40 kg/m^3 de fibras de aço.....	72
Figura 44.	Curva tensão-deformação de tração estimada do estudo paramétrico do concreto com 60 kg/m^3 de fibras de aço.....	72
Figura 45.	Geometria (mm) e esquema de carregamento das vigas de Agopyan e Nunes (1998) (GROSSI, 2006) (Repetida).....	73
Figura 46.	Resultado do modelo proposto aplicado ao concreto com 20 kg/m^3 de fibras de aço.....	74
Figura 47.	Resultado do modelo proposto aplicado ao concreto com 40 kg/m^3 de fibras de aço.....	74

Figura 48.	Resultado do modelo proposto aplicado ao concreto com 60 kg/m ³ de fibras de aço.....	75
Figura 49.	Resultado do MDFE (trilinear) aplicado ao concreto com 20 kg/m ³ de fibras de aço.....	76
Figura 50.	Resultado do MDFE (trilinear) aplicado ao concreto com 40 kg/m ³ de fibras de aço.....	76
Figura 51.	Resultado do MDFE (trilinear) aplicado ao concreto com 60 kg/m ³ de fibras de aço.....	77
Figura 52.	Modelo linearizado do diagrama tensão-deformação de tração do Mazars	78
Figura 53.	Resultado do Mazars linearizado aplicado ao concreto com 20 kg/m ³ de fibras de aço.....	78
Figura 54.	Resultado do Mazars linearizado aplicado ao concreto com 40 kg/m ³ de fibras de aço.....	79
Figura 55.	Resultado do Mazars linearizado aplicado ao concreto com 60 kg/m ³ de fibras de aço.....	79
Figura 56.	Distribuição de tensões na seção transversal central da viga: (a) do concreto com 60 kg/m ³ de fibras de aço e (b) diagrama de tensões característico (SORANAKON E MOBASHER, 2007, modificado).....	80
Figura 57.	Esquema de carregamento das vigas (ÁLVARES, 1993).....	81
Figura 58.	Armação das vigas de Álvares (1993): (a) pouco armada, (b) normalmente armada e (c) super-armada (ÁLVARES, 1993)	81
Figura 59.	Relação constitutiva do concreto (a) e relação constitutiva do aço (b) (ÁLVARES, 1993).....	82
Figura 60.	Curvas carga-deslocamento experimentais e numéricas da viga pouco armada de Álvares (1993).....	83
Figura 61.	Curvas carga-deslocamento experimentais e numéricas da viga normalmente armada de Álvares (1993)	84
Figura 62.	Curvas carga-deslocamento experimentais e numéricas da viga super-armada de Álvares (1993).....	84

- Figura 63.** Curvas carga-deslocamento resultantes da simulação, realizada com o modelo proposto e com $B_t=50000$, do comportamento em flexão de vigas de concreto armado reforçado com fibras de aço..... 86
- Figura 64.** Curvas tensão-deformação de tração estimadas para os concretos utilizados na simulação..... 87
- Figura 65.** Curvas carga-deslocamento resultantes da simulação, realizada com o modelo proposto e com $B_t=8000$, do comportamento em flexão de vigas de concreto armado reforçado com fibras de aço..... 88
- Figura 66.** Curvas carga-deslocamento que simulam o comportamento de vigas com e sem armadura convencional, compostas por concreto de referência e por CRFA.....89

LISTA DE TABELA

Tabela 1.	Valores de abatimento obtidos por Yazıcı, İnan e Tabak (2007) no estudo do CRFA	7
Tabela 2.	Módulo de elasticidade (E) de concretos reforçados com fibras de aço.....	11
Tabela 3.	Resistência à flexão (f_f) de concretos reforçados com fibras de aço ..	20
Tabela 4.	Resistência ao cisalhamento de concretos reforçados com fibras de aço.....	25
Tabela 5.	Propriedades dos materiais utilizados nas vigas analisadas	33
Tabela 6.	Tipos de vínculos e condições de contorno associadas	63
Tabela 7.	Propriedades mecânicas dos concretos em estudo	68
Tabela 8.	Parâmetros de compressão determinados para os concretos em estudo.....	69
Tabela 9.	Parâmetros do modelo trilinear dos concretos em estudo	71
Tabela 10.	Parâmetros de tração determinados para os concretos em estudo.....	71
Tabela 11.	Propriedades mecânicas e parâmetros adotados para os concretos utilizados na simulação.....	85

1 INTRODUÇÃO

A utilização de fibras curtas, naturais ou sintéticas, como reforço em matrizes frágeis à base de cimento tem sido investigada em diversas pesquisas, uma vez que tem se mostrado promissora nas mais variadas aplicações. Figueiredo (2011) citou alguns empregos das fibras curtas em matrizes cimentícias na construção civil e seus respectivos benefícios: em telhas e caixas d'água as fibras são utilizadas para reduzir a fissuração do material e aumentar a resistência ao impacto; em argamassas, age no controle da fissuração por retração; e em defensas rodoviárias além de atuar no controle da fissuração e, conseqüentemente, promover durabilidade, confere maior coesão e consistência ao material no estado fresco, indispensáveis para a moldagem com a utilização de fôrmas deslizantes. O autor destacou a utilização do concreto reforçado com fibras de aço (CRFA) em duas aplicações, quais sejam o concreto para pavimentos industriais e o concreto projetado para túneis, frisando que, em ambos os casos, a execução é mais simples que a convencional com telas metálicas e, portanto, demanda menos tempo e mão de obra.

Conforme Velasco (2008), as fibras de aço podem ser adicionadas ao concreto para aprimorar propriedades como a resistência mecânica à tração, à compressão, à fadiga, à abrasão, ao cisalhamento, ao impacto e a cargas explosivas, devido à sua capacidade de controlar os processos de micro e microfissuração, modificando o mecanismo de ruptura do material. Oliveira Júnior *et al.* (2009) explicou que os modos de ruptura são diferentes, porque a energia envolvida na fissuração do concreto reforçado com fibras está associada à energia dissipada na fissuração da matriz somada a energia dissipada no processo de arrancamento das fibras, sendo, portanto, sempre maior que a energia liberada na fissuração do concreto convencional. Conforme esclareceu os autores, o desenvolvimento de maiores deformações, mesmo após a fissuração da matriz no CRFA, se dá devido à distribuição de tensões nos pontos de contato entre fibras e matriz, enquanto que no concreto simples, há concentração de tensões nas extremidades das fissuras, aumentando a velocidade de propagação da fissuração. Diante dessas características, é favorável o uso das fibras de aço em aplicações estruturais.

Bastos (1999) avaliou a utilização de fibras de aço em dormentes de concreto protendido e concluiu que, além de conferir a necessária resistência à fadiga e boa

ductilidade aos elementos, essa adição pode ser economicamente vantajosa por diminuir a tensão nos fios de protensão. O autor sugeriu, ainda, que esses dormentes resistem bem a solicitações de impacto e que, além disso, como as fibras dificultam a propagação/abertura das fissuras, o concreto torna-se mais resistente às intempéries, características essas fundamentais aos dormentes. A resistência à fadiga é igualmente importante em estruturas situadas em locais onde ocorrem eventos sísmicos e em estruturas de pontes, que estão sempre sujeitas a carregamento dinâmico, nesses casos, também é indicado o uso do CRFA, conforme citou Bastos (1999).

Costa (2009) apresentou a adição de fibras de aço como possível solução para produção industrial de consolos que é dificultada pela grande quantidade de armadura. Em seu estudo, o autor concluiu que o grande benefício da utilização do CRFA nesses elementos, em substituição parcial dos estribos convencionalmente utilizados, é a manutenção da ductilidade, com a resistência à ruptura tendo aumentado em 8%, comparando-a com a do consolo armado convencionalmente. Ademais, foi retardado o surgimento de fissuras e suas aberturas diminuídas.

Ding, You e Jalali (2011) sugeriram o uso de fibras de aço em vigas de concreto armado. Realizando ensaios de flexão, os autores notaram que fibras de aço podem ser utilizadas para substituir parcialmente a armadura transversal das vigas. Com uma taxa de armadura menor, o espaçamento entre os estribos pode ser maior e a concretagem é facilitada.

Segundo Figueiredo (2011), e tendo em vista os relatos de Costa (2009) e Ding, You e Jalali (2011) referidos acima, a indústria de pré-moldados pode se beneficiar com a utilização do CRFA. Em função da diminuição do tempo gasto nas fases de instalação da armadura nas fôrmas (uma vez que a taxa pode ser reduzida) e de concretagem (incluindo os cuidados com o lançamento e adensamento do concreto), a produção torna-se mais rápida. Soma-se a essas vantagens, o desenvolvimento de maiores resistências iniciais nos CRFA com até 40 kg/m³ de fibras (considerando as primeiras 10 horas), conforme registrado por Ding e Kusterle (2000), o que também pode representar vantagem na utilização do concreto projetado reforçado com fibras de aço em construção de túneis.

Apesar do uso cada vez mais frequente das fibras de aço em elementos estruturais de concreto armado, ainda é incipiente o desenvolvimento de modelos teóricos ou computacionais que possam ser utilizados para o dimensionamento e análise de estruturas. A adição de fibras de aço altera o comportamento tensão-deformação do concreto, tanto na compressão, quando é alto o teor de fibras utilizado, quanto na tração, sendo que, neste último caso, o material, considerado pela norma NBR 6118 (ABNT, 2003) como frágil, adquire uma tensão residual pós-fissuração a grandes deformações. Torna-se necessário, portanto, a modificação dos diagramas tensão-deformação propostos pela norma NBR 6118 (ABNT, 2003) para que a contribuição da fibra de aço possa ser incorporada ao dimensionamento e, assim, propiciar melhoria no comportamento estrutural de elementos de concreto, simples e armado, sob flexão.

De acordo com o RILEM TC 162 (2002), vários diagramas podem ser utilizados para simular o comportamento pós-fissuração do concreto com fibras de aço, considerando não-linearidade ou mesmo plastificação. Cada um dos modelos, no entanto, tem uma influência direta no comportamento carga-deslocamento de vigas de concreto armado sob flexão, sendo necessários estudos para melhor caracterizar e correlacionar as respostas da tração com as da flexão (Soranakom e Mobasher, 2007). Um modelo trilinear foi avaliado por Grossi (2006) para avaliação numérica, via método dos elementos finitos (MEF), do comportamento carga-deslocamento de vigas de concreto simples reforçadas com fibras curtas de aço. Modelos não-lineares para relação tensão-deformação, como o de Mazars (1984), que é baseado na mecânica do dano, têm sido testados com sucesso na modelagem numérica, via MEF, de vigas de concreto armado (Álvares, 1993; Lima *et al.*, 2010). Utilizando-se os modelos de dano não é possível manter a continuidade da geometria deformada, ou seja, sem incluir as fissuras no modelo computacional, o que representa uma vantagem na implementação. Além do MEF, o Método das Diferenças Finitas (MDF), recentemente, vem sendo utilizado para modelagem de estruturas de concreto armado incorporando modelos não-lineares (Jones *et al.*, 2009; Habibi e Moharrami, 2010). O MDF é um método rápido e preciso, características desejáveis no dimensionamento de estruturas.

A presente pesquisa pretende, então, contribuir para a disseminação do uso do CRFA, propondo uma análise teórica e numérica do comportamento em flexão desse tipo de concreto.

1.1 OBJETIVOS

O objetivo geral desse trabalho é apresentar um modelo computacional para análise do CRFA, correlacionando soluções numéricas com resultados experimentais de vigas.

Para tanto, foram definidos os seguintes objetivos específicos:

- Estabelecer um modelo matemático computacional, baseado no método das diferenças finitas energéticas (MDFE), considerando o modelo de dano de Mazars (1984) e a teoria de laminados, para descrever o comportamento em flexão de vigas de concreto reforçadas com fibras curtas de aço, armadas convencionalmente ou não.
- Determinar a solução numérica de problemas padrão.
- Avaliar a aplicabilidade do modelo proposto para concretos reforçados com fibras curtas de aço.
- Avaliar a aplicabilidade do modelo proposto para vigas de concreto armado reforçadas com fibras curtas de aço.

1.2 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação é composta por oito capítulos e pela lista de referências utilizada. Neste capítulo 1 foi feita uma introdução sobre o assunto, abordando as aplicações do CRFA, que elucidam seu potencial, e, principalmente, os objetivos desta pesquisa. O capítulo 2 abrange a influência do uso das fibras curtas de aço no comportamento do concreto nos estados fresco e endurecido, sendo abordadas algumas propriedades e leis constitutivas encontradas na literatura para o CRFA. Já o capítulo 3 descreve os aspectos normativos existentes relativos à utilização do CRFA em elementos estruturais. No capítulo 4 são apresentados alguns modelos de previsão do comportamento do CRFA em flexão. Os capítulos 5 e 6 descrevem o modelo teórico proposto e o desenvolvimento da formulação computacional, respectivamente. Os resultados da aplicação do modelo proposto nesta pesquisa encontram-se no capítulo 7, bem como a discussão dos mesmos. Por fim, o capítulo 8 traz as considerações finais e sugestões para a continuidade da pesquisa.

2 INFLUÊNCIA DAS FIBRAS CURTAS DE AÇO NO COMPORTAMENTO DO CRFA

Neste capítulo, será averiguada a influência das fibras curtas de aço no comportamento do CRFA sob diversas solicitações, porém, antes de abordar o comportamento mecânico do CRFA, será registrado como as propriedades do estado fresco são modificadas pelo uso das fibras curtas, uma vez que as características da mistura são determinantes para que as propriedades do estado endurecido desenvolvam-se de maneira adequada.

2.1 ESTADO FRESCO

É de fundamental importância ressaltar que a trabalhabilidade do CRFA é fortemente influenciada pela natureza, pela geometria (comprimento, relação de aspecto, que é razão entre o comprimento e o diâmetro da fibra, conformação e forma) e pela quantidade de fibras utilizada na sua produção. Conforme Mehta e Monteiro (2008), a adição de qualquer tipo de fibra ao concreto convencional reduz sua trabalhabilidade. Contudo, apesar das fibras proporcionarem estabilidade considerável a uma massa de concreto fresco, o seu lançamento e adensamento podem continuar satisfatórios.

O ensaio Vebe, que consiste em moldar um tronco de cone com o concreto em estudo dentro de um molde cilíndrico preso a uma mesa vibratória, conforme está ilustrado na Figura 1a, e submeter esse conjunto à vibração da mesa, mensurando o tempo, até que o tronco de cone seja remoldado na forma do molde cilíndrico (conforme Figura 1b), reproduz bem as condições do adensamento realizado em obra. Mehta e Monteiro (2008) afirmaram que o ensaio Vebe é o mais apropriado para avaliar as características do CRFA no estado fresco. Um dos métodos propostos pelo ACI 544.1R (ACI, 2002), citado por Figueiredo (2011), para avaliação da trabalhabilidade do CRFA é justamente o ensaio Vebe.

Castro (2010) utilizou o ensaio Vebe para caracterizar a trabalhabilidade de concretos reforçados com frações volumétricas de 0% (referência) a 3% de fibras curtas de aço. O resultado mostrou que quanto maior a fração volumétrica utilizada, maior o tempo Vebe. Mas, além disso, foi possível perceber com o estudo de Castro (2010) que essa relação entre o volume de fibras e o tempo Vebe não foi linear e que, a partir de um

dado volume, uma pequena variação da quantidade de fibras, provocou um aumento expressivo no tempo Vebe.

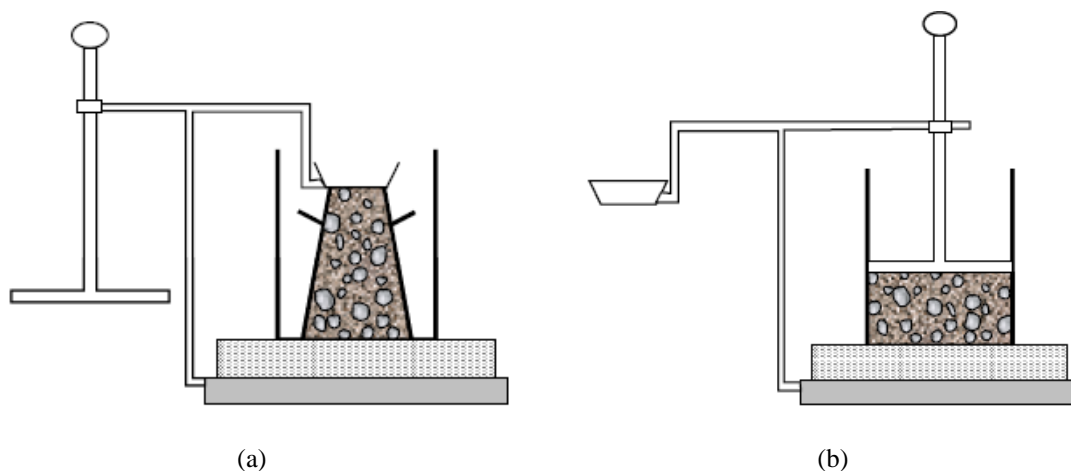


Figura 1. Ensaio Vebe: (a) início e (b) fim (FIGUEIREDO, 2011)

Velasco (2008) realizou o ensaio Vebe em concretos autoadensáveis reforçados com 1,0%, 1,5%, 2,0% e 2,5% de fibras curtas de aço. Os resultados permitiram concluir que quanto maior a quantidade de fibras utilizada, maior o tempo Vebe. No entanto, a autora ressaltou que todos os concretos avaliados puderam ser adensados por vibração com facilidade. No estudo de Castro (2010), um tempo Vebe de 50 segundos foi obtido pelo CRFA com 1,75% de fibras de aço, o que permite inferir que em matrizes de concreto convencional o volume limite a partir do qual se torna mais complicado o uso de fibras de aço é menor do que em matrizes de concretos autoadensáveis, que, como o próprio nome indica, é um concreto mais fluido e mesmo tendo sua consistência aumentada com a utilização das fibras, manteve suas características.

Figueiredo (2011) explicou que a alteração ocorrida na consistência do concreto ao se adicionar fibras de aço se deve à restrição produzida à mobilidade relativa das partículas, em especial à mobilidade dos agregados graúdos, dificultando a fluidez da mistura, e, em menor proporção, se deve também ao aumento da área superficial que demanda água de molhagem. O autor frisou que os principais fatores a influenciar na trabalhabilidade do CRFA são a dimensão e a rigidez da fibra utilizada. Deve ser somada a esses fatores a quantidade de fibras utilizada, vez que quanto mais fibras, mais consistente a mistura, conforme foi constatado por Castro (2010) e Velasco (2008).

Apesar do ensaio de abatimento do tronco de cone (*slump test*) não ser considerado o mais adequado para medir a trabalhabilidade do CRFA, alguns autores optam por esse ensaio, provavelmente, por ser simples de executar e por ser mais disponível que os demais que avaliam o concreto no estado fresco. Segundo Ceccato (1998), *apud* Figueiredo (2011), em CRFA com utilização de teores de fibras de até 60 kg/m³ o ensaio de abatimento do tronco de cone é apropriado, e, em casos nos quais as fibras tem relação de aspecto reduzida, até mesmo CRFA com 80 kg/m³ pode ter sua trabalhabilidade avaliada através desse ensaio.

Yazıcı, İnan e Tabak (2007) utilizaram o ensaio de abatimento do tronco de cone nos concretos convencional (CC) e reforçados com fibras de aço para avaliar suas características no estado fresco. Os resultados encontram-se na Tabela 1. Verifica-se que, mantidas iguais todas as características geométricas das fibras, o aumento da fração volumétrica reduziu o abatimento do CRFA, do mesmo modo que, de uma maneira geral, para uma dada fração volumétrica, o aumento da relação de aspecto (ℓ/d) também diminuiu o abatimento do CRFA.

Tabela 1. Valores de abatimento obtidos por Yazıcı, İnan e Tabak (2007) no estudo do CRFA

Mistura	Fração volumétrica V_f (%)	Relação de aspecto da fibra (ℓ/d)	Abatimento (mm)	Redução do abatimento em relação à mistura padrão (%)
CC	-	-	230	-
CRFA1	0,5	45	220	4,3
CRFA2	1,0	45	205	10,9
CRFA3	1,5	45	200	13,0
CRFA4	0,5	60	210	8,7
CRFA5	1,0	60	195	15,2
CRFA6	1,5	60	125	45,6
CRFA7	0,5	80	200	13,0
CRFA8	1,0	80	150	34,8
CRFA9	1,5	80	145	37,0

Fonte: Yazıcı, İnan e Tabak (2007).

Os valores de abatimento obtidos pelos autores para os concretos reforçados com fibras condizem com o geralmente requerido dos concretos convencionais/bombeáveis utilizados em obras usuais, sendo possível a realização desse ensaio para avaliar a capacidade do CRFA quanto ao lançamento, ao adensamento e ao acabamento. Vale ressaltar que, possivelmente, na concretagem, a moldagem do CRFA será melhor que o

previsto pelo resultado do abatimento, uma vez que a vibração mecânica é comumente utilizada e facilita o completo preenchimento das fôrmas.

Então, de maneira geral, além da geometria das fibras curtas de aço, a fração volumétrica utilizada afeta consideravelmente a trabalhabilidade da mistura, o que pode comprometer os procedimentos de concretagem (desde a mistura ao acabamento) e, conseqüentemente, as propriedades do CRFA no estado endurecido. Sendo assim, é necessário cuidado ao escolher e adicionar as fibras de aço ao concreto, de forma a propiciar uma distribuição homogênea na matriz.

2.2 COMPORTAMENTO EM COMPRESSÃO

A resistência à compressão é considerada uma das características mais importantes do concreto, sendo utilizada, inclusive, como uma referência na classificação do material (VELASCO, 2008). Mehta e Monteiro (2008) avaliaram o ensaio de determinação da resistência à compressão como relativamente fácil. Os autores afirmaram ainda que muitas das propriedades do concreto como módulo de elasticidade, estanqueidade e resistência a intempéries estão ligadas à resistência à compressão, podendo ser deduzidas a partir dela, justificando, assim, o fato dessa ser a característica normalmente especificada no projeto e controle de qualidade do concreto.

2.2.1 Propriedades mecânicas em compressão

Bentur e Mindess (2007) afirmaram que o uso de fibras de aço pouco interfere na resistência de pico, contudo, frisaram que o aumento da fração volumétrica ou da relação de aspecto faz crescer, expressivamente, a ductilidade pós-pico. Por outro lado, como esses dois parâmetros influenciam diretamente no processo de mistura/produção do CRFA, podendo formar novelos e, conseqüentemente, aumentar a porosidade do material, podem comprometer a resistência à compressão, conforme explica Lima (2004). Portanto, é imprescindível a dispersão adequada das fibras de aço na matriz.

Campione e Mangiavillano (2008) obtiveram as curvas tensão-deformação apresentadas na Figura 2. Os ensaios de resistência à compressão foram realizados em corpos de prova cilíndricos (100x200 mm) de concreto simples e de concreto reforçado com 1,0% de fibras de aço, de dimensões iguais a 30 mm de comprimento e 0,5 mm de

diâmetro, portanto, uma relação de aspecto igual a 60. Da mesma forma que Bentur e Mindess (2007), os autores afirmaram que a tensão de pico não foi significativamente maior para os concretos reforçados com fibras. Contudo, a ductilidade do CRFA foi expressivamente maior que a do concreto convencional, como se pode verificar na Figura 2. Lima (2004) atribuiu à presença das fibras a maior dificuldade na formação e propagação de fissuras de tração e de cisalhamento na matriz comprimida, o que explica a diferença entre o modo de ruptura da matriz e do CRFA.

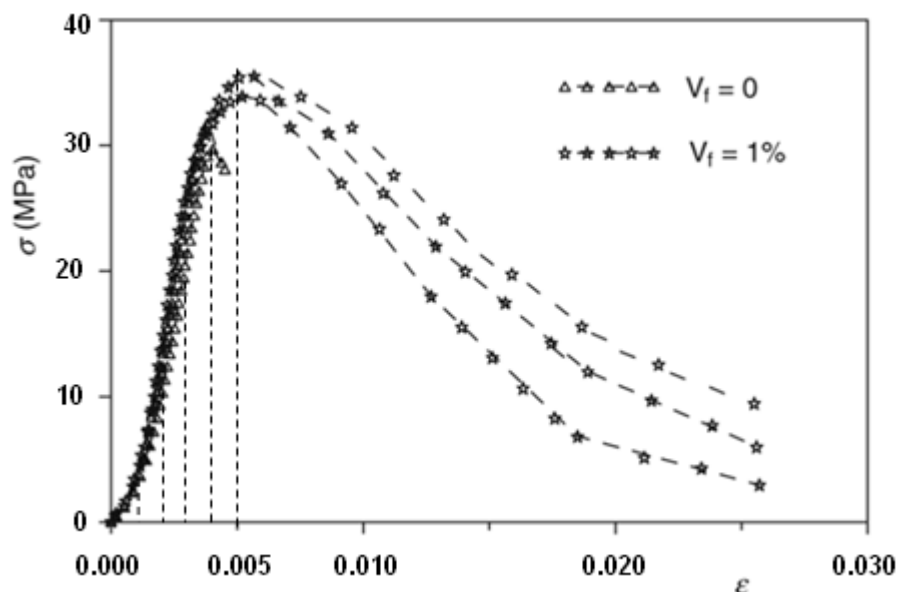


Figura 2. Curva tensão-deformação do concreto submetido a esforços de compressão axial (CAMPIONE E MANGIAVILLANO, 2008)

Faz-se importante a seguinte observação quanto à Figura 2: o dimensionamento de vigas de concreto armado, geralmente, é feito no estado limite último, no qual o escoamento da face mais comprimida do elemento estrutural se dá a partir da deformação de 2‰ até a deformação de 3,5‰. Nesse intervalo de deformações, os níveis de tensões obtidos tanto no concreto convencional como no CRFA são, praticamente, os mesmos, conforme pode ser verificado na Figura 2. Registra-se diferença expressiva entre as tensões do concreto simples e do CRFA só após a deformação de 3,5‰, de forma que o ganho de resistência do CRFA torna-se menos significativa para o dimensionamento em compressão.

No estudo de Velasco *et al.* (2010), foi possível atingir resistências de pico substancialmente maiores que a resistência da mistura de referência. Os concretos com a utilização de 1,5% e 2,0% de fibras de aço, submetidos a esforços de compressão

uniaxial, obtiveram, respectivamente, valores de resistência 27,0% e 31,5% maiores que a resistência do concreto de referência, que alcançou 55,1 MPa.

Os ensaios de Velasco *et al.* (2010) foram realizados em corpos de prova cilíndricos de 100 mm de diâmetro e 200 mm de altura e, na Figura 3, são apresentadas as curvas tensão-deformação, sobre as quais não se pode inferir o mesmo com relação ao dimensionamento estrutural que o notado com os resultados de Campione e Mangiavillano (2008). Nesse caso, a partir da deformação de 2‰, os níveis de tensões são significativamente diferentes quando se compara o concreto de referência com os concretos com 1,5% e 2,0% de fibras de aço. Até mesmo o concreto com 1,0% de fibras de aço apresentou tensão maior em 10 MPa que o concreto de referência na deformação de 3,5‰. Em comparação com os concretos de Campione e Mangiavillano (2008), nos concretos de Velasco *et al.* (2010), a presença das fibras de aço interferiu mais expressivamente na resistência à compressão. Os autores atribuíram a melhoria da resistência à boa dispersão do reforço fibroso, proporcionada pela trabalhabilidade da matriz autoadensável, o que mais uma vez destaca a importância da distribuição uniforme das fibras na matriz.

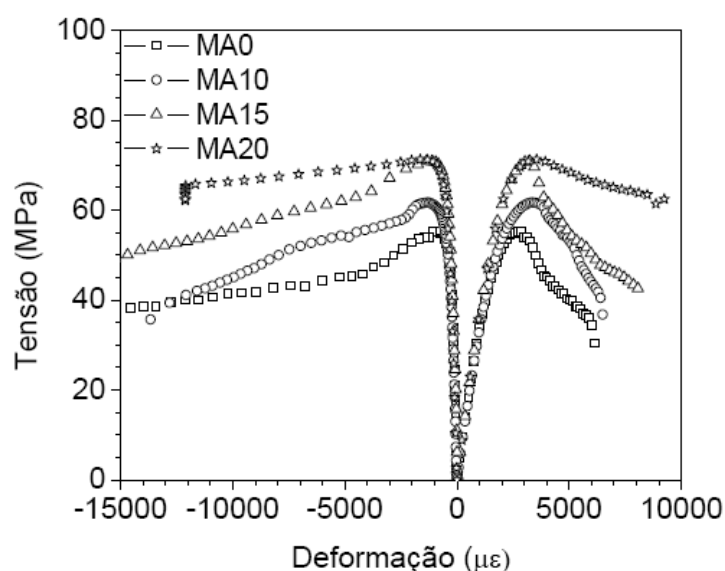


Figura 3. Curvas tensão-deformação dos concretos submetidos a esforços de compressão axial (VELASCO *et al.*, 2010)

O módulo de elasticidade pouco alterou com a adição das fibras de aço, conforme pode ser visto na Tabela 2.

Tabela 2. Módulo de elasticidade (E) de concretos reforçados com fibras de aço

Mistura	Fração volumétrica V_f (%)	E (GPa)	Varição de E em relação à mistura padrão (%)
Padrão	-	35,70	-
M1	1,0	34,80	-2,5
M2	1,5	37,40	4,8
M3	2,0	37,70	5,6

Fonte: Velasco *et al.* (2010).

Oliveira Júnior (2007) realizou ensaios para a determinação da resistência à compressão e do módulo de elasticidade em uma mistura padrão e em misturas com volume de fibras de aço variando de 0,75% a 1,5%, cujas relações de aspecto foram 65 e 80. O autor registrou valores superiores de resistência à compressão em corpos de provas com a utilização das fibras e observou que o módulo de elasticidade diminuiu com a adição de fibras de aço. O autor afirmou ainda que é possível considerar o coeficiente de Poisson do CRFA igual ao do concreto simples, na ausência de dados, uma vez que, em seus ensaios, obteve valores em torno de 0,22; muito próximo de 0,20, valor geralmente encontrado para o concreto simples.

2.2.2 Leis constitutivas de compressão

Nataraja, Dhang e Gupta (1999) analisaram o comportamento do CRFA à compressão a fim de descrevê-lo através de um modelo teórico, tendo em vista a análise e o dimensionamento de estruturas. Os autores submeteram a ensaios de compressão, concretos reforçados com três frações volumétricas diferentes de fibras de aço (0,50%, 0,75% e 1,00%), de relação de aspecto 55 ou 82. Depois de observada a influência da fibra sobre a tensão de pico e a deformação correspondente, e, principalmente, sobre a tenacidade do CRFA e a natureza da curva tensão-deformação, os autores propuseram a seguinte equação para prever o comportamento do CRFA à compressão, baseando-se na proposta de Carreira e Chu (1985) para concretos convencionais:

$$\frac{f_c}{f_{cf}} = \frac{\beta(\epsilon_c/\epsilon_{of})}{\beta-1+(\epsilon_c/\epsilon_{of})^\beta} \quad (1)$$

na qual f_c é a resistência à compressão da matriz de concreto que deu origem ao CRFA e f'_{cf} é a resistência à compressão do CRFA que pode ser calculada da seguinte maneira:

$$f'_{cf} = f_c + 2,1604(RI) \quad (2)$$

sendo RI (índice de reforço) igual a $w_f \times \ell/d$, onde w_f é a fração, em massa, de fibras utilizada que, segundo os autores, é aproximadamente igual a 3,2 vezes a fração volumétrica, e ℓ/d é a relação de aspecto da fibra.

ϵ_c e ϵ_{of} são as deformações correspondentes a f_c e a f'_{cf} , respectivamente, estando ϵ_{of} relacionada a ϵ_c assim:

$$\epsilon_{of} = \epsilon_c + 0,0006(RI) \quad (3)$$

E, finalmente, β é um parâmetro do material que está relacionado à forma do diagrama tensão-deformação após o pico:

$$\beta = 0,5811 + 1,93RI^{(-0,7406)} \quad (4)$$

Os autores limitaram o uso do modelo a concretos de até 50 MPa de resistência à compressão e índices de reforço de até 3.

Majorana, Salomoni e Schrefler (1998) propuseram uma relação constitutiva para o concreto com fibras sob tensões de compressão ou tração, baseando-se também na proposta de Carreira e Chu (1985), e utilizando o modelo de dano proposto por Mazars (1984). A equação sugerida foi:

$$\sigma = \epsilon \cdot \frac{\sigma_m \cdot \alpha}{\epsilon_m} \cdot \frac{1}{\alpha - 1 + (\epsilon/\epsilon_m)^\alpha} \quad (5)$$

onde σ é a tensão normal no ponto, ϵ é a deformação linear específica e σ_m e ϵ_m são a tensão e a deformação de pico do concreto de referência, respectivamente.

Quanto a α , após algumas considerações baseadas na teoria de dano proposta por Mazars (1984), os autores chegaram a expressão seguinte:

$$\alpha = \frac{\varepsilon_m E_0}{\sigma_m - \varepsilon_m E_0} \quad (6)$$

na qual E_0 é o módulo de elasticidade do material íntegro.

Os autores adotaram o modelo para reforço com fibras de até 9% e consideraram possível obter boa concordância entre as curvas experimentais e numéricas, exceto pelo ramo de amolecimento, onde a diferença é maior, fazendo a ressalva de que, geralmente, o concreto não é utilizado sob valores extremos de deformação como os do ramo de amolecimento.

Em sua modelagem numérica, Grossi (2006) se valeu da análise não linear proposta por Carreira e Chu (1985) para concretos convencionais, que, como já foi dito, foi utilizada por Nataraja, Dhang e Gupta (1999) e Majorana, Salomoni e Schrefler (1998) na elaboração dos seus já apresentados modelos teóricos para o concreto reforçado com fibras submetido a esforços de compressão.

Velasco (2008) modelou seus concretos reforçados com fibras de aço na compressão, considerando a curva tensão-deformação composta por uma função para descrever o ramo ascendente e outra para o ramo descendente. O esquema referente ao modelo pode ser visto na Figura 4.

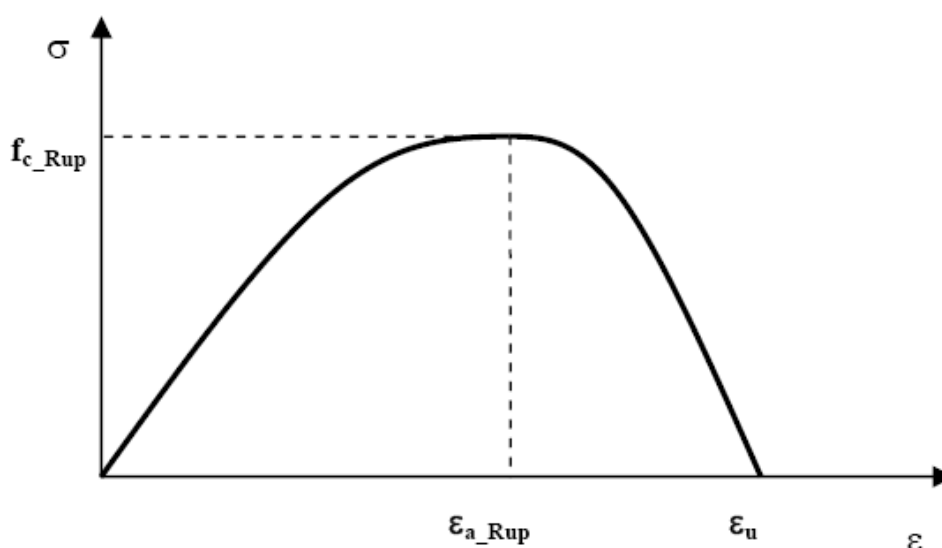


Figura 4. Esquema da curva tensão-deformação do modelo utilizado por Velasco (2008)
Para $\varepsilon \leq \varepsilon_{a_Rup}$,

$$\sigma(\varepsilon) = f_{c_Rup} \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{a_Rup}} \right)^{\eta_1} \right] \quad (7)$$

e para $\varepsilon_{a_Rup} < \varepsilon \leq \varepsilon_u$, tem-se:

$$\sigma(\varepsilon) = f_{c_Rup} \left[1 - \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_{a_Rup}}{\varepsilon_u} \right)^{\eta_2} \right] \quad (8)$$

sendo $\varepsilon_u = kc\varepsilon_{a_Rup}$, f_{c_Rup} a tensão máxima de compressão, ε_{a_Rup} a deformação específica axial correspondente à tensão máxima de compressão, kc um coeficiente de correlação e η_1 e η_2 expressam a curvatura do ramo ascendente e do ramo descendente, respectivamente.

2.3 COMPORTAMENTO EM TRAÇÃO

A utilização de fibras de aço em materiais à base de cimento submetidos a esforços de tração direta impede que a ruptura seja brusca, pois proporciona o aumento na capacidade de absorção de energia e, até mesmo, o ganho de resistência pós-fissuração, conforme explicou Velasco (2008). Lima (2004) afirmou que a introdução de fibras vegetais em matrizes cimentícias acarreta em maior deformação do CRF antes da ruptura, propiciando resistência ao impacto e tenacidade maiores que os da matriz. Será visto nesse tópico que a resistência à tração dos concretos reforçados com fibras de aço não é superior à do concreto convencional, o que é possível, apenas, para frações volumétricas expressivamente altas ou com a utilização de fibras longas (contínuas), mas que a vantagem na utilização do reforço reside nas mudanças extremamente significativas que o mesmo provoca na tenacidade do material.

2.3.1 Propriedades mecânicas em tração

Na Figura 5, são apresentados três comportamentos possíveis para o CRFA submetido a esforços de tração direta. Conforme Balaguru e Shah (1992), na Figura 5a, é apresentado o comportamento típico de uma matriz de concreto com volume de reforço muito baixo, verificando-se uma ruptura brusca após a fissuração da matriz. Na Figura 5b observa-se um comportamento mais dúctil de um CRFA. Mas, ainda assim, a carga suportada após a fissuração da matriz, é inferior a carga de ruptura. Já na

Figura 5c, nota-se que há um endurecimento do CRFA após a fissuração da matriz, conseguido por alta fração volumétrica e utilização de fibras longas.

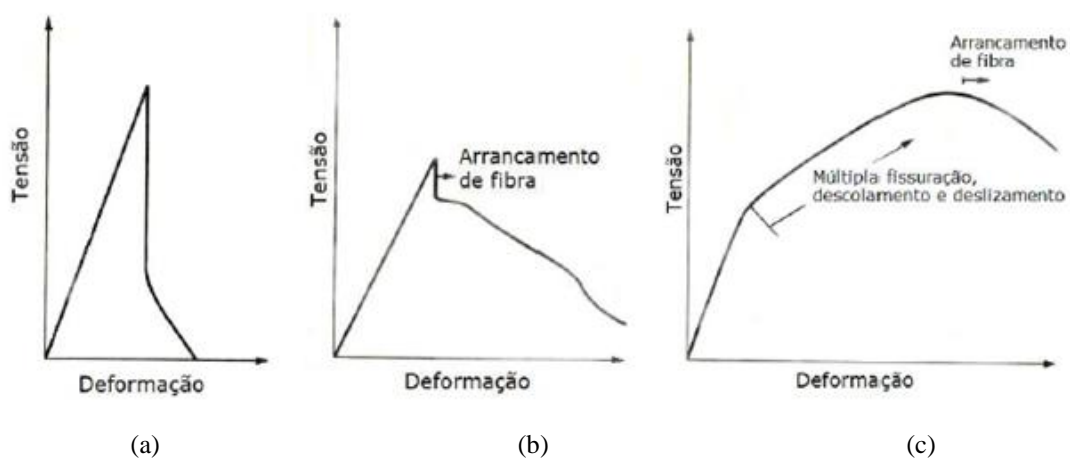


Figura 5. Diferentes comportamentos para o CRFA submetido a esforços de tração direta (BALAGURU e SHAH, 1992)

Velasco (2008) produziu concreto autoadensável com substituição parcial do cimento por sílica ativa e cinza volante e adição de microfibras minerais de volastonita, e CRFA a partir desse concreto com utilização de 1,0%, 1,5% e 2,0% de fibras curtas de aço. A autora realizou ensaios de tração direta em corpos de prova cilíndricos e prismáticos, tendo sido alguns exemplares moldados na direção vertical e outros, na horizontal. Os resultados obtidos a partir dos ensaios realizados nos corpos de prova cilíndricos mostraram que, de modo geral, os concretos fibrosos apresentaram comportamento similar ao concreto de referência até a primeira fissura. No entanto, o modo de ruptura do concreto foi alterado com a utilização do reforço, pois o mesmo proporcionou ao CRFA uma capacidade de absorção de energia pós-fissuração, que, segundo a própria autora, tendeu a aumentar com o aumento da fração volumétrica.

Os resultados obtidos a partir dos ensaios realizados nas amostras prismáticas, moldadas tanto na direção paralela ao plano de vibração quanto na direção perpendicular, permitiram concluir que a orientação das fibras é fortemente influenciada pela direção de moldagem e que o alinhamento é determinante no comportamento do CRFA sob tração direta. Segundo avaliação de Velasco (2008), as fibras alinhadas na direção do carregamento favoreceram a múltipla fissuração e, portanto, a ductilidade. Em consequência disso, os valores médios de resistência à tração direta e de tenacidade foram superiores nas amostras moldadas na direção horizontal, uma vez que, a

moldagem realizada dessa forma favoreceu a orientação das mesmas, conforme explicou Velasco (2008). A tensão de ruptura do concreto com 2,0% de reforço fibroso chegou a 5,19 MPa no ensaio que utilizou o corpo de prova prismático moldado na horizontal, enquanto o mesmo concreto apresentou resistência à tração igual a 4,10 MPa no ensaio que utilizou o corpo de prova prismático moldado na vertical, um resultado 21% menor.

O comportamento tensão-deformação resultante dos ensaios realizados pela autora do concreto de referência e do concreto com 2,0% de fibras curtas de aço, em corpos de prova prismáticos moldados na horizontal, podem ser vistos na Figura 6a e na Figura 6b, respectivamente. Percebe-se que o acréscimo obtido na tensão de ruptura (9,3%) não foi tão significativo quanto à mudança no comportamento pós-fissuração em tração.

Oliveira Júnior (2007) realizou ensaios de determinação da resistência à tração por compressão diametral em corpos de prova cilíndricos de 150x300 mm de concretos com utilização de diferentes frações volumétricas de fibras de aço, cujas relações de aspecto foram iguais a 65 ou a 80. O autor concluiu que a fração volumétrica interferiu significativamente na resistência à tração da matriz, cuja tensão de ruptura foi 4,20 MPa. O CRFA com 1,5% de fibras de relação de aspecto igual a 65 apresentou um acréscimo de 97,14%, atingindo, portanto, a resistência à tração de 8,28 MPa. O autor não considerou as mudanças na relação de aspecto das fibras relevantes.

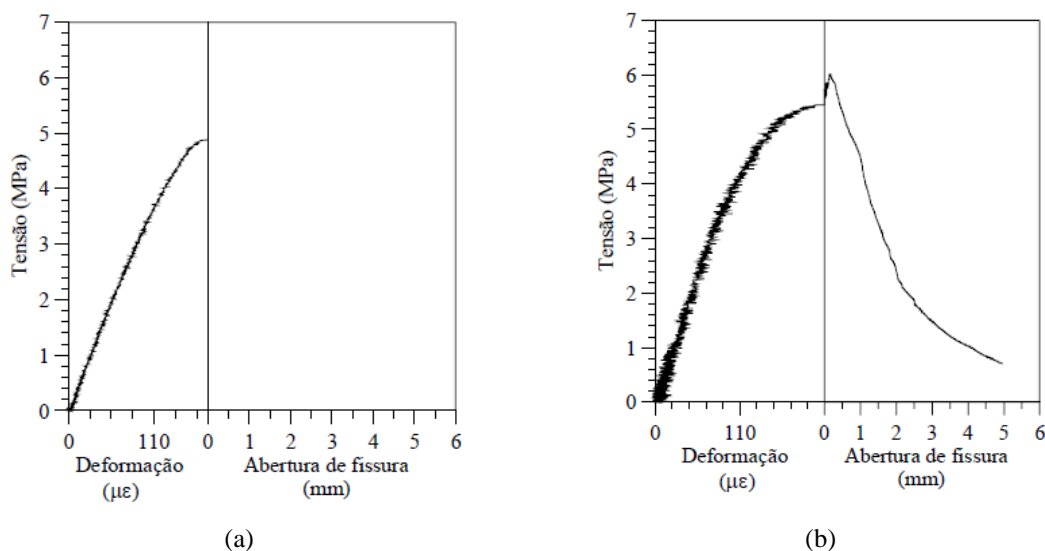


Figura 6. Comportamento sob tração direta das amostras prismáticas moldadas na horizontal: (a) sem reforço e (b) com 2,0% de fibras curtas de aço (VELASCO, 2008)

2.3.2 Leis constitutivas de tração

Velasco (2008) optou por dois modelos distintos para a obtenção da curva completa do comportamento em tração direta do CRFA. O primeiro, bilinear, prevê o comportamento tensão-deformação até a nucleação da fissura, enquanto o segundo, trilinear, descreve o comportamento tensão-abertura de fissura. Ambos estão ilustrados na Figura 7. Segundo a autora, o diagrama da Figura 7a é similar ao indicado pela norma brasileira para projeto de estruturas de concreto.

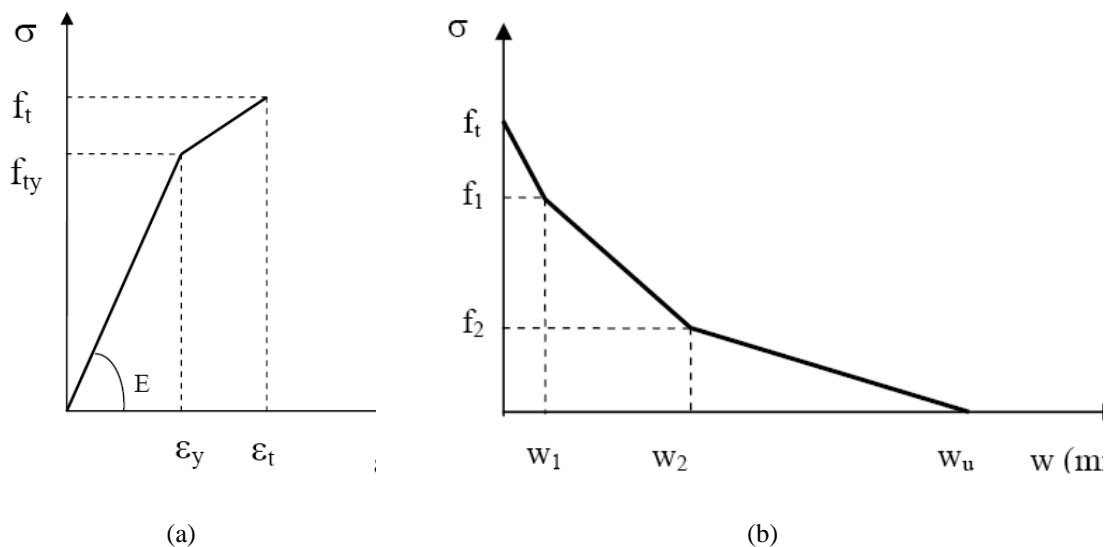


Figura 7. Modelos de previsão do comportamento sob tração direta do CRFA utilizados por Velasco (2008): (a) tensão-deformação até a ruptura e (b) tensão-abertura de fissura

Associadas ao comportamento descrito na Figura 7a, tem-se as equações abaixo.

Para $\varepsilon \leq \varepsilon_y$,

$$\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon \quad (9)$$

e para $\varepsilon_y < \varepsilon \leq \varepsilon_u$:

$$\sigma(\varepsilon) = \frac{(f_t - f_{ty})(\varepsilon - \varepsilon_y)}{(\varepsilon_u - \varepsilon_y)} + f_{ty} \quad (10)$$

onde E é o módulo de elasticidade do concreto, f_t a resistência à tração, f_{ty} a tensão de perda da linearidade ($f_{ty} = 0,9f_t$), ε_y a deformação específica axial correspondente à tensão de perda de linearidade e ε_u a deformação específica axial correspondente à formação da microfissura.

No diagrama da Figura 7b, as tensões f_1 e f_2 são funções lineares de f_t : $f_1=k_1f_t$ e $f_2=k_2f_t$, onde k_1 e k_2 são parâmetros empíricos dependentes da fração volumétrica de fibras utilizada. Já w_1 e w_2 são escritos como frações de w_u : $w_1=w_u/c_1$ e $w_2=w_u/c_2$, sendo c_1 e c_2 parâmetros empíricos não considerados função da fração volumétrica.

Grossi (2006) utilizou o modelo trilinear apresentado na Figura 8 para determinar o comportamento do CRFA em tração.

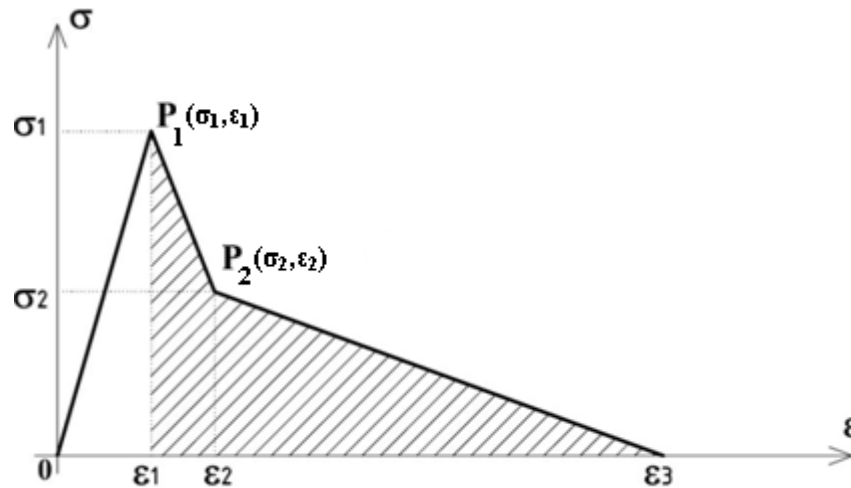


Figura 8. Modelo trilinear utilizado por Grossi (2006) para modelagem do CRFA em tração (GROSSI, 2006)

No trecho ascendente, onde $\varepsilon \leq \varepsilon_1$, o dano é nulo e $\varepsilon_1 = \sigma_1/E_c$, onde E_c o módulo de elasticidade do concreto. No trecho seguinte, tem-se que $\sigma_2 = \alpha\sigma_1 = \alpha f_t$ e $\varepsilon_2 = p_1\varepsilon_1$, sendo f_t a resistência à tração, α um parâmetro para delimitação da tensão de inflexão do trecho descendente da curva e p_1 um parâmetro para delimitação da deformação de inflexão do primeiro trecho descendente da curva. Dessa forma, para um ponto P qualquer de coordenadas (σ, ε) , pode-se calcular a tensão nesse trecho através da expressão:

$$\sigma = f_t \left[1 - \frac{(1-\alpha)(\varepsilon - \varepsilon_1)}{\varepsilon_1(p_1 - 1)} \right] \quad (11)$$

No segundo trecho descendente da curva tensão-deformação, a tensão num ponto qualquer calcula-se da seguinte forma:

$$\sigma = \frac{\alpha f_t (p_2 \varepsilon_1 - \varepsilon)}{\varepsilon_1 (p_2 - p_1)} \quad (12)$$

sendo

$$p_2 = \frac{2 G_f / h}{\alpha f_t \varepsilon_1} - \frac{(p_1 - 1 - \alpha)}{\alpha} \quad (13)$$

onde G_f é a energia de fratura e h o tamanho característico, parâmetros estes da mecânica da fratura, associados a área sob a curva tensão-deformação após o início do dano (G_f/h é o valor da área hachurada na Figura 8).

2.4 COMPORTAMENTO EM FLEXÃO

Velasco (2008) apontou o comportamento na flexão como a propriedade mais importante no estudo de concretos reforçados com fibras. Além de, na maioria das aplicações, o CRFA estar submetido a esforços de flexão, essa é a característica mais influenciada pela utilização das fibras.

Yazıcı, İnan e Tabak (2007) submeteram a ensaios de flexão corpos de prova prismáticos de 100x100x600 mm de CRFA, com frações volumétricas variando de 0,5 a 1,5% e relação de aspecto entre 45 e 80, para comparar com o concreto sem o reforço fibroso. O aumento da resistência à flexão, com relação à resistência da mistura padrão, chegou a 81% para a mistura com 1,5% de fibras de aço, cuja relação de aspecto foi igual a 80. Os autores constataram que quanto maior a relação de aspecto e o volume de reforço fibroso utilizado, maior a resistência à flexão, conforme se verifica na Tabela 3.

Campione e Mangiavillano (2008) realizaram ensaios de resistência à flexão em vigas de 150x150x600 mm de concreto armado, tanto longitudinal quanto transversalmente, utilizando concreto convencional e CRFA com 1,0% de fibras. As vigas apresentaram variação de 16% para carga de pico com o uso de 1,0% de fibras de aço.

Tabela 3. Resistência à flexão (f_f) de concretos reforçados com fibras de aço

Mistura	Fração volumétrica V_f (%)	Relação de aspecto da fibra (ℓ/d)	$f_{f,média}$ (MPa)	Incremento de f_f em relação à mistura padrão (%)
Padrão	-	-	5,94	-
CRFA1	0,5	45	6,14	3
CRFA2	1,0	45	6,32	6
CRFA3	1,5	45	7,75	30
CRFA4	0,5	65	6,24	5
CRFA5	1,0	65	8,08	36
CRFA6	1,5	65	9,33	57
CRFA7	0,5	80	6,42	8
CRFA8	1,0	80	9,74	64
CRFA9	1,5	80	10,76	81

Fonte: Yazıcı, İnan e Tabak (2007).

As curvas carga-deslocamento das vigas obtidas a partir desses ensaios estão apresentadas na Figura 9. Os autores inseriram uma curva com o comportamento de uma viga de concreto simples, de tal forma que é possível compará-lo com o comportamento das vigas de concreto armado com e sem reforço das fibras. Verifica-se que a utilização de fibras de aço aumentou a tenacidade da viga de concreto armado.

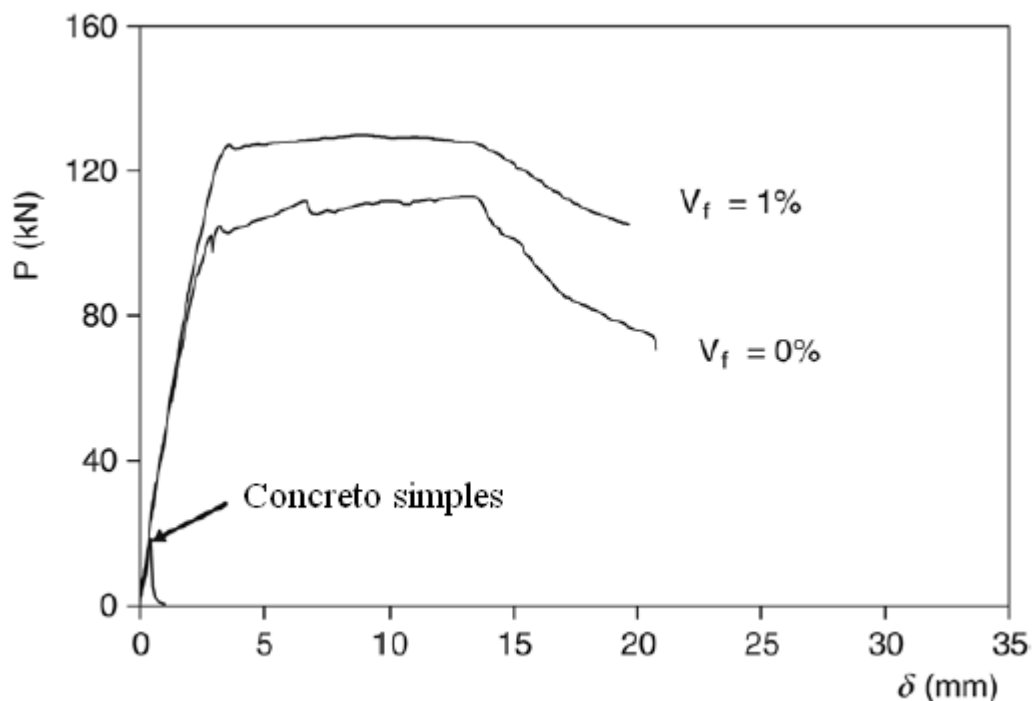


Figura 9. Curva carga-deslocamento do concreto sob flexão (CAMPIONE E MANGIAVILLANO, 2008)

O aumento da capacidade de absorção de energia em flexão é a propriedade mais beneficiada pela adição de fibras curtas de aço ao concreto convencional. Lima (2004) explicou que a adição de fibras dúcteis, como as fibras de aço, aos materiais à base de cimento, permite a continuidade da transferência de tensão entre as fissuras, mantendo a integridade estrutural do elemento, que tem seu colapso caracterizado pela ruptura das fibras ou pelo arrancamento das mesmas da matriz. Dessa forma, a capacidade do CRFA de absorver energia é significativamente maior que a capacidade da matriz sem o reforço (fibras), o que determina a diferença entre o modo de ruptura do CRFA e do concreto convencional, conforme descrevem Mehta e Monteiro (2008).

Na Figura 10 estão representados os estágios da fissuração de um CRFA. O trecho “1” é caracterizado pelo arrancamento ou ruptura das fibras. Em “2”, têm-se as fibras “costurando” a fissura, permitindo a transferência de tensões entre as regiões não fissuradas. As fibras dificultam a propagação instável da fissuração, inibindo a coalescência dessa fissura com as microfissuras representadas no trecho “3”. Dessa forma, a propagação da fissura até o trecho “4” se dá a tensões e deformações consideravelmente maiores que as da matriz sem o reforço fibroso.

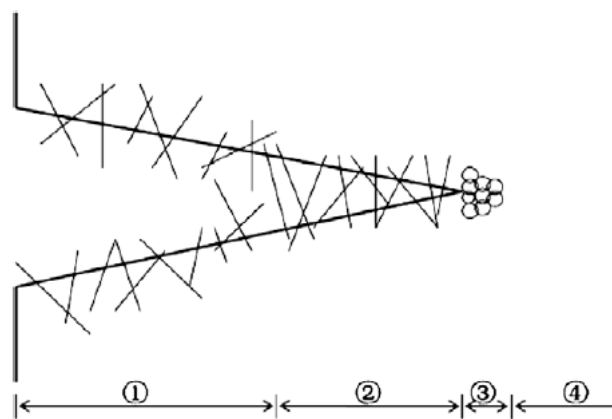


Figura 10. Representação esquemática do modo de ruptura do CRFA (WANG, WU e WANG, 2010)

Grossi (2006) identificou três mecanismos responsáveis pelo ganho de tenacidade de matrizes cimentícias reforçadas com fibras: a deformação da fibra durante a transferência de tensões da matriz fissurada para a fibra, a aderência fibra-matriz e o atrito que resiste ao arrancamento. O autor afirmou que o ganho de tenacidade é maior quando fibras de maior ductilidade são adicionadas à matriz, como é o caso das fibras de aço, que tem capacidade de absorver cargas cada vez maiores, sem se romper, após a fissuração da matriz.

O ensaio de flexão é o mais utilizado para determinação da tenacidade, uma vez que o ensaio de tração direta é de execução mais complicada que o ensaio de flexão e, somado a isso, tem-se o fato de que a maioria das aplicações do concreto reforçado com fibras envolve fenômenos de flexão. Em virtude disso, os métodos baseados em flexão são os mais utilizados. Em especial, costumam-se adotar as recomendações da norma ACI 544.4R-88 (GROSSI, 2006).

Conforme Lima (2004), a norma ACI 544.4R-88 define a tenacidade na flexão em termos de relações entre as áreas sob a curva carga-deflexão em múltiplos de deflexão de primeira fissura e a área sob a curva de primeira fissura. Por exemplo, o índice de tenacidade I_5 é obtido através da relação entre a área sob a curva até a deflexão igual a três vezes a deflexão de primeira fissura ($3\delta_f$) e a área sob a curva até a deflexão de primeira fissura (δ_f). O índice de tenacidade I_{10} é obtido através da relação entre a área sob a curva até a deflexão igual a 5,5 vezes a deflexão de primeira fissura ($5,5\delta_f$) e a área sob a curva até a deflexão de primeira fissura. Pode-se verificar esses índices e os demais estabelecidos pela referida norma na Figura 11.

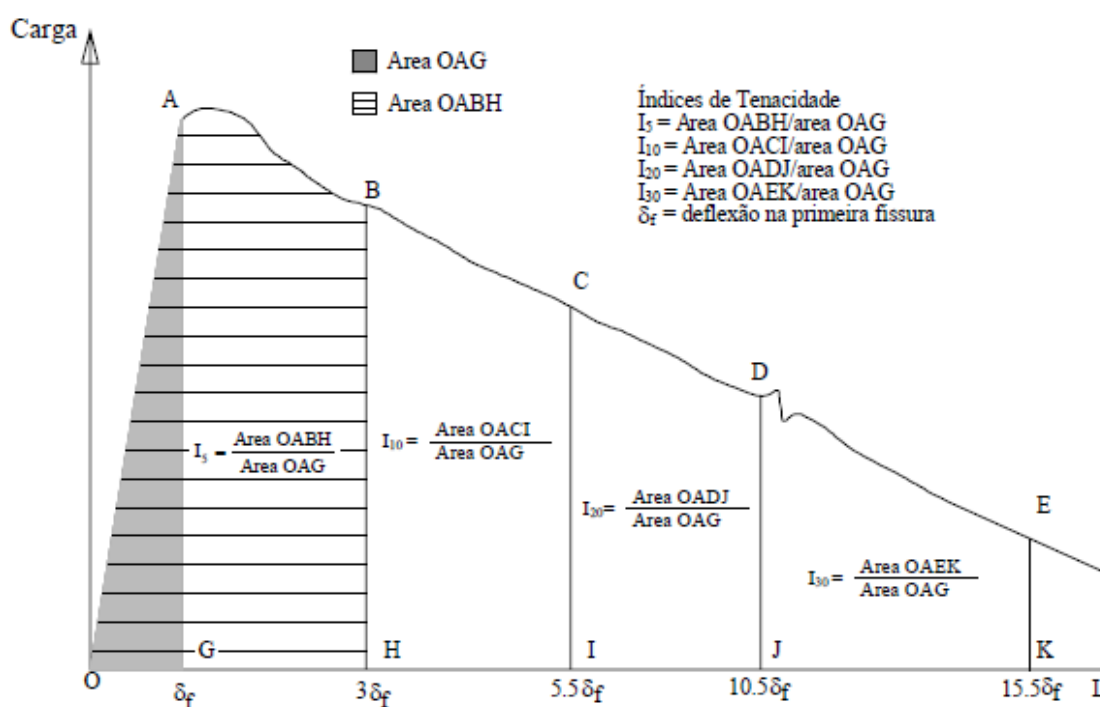


Figura 11. Índices de tenacidade propostos pela norma ACI 544.4R-88 (LIMA, 2004)

Barros (2003) reportou a tentativa da RILEM TC 162-TDF de normalizar parâmetros que caracterizassem o comportamento do concreto reforçado com fibras de aço sujeito a esforços de flexão. A RILEM estabeleceu um método de ensaio de flexão

(no qual especifica as dimensões dos corpos de prova e como deve ser feita a moldagem dos mesmos, as condições de carregamento e apoio, o equipamento a ser utilizado, entre outras características) a partir do qual se podem extrair os valores das seguintes propriedades: carga máxima registrada (F_L) até a flecha de 0,05 mm (δ_{FL}), correspondente ao limite de proporcionalidade (LOP), e capacidade de absorção de energia, sendo a mesma dividida entre a contribuição do concreto (D_{BZ}^b) e a contribuição das fibras (D_{BZ}^f), conforme apresenta a Figura 12.

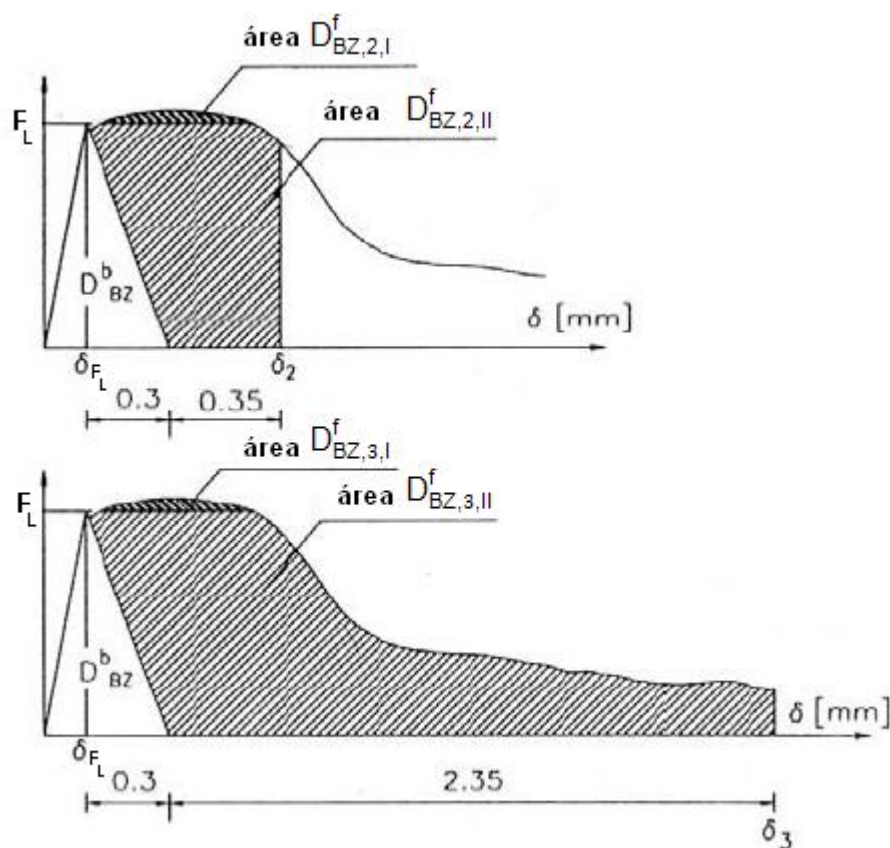


Figura 12. Diagrama carga-deslocamento típica obtida a partir do ensaio de flexão proposto pela RILEM (adaptada de LOPES, 2005)

Conhecendo-se o valor de F_L , pode-se chegar ao valor do momento correspondente ao limite de proporcionalidade (M_{LOP}) através da equação abaixo, onde L é o vão do corpo de prova:

$$M_{LOP} = \frac{F_L \cdot L}{4} \quad (14)$$

Admitindo-se uma distribuição de tensões na seção transversal como a apresentada na Figura 13, obtém-se a resistência à flexão a partir da equação 15, na qual b é a

largura do corpo de prova e h_{sp} é a distância da extremidade interna do entalhe à superfície do corpo de prova (como o entalhe tem 25 mm de comprimento, h_{sp} é, portanto, a altura do corpo de prova (h) menos o comprimento do entalhe, 25 mm).

$$f_{fct,fl} = \frac{3F_L \cdot L}{2bh_{sp}^2} \quad (15)$$

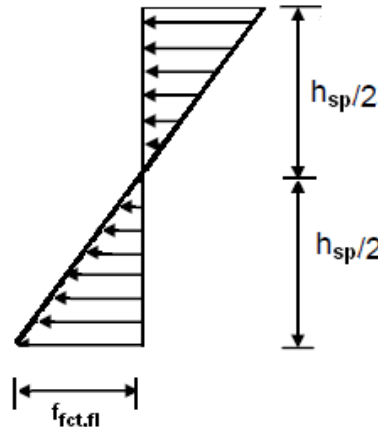


Figura 13. Distribuição de tensões admitida na seção do corpo de prova

Designadas de resistência residual à tração na flexão 1 e 4, $f_{R,1}$ e $f_{R,4}$ são as tensões para as flechas de $\delta_{R,1}=0,46$ mm e $\delta_{R,1}=3,00$ mm, relacionadas as aberturas de fissura 0,5 mm e 3,5 mm, respectivamente, e podem ser expressas da seguinte maneira:

$$f_{R,1} = \frac{3F_{R,1} \cdot L}{2bh_{sp}^2} \quad (16)$$

$$f_{R,4} = \frac{3F_{R,4} \cdot L}{2bh_{sp}^2} \quad (17)$$

Quando se conhece a resistência característica à compressão (f_{ck}), é permitido determinar o valor médio e característico da resistência à tração uniaxial (com o subíndice “ax”) através das seguintes equações:

$$f_{tm,ax} = 0,3 \cdot (f_{ck})^{2/3} \quad (18)$$

$$f_{tk,ax} = 0,7 \cdot (f_{tm,ax}) \quad (19)$$

A resistência à flexão pode, então, ser estimada por:

$$f_{fct,fl} = \frac{f_{tk,ax}}{0,6} \quad (20)$$

2.5 RESISTÊNCIA AO CISALHAMENTO

Assim como a ruptura por tração do concreto, a ruptura por cisalhamento é do tipo frágil. Com o intuito de melhorar essa propriedade, Velasco (2008) utilizou fibras curtas de aço nas frações de 1,0%, 1,5% e 2,0% em seu concreto autoadensável e realizou ensaios para mostrar a eficiência do reforço. Os resultados, apresentados na Tabela 4, mostraram que quanto maior a fração volumétrica de fibras de aço utilizada no concreto, maior será o acréscimo na resistência ao cisalhamento e na tenacidade do CRFA. Vale ressaltar que o modo de ruptura do CRFA não é frágil como o da matriz, conforme pode ser verificado na Figura 14. Após a tensão de ruptura, existe uma fase caracterizada pelo amolecimento do CRFA, o que não ocorre com a mistura padrão.

Tabela 4. Resistência ao cisalhamento de concretos reforçados com fibras de aço

Mistura	Fração volumétrica V_f (%)	τ (MPa)	Tenacidade (kN.mm)
Padrão	-	9,48	22,65
M1	1,0	11,05	189,10
M2	1,5	18,75	306,04
M3	2,0	21,60	423,04

Fonte: Velasco (2008).

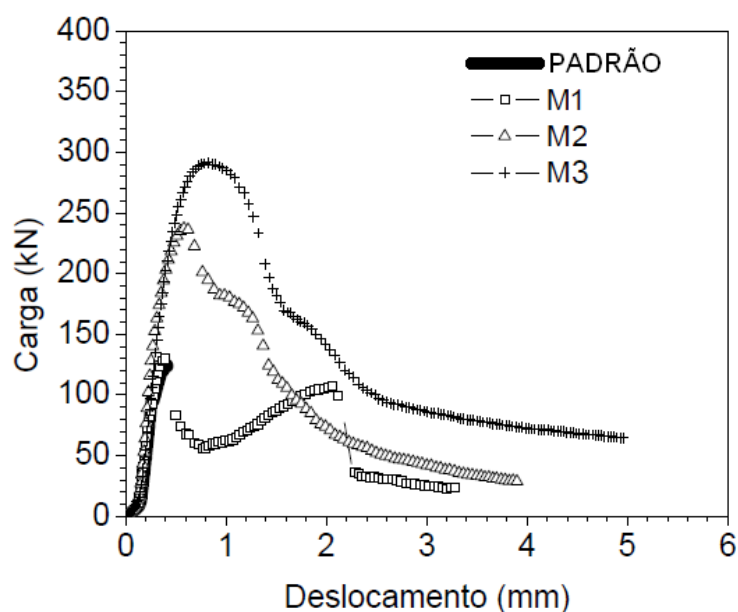


Figura 14. Curvas carga-deslocamento dos concretos sob esforços de cisalhamento (VELASCO, 2008)

A Figura 15 apresenta o ensaio de cisalhamento realizado por Marangon (2006). O autor encontrou resultados ainda maiores avaliando a resistência ao cisalhamento de uma matriz de concreto autoadensável e de concretos reforçados com fibras de aço

produzidos a partir dessa matriz com reforço de frações volumétricas iguais a 1,0%, 1,5% e 2,0%. Enquanto a mistura padrão apresentou resistência ao cisalhamento igual a 5,54 MPa, os concretos com adição de 1,0%, 1,5% e 2,0%, atingiram resistências iguais a 21,39 MPa, 24,75 MPa e 27,23 MPa, respectivamente. Maragon (2006) constatou que o uso de maiores frações volumétricas provocou acréscimos ainda maiores na tensão pós-pico e na tenacidade ao cisalhamento que na resistência propriamente dita.

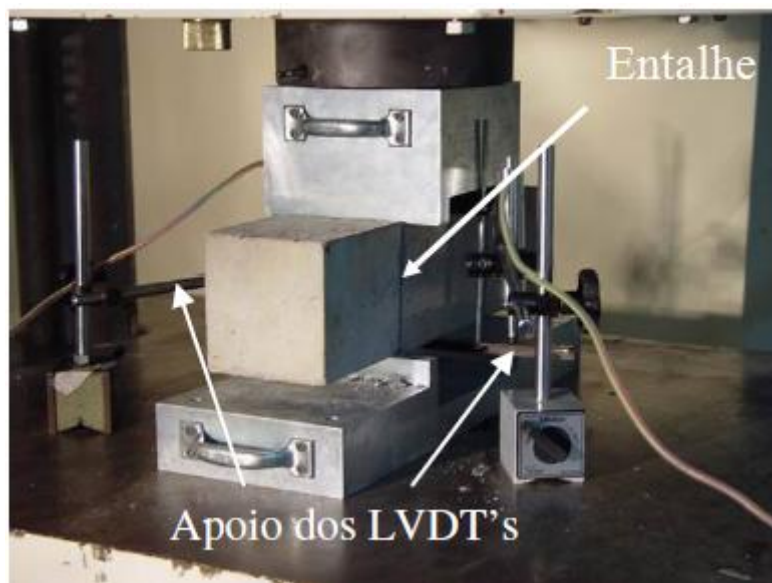


Figura 15. Ensaio de cisalhamento (Maragon, 2006, modificada)

3 ASPECTOS NORMATIVOS SOBRE A APLICAÇÃO ESTRUTURAL DO CRFA

Chunxiang e Patnaikuni (1999) constataram em seus estudos que a adição de reforço fibroso aumentou a rigidez, a tensão de pico e a ductilidade de vigas de concreto armado submetidas a esforços de flexão e proporcionou maiores deslocamentos antes da ruptura das mesmas. Além disso, os autores verificaram que a adição de fibras de aço reduziu o número, o tamanho e a abertura de fissuras. Cucchiara, Mendola e Papia (2004) avaliaram o comportamento quanto ao cisalhamento de vigas submetidas ao ensaio de flexão de quatro pontos. Para tanto, produziram vigas sem o reforço convencional para resistir a tensões cisalhantes (a armadura transversal) e sem fibras de aço, vigas sem armadura transversal e com fibras de aço, vigas com armadura transversal e sem fibras de aço e, finalmente, vigas com armadura transversal e com fibras de aço. Os resultados possibilitaram aos autores concluir que foi possível obter em vigas reforçadas com fibras de aço, um desempenho comparável ao de vigas produzidas com a armadura transversal, embora tenham considerado o uso concomitante mais apropriado, já que o reforço convencional promoveu melhor capacidade de deformação após o limite elástico.

Apesar das constatações relatadas, o reforço com fibras de aço tem sido mais frequentemente utilizado em vigas e lajes de concreto para melhorar seu desempenho no estado limite de serviço (LOPES, 2005). A seguir, será apresentada a formulação proposta pelo ACI 544.4R-88 que considera a contribuição estrutural das fibras de aço no dimensionamento de vigas de concreto armado.

O dimensionamento das estruturas de concreto armado convencional geralmente é feito no estado-limite último, resistindo aos esforços de forma econômica e segura, já que o mesmo só ocorre em situação extrema. Conforme explicam Carvalho e Figueiredo Filho (2007), os três estádios de deformação de uma viga de concreto na flexão normal simples são caracterizados da seguinte maneira: Estádio I, correspondente ao estado elástico, caracterizado por momento fletor de pequena intensidade, e tensão de tração que não ultrapassa a resistência característica à tração do concreto. Estádio II, no qual as fissuras de tração no concreto já são visíveis e Estádio III, cujo momento fletor atuante tem valor próximo ao de ruína.

O estado-limite último corresponde ao Estádio III. Nesse estágio, dá-se o início do escoamento da fibra mais comprimida do concreto a partir da deformação específica de 0,2% (2,0‰) até o valor de 0,35% (3,5‰) sem aumento de tensão. A esse nível de deformação, Carvalho e Figueiredo Filho (2007) explicaram que o diagrama de tensões do concreto convencional tende a ficar uniforme, com quase toda a região comprimida do concreto trabalhando com sua tensão máxima, atingindo deformações superiores a 2,0‰. Além disso, os autores comentaram que com as fissuras aproximando-se cada vez mais da linha neutra, a região comprimida diminui. A NBR 6118 admite que a distribuição de tensões no concreto no Estádio III ocorra segundo o diagrama parábola-retângulo, que pode ser substituído por um diagrama retangular, de altura igual a 80% da profundidade da linha neutra, ambos apresentados na Figura 16.

Na Figura 16, b e h são a largura e a altura da seção transversal, respectivamente, d é a altura útil, A_s é a área de aço, f_{yd} é a tensão de tração no aço, enquanto f_{cd} é a tensão de compressão no concreto, T_y e C são as forças de tração e compressão aplicadas ao aço e ao concreto, respectivamente, e ε_y e ε_c são as deformações do aço e do concreto, nessa ordem.

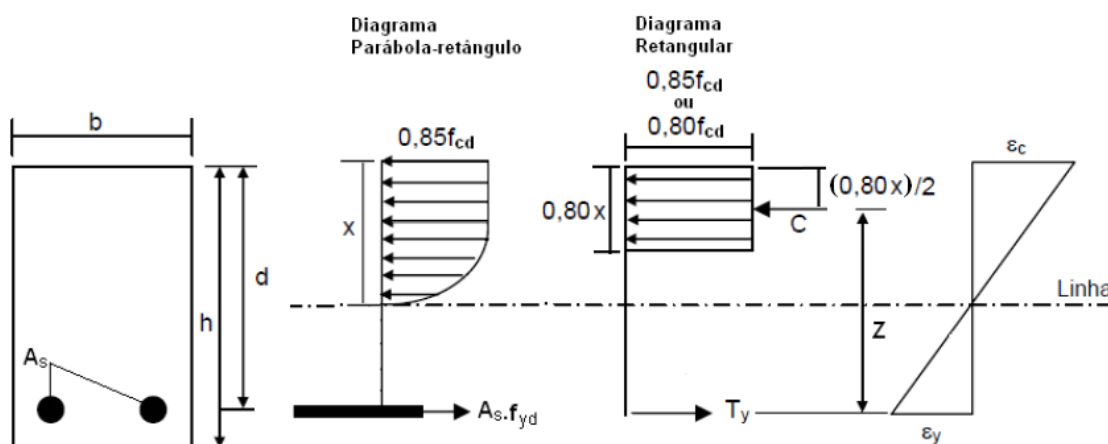


Figura 16. Diagrama de tensões e deformações no concreto armado no estado-limite último (LOPES, 2005, modificada)

Segundo Lopes (2005), a formulação proposta pelo ACI 544.4R-88 considerou a contribuição da resistência à tração do CRFA através da equação abaixo e sugeriu o esquema de distribuição de tensões e deformações apresentado na Figura 17.

$$\sigma_{ct} = 0,00772 \cdot \left(\frac{\ell}{d_f}\right) \cdot V_f \cdot \eta_\tau \quad (21)$$

onde σ_{ct} é a tensão de tração no CRFA (MPa), ℓ é o comprimento da fibra, d_f o diâmetro da fibra, V_f o volume de fibra (%) e η_τ a eficiência da aderência da fibra à matriz, que varia de 1,0 a 1,2, dependendo das características da fibra. O acréscimo na resistência à compressão, quando houver, é considerado através da resistência à compressão do CRFA (f_{cf}).

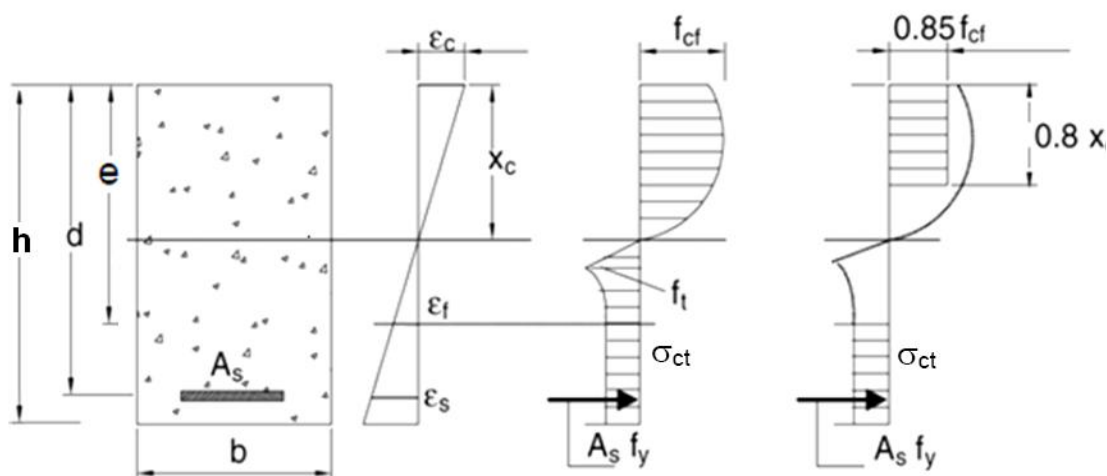


Figura 17. Diagrama de tensões e deformações no CRFA armado no estado-limite último proposto pelo ACI 544.4R-88 (Campione e Mangiavillano, 2008, modificado)

Através do diagrama de deformações, pode-se calcular a altura da linha neutra, x_c , além do valor da distância e , que é a distância do topo da viga até o ponto onde a tensão de tração (σ_{ct}) é alcançada:

$$x_c = \frac{0,003 \cdot d}{\varepsilon_s + 0,003} \quad (22)$$

$$e = (\varepsilon_f + 0,003) \cdot \frac{x_c}{0,003} \quad (23)$$

sendo d a altura útil da seção e ε_s e ε_f as deformações de tração na armadura longitudinal e nas fibras de aço, respectivamente.

Dessa forma, por equilíbrio estático, o somatório dos momentos decorrentes de cada uma das forças atuantes na seção transversal deve ser zero. Então, conclui-se que o momento nominal (M_n) resistido pela viga composta por CRFA e armadura longitudinal é dado por:

$$M_n = A_s \cdot f_y \cdot \left(d - \frac{0,8x_c}{2} \right) + \sigma_{ct} \cdot b \cdot (h - e) \cdot \left(\frac{h}{2} + \frac{e}{2} - \frac{0,8x_c}{2} \right) \quad (24)$$

onde A_s é a área da seção transversal da armadura longitudinal, f_y é a resistência à tração do aço utilizado na armadura longitudinal e f_r é a tensão residual nas fibras de aço.

Em suma, para o dimensionamento de vigas de concreto armado com CRFA é proposta é considerar a mesma simplificação do diagrama de tensão em compressão utilizada para o concreto convencional e a hipótese de Navier-Bernoulli de que seções planas permanecem planas. Já no diagrama de tensão em tração, somada à resistência da armadura longitudinal tem-se a contribuição das fibras.

4 PREVISÃO DO COMPORTAMENTO DE VIGAS CONSTITUÍDAS POR CRFA

A seguir, serão apresentados alguns modelos computacionais encontrados na literatura que descrevem o comportamento do CRFA.

Conforme Souza (2006), a modelagem numérica possibilita a análise de diversas variáveis em uma estrutura com relativa economia. Através do programa comercial DIANA, o autor fez a modelagem numérica das vigas de concreto armado sem o reforço de fibras curtas de aço de Lopes (2005) e com 2% de reforço, utilizando elementos finitos bidimensionais, simulando o estado plano de tensão. Para representar o concreto, com e sem o reforço, o autor utilizou o elemento finito isoparamétrico CQ16M de 8 nós. A resistência à compressão do concreto com e sem fibras foi de 41,4 MPa e 64,2 MPa, respectivamente, e o coeficiente de Poisson considerado para ambos foi 0,15. Para o aço foi considerado o comportamento elastoplástico perfeito, a tensão de escoamento igual a 600 MPa, o módulo de elasticidade de 200 GPa e coeficiente de Poisson igual a 0,20. A geometria das vigas e o esquema de carregamento do ensaio estão representados na Figura 18.

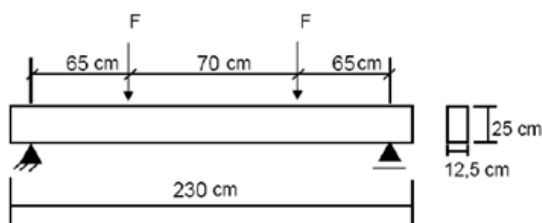


Figura 18. Geometria e esquema de carregamento (SOUZA, 2006)

Souza (2006) utilizou a mecânica da fratura linear e calculou a energia dissipada devido à fissuração do concreto na compressão a partir dos diagramas tensão-deformação determinados experimentalmente por Lopes (2005). Para determinação do diagrama tensão-deformação na tração, o autor fez uso da expressão abaixo, recomendada pelo CEB-FIP/MC (1990,1991), para concretos convencionais, cuja resistência à compressão (f_c) é inferior a 80 MPa:

$$G_F^0 = 0,025 \left(\frac{f_c}{10} \right)^{0,7} \quad (25)$$

Para as vigas de concreto com fibras de aço, a energia de fratura foi calculada por Souza (2006) segundo a expressão relatada por Barros (1995):

$$G_F = (19,953 + 10,506V_f)G_F^0 \quad (26)$$

sendo V_f o volume de fibras.

Os resultados de Souza (2006) estão apresentados na Figura 19. O autor considerou que obteve boa concordância entre a curva carga-deslocamento proveniente da sua modelagem numérica e a curva dos resultados experimentais de Lopes (2005), exceto pelo fato do modelo, no caso da viga sem o reforço fibroso (ver Figura 19a), não se ajustar ao resultado experimental.

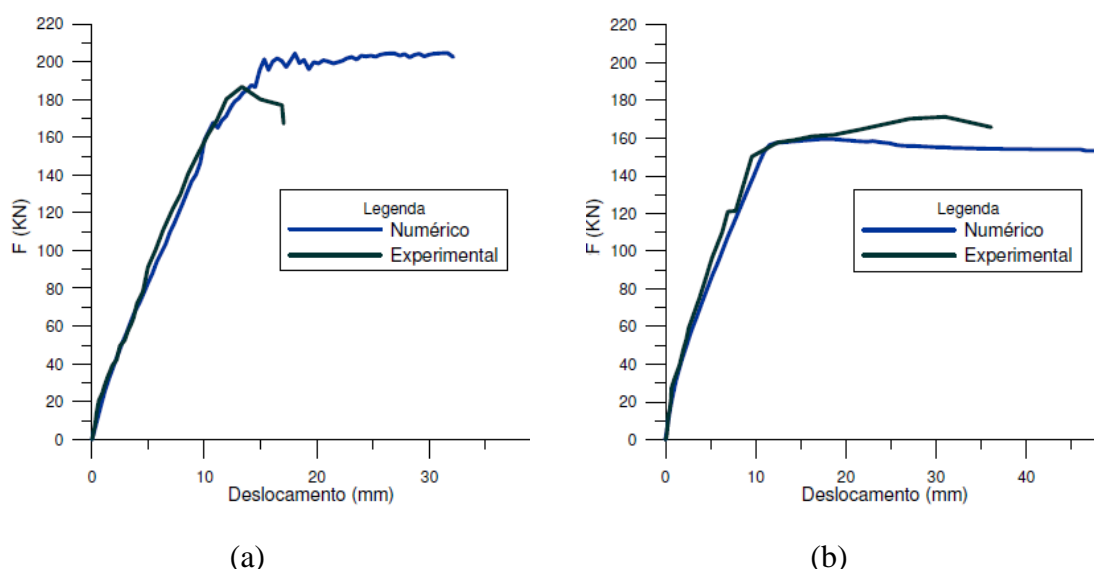


Figura 19. Curvas carga-deslocamento de vigas de concreto armado sob flexão: (a) sem fibras de aço e (b) com fibras de aço (SOUZA, 2006)

Grossi (2006) propôs uma análise não-linear utilizando o método dos elementos finitos. Em sua modelagem numérica, como já foi mencionado em 2.2.2, Grossi (2006) se valeu da lei constitutiva proposta por Carreira e Chu (1985) para concretos convencionais submetido a esforços de compressão. Para descrever o comportamento em tração do material, o autor utilizou o diagrama tensão-deformação trilinear descrito em 2.3.2. Para atestar a validade desse modelo, denominado como modelo trilinear padrão, Grossi (2006) comparou as curvas obtidas às curvas experimentais apresentadas por Nunes e Agopyan (1998) e Araújo (2002).

Nunes e Agopyan (1998) realizaram ensaios de flexão em quatro pontos em vigas de concreto convencional e concreto reforçado com fibras nos teores de 20, 40 e 60 kg/m³ e Araújo (2002) realizou ensaios de flexão em três pontos em vigas de concreto convencional e concreto reforçado com fibras nos teores de 79, 118 e 157 kg/m³. As principais características dos concretos utilizadas nas análises estão apresentadas na Tabela 5. A geometria das vigas e o esquema de carregamento do ensaio estão representados nas Figura 20 e Figura 21, respectivamente.

Tabela 5. Propriedades dos materiais utilizados nas vigas analisadas

Estudos	V _f (kg/m ³)	f _c (MPa)	E (MPa)	v	f _t (MPa)
Agopyan e	20	39,2	32268	0,2	5,81
Nunes	40	40,6	32662	0,2	6,81
(1998)	60	40,4	32598	0,2	6,76
Araújo	79	74,1	39902	0,2	6,73
(2002)	118	80,3	40992	0,2	6,55
	157	79,6	40866	0,2	8,95

Fonte: Grossi (2006).

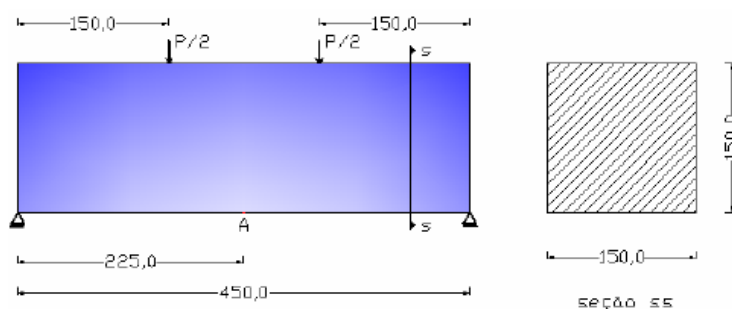


Figura 20. Geometria (mm) e esquema de carregamento das vigas de Agopyan e Nunes (1998) (GROSSI, 2006)

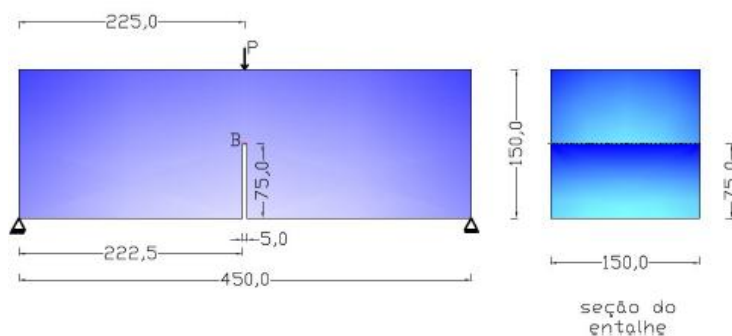


Figura 21. Geometria (mm) e esquema de carregamento das vigas de Araújo (2002) (GROSSI, 2006)

Os resultados estão apresentados nas Figura 22 e Figura 23. O autor concluiu que o modelo trilinear padrão tem aplicabilidade maior que o bilinear e não-linear, disponíveis na literatura, para aplicações usuais.

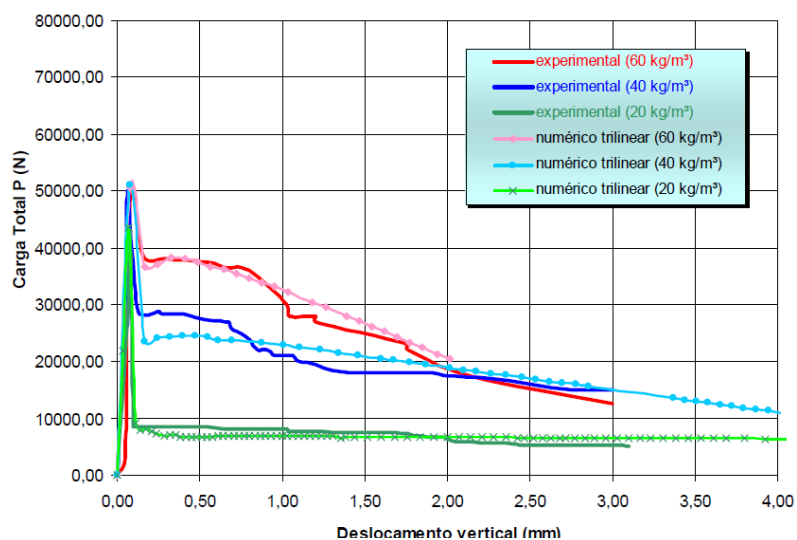


Figura 22. Curvas carga-deslocamento de vigas de concreto armado sob flexão de quatro pontos (GROSSI, 2006)

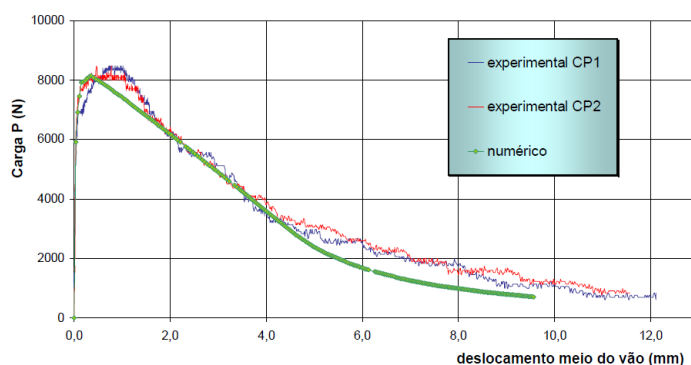


Figura 23. Curvas carga-deslocamento de vigas de concreto armado sob flexão de três pontos (GROSSI, 2006)

Araújo *et al.* (2010) modelaram vigas de concreto armado reforçado com fibras de aço, submetidas a esforços de cisalhamento, utilizando o método dos elementos finitos e o modelo de fissuração distribuída, no qual os principais parâmetros relacionados com a mecânica da fratura introduzidos foram as energias de fraturamento à tração e à compressão e a largura da banda de fissuração. Os autores consideraram a redução do módulo de elasticidade transversal, fazendo variar o fator de retenção do cisalhamento (β). O modelo constitutivo utilizado para representar o concreto sem fibras na tração foi um modelo com amolecimento linear. Para representar o concreto com fibras, utilizou-

se um modelo com amolecimento bilinear, apresentado na Figura 24. Para representar o concreto na compressão, foi utilizado um modelo com amolecimento parabólico.

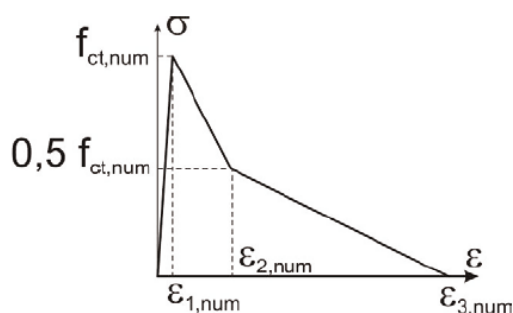


Figura 24. Curva tensão-deformação à tração típica do concreto reforçado com fibras (ARAÚJO *et al.*, 2010)

Os autores utilizaram os resultados experimentais obtidos a partir de ensaios de cisalhamento realizados em vigas de concreto armado sem armadura transversal (estribos), com armadura transversal, sem armadura transversal e 1,0% ou 2,0% de fibras curtas de aço e com armadura transversal e 1,0% ou 2,0% de fibras curtas de aço. Para modelagem das vigas no programa comercial DIANA, foi utilizado um elemento finito sólido isoparamétrico de 8 nós, com três graus de liberdade (translações) por nó. Para representar as armaduras, foi utilizado o elemento “*embedded reinforcement*”. A geometria das vigas e o esquema de carregamento do ensaio estão representados na Figura 25.

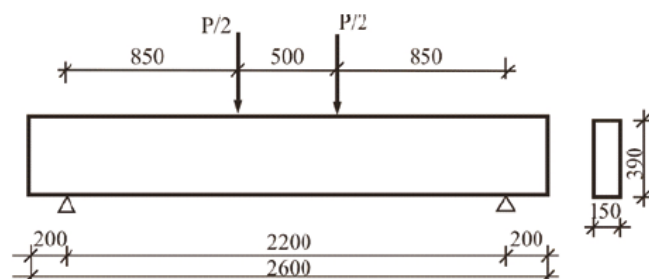


Figura 25. Geometria (mm) e esquema de carregamento (ARAÚJO *et al.*, 2010)

Os resultados obtidos por Araújo *et al.* (2010) para vigas de concreto armado reforçadas com 1,0% de fibras curtas de aço sem armadura transversal estão apresentados na Figura 26 e com armadura transversal, na Figura 27. Os autores sugeriram que, de forma geral, se utilize o fator de retenção do cisalhamento em torno de 0,15 para vigas de concreto reforçado com fibras, pois constataram para esse valor boa correlação entre os resultados numéricos e os experimentais, como pode ser visto em ambas as figuras a seguir.

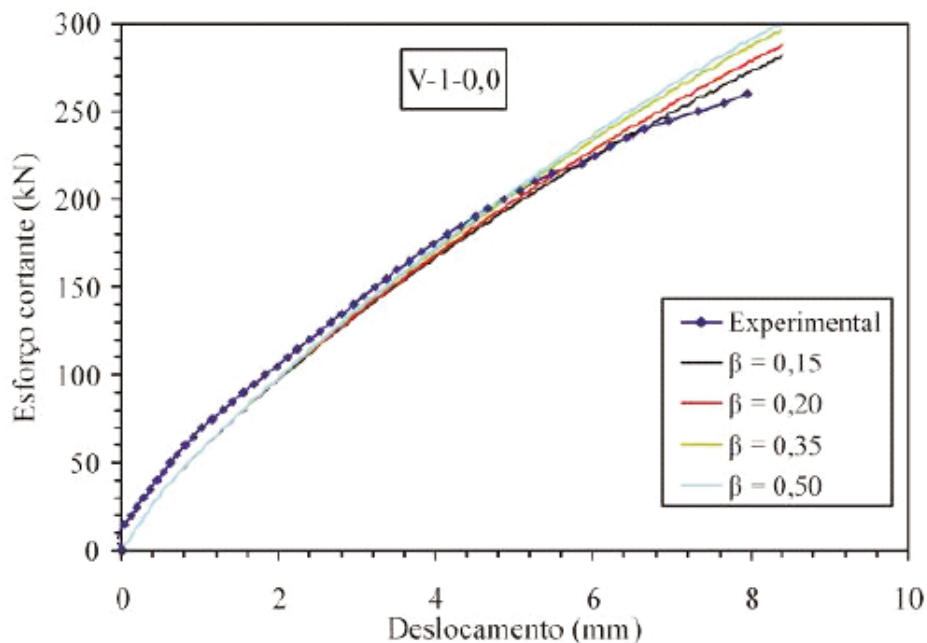


Figura 26. Curvas carga-deslocamento de vigas de concreto armado sem estribos sob esforços de cisalhamento (ARAÚJO *et al.*, 2010)

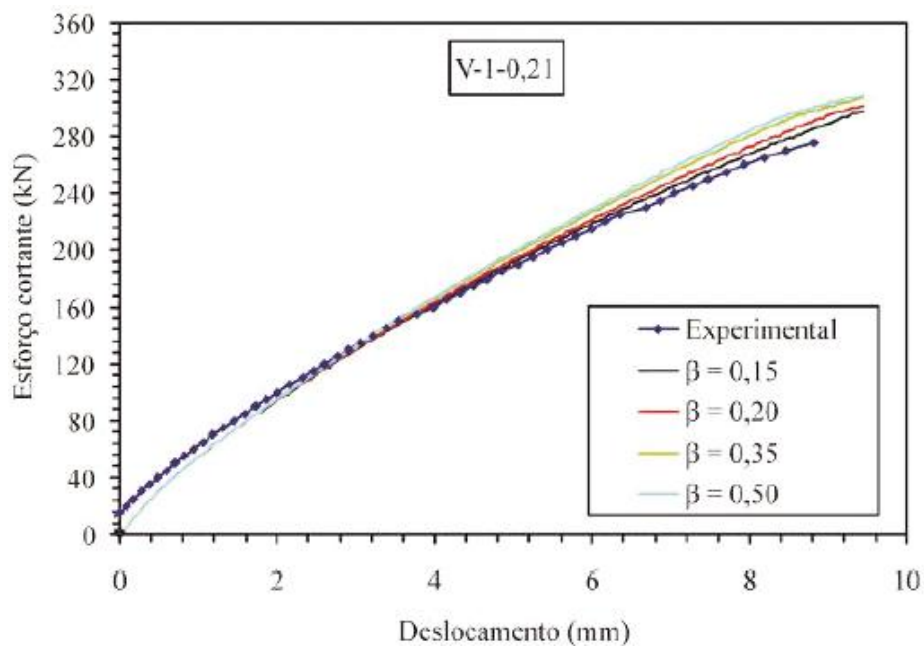


Figura 27. Curvas carga-deslocamento de vigas de concreto armado com estribos sob esforços de cisalhamento (ARAÚJO *et al.*, 2010)

5 MODELO TEÓRICO PROPOSTO

O modelo aqui proposto combina a teoria clássica de laminados (TCL) com um modelo de dano (Mazars, 1984) aplicado ao concreto. Fez-se uso de uma formulação variacional com o intuito de obter as equações diferenciais e correspondentes condições de contorno, de forma natural e consistente, que viabilizassem a implementação computacional através do método das diferenças finitas energéticas. Nesse capítulo, serão apresentadas as hipóteses utilizadas para obter uma previsão teórica do comportamento de vigas de concreto (armadas convencionalmente ou não) reforçadas com fibras curtas de aço submetidas a esforços de flexão plana, considerando a não-linearidade física do material. A metodologia utilizada para o desenvolvimento da formulação analítica que segue foi baseada em Lima (1995).

5.1 SISTEMA DE REFERÊNCIA E HIPÓTESES BÁSICAS

As vigas em estudo são prismáticas de seção retangular. As equações diferenciais que descrevem a flexão plana serão determinadas utilizando-se o sistema cartesiano ortogonal de referência apresentado na Figura 28 e as hipóteses a seguir:

- i. A atuação do carregamento se dá no plano XZ, em relação ao qual a seção transversal da barra é simétrica, o que caracteriza a flexão plana;
- ii. As componentes de deformação e as rotações são bem pequenas em relação à unidade. Dessa forma, fica estabelecida a linearidade geométrica;
- iii. As seções transversais permanecem planas, normais ao eixo da barra e indeformadas;
- iv. As tensões normais σ_y e σ_z são pequenas se comparadas a σ_x , sendo desprezadas;
- v. As lâminas não apresentam deslizamento entre si, caracterizando a aderência perfeita;
- vi. Cada lâmina apresenta espessura constante.

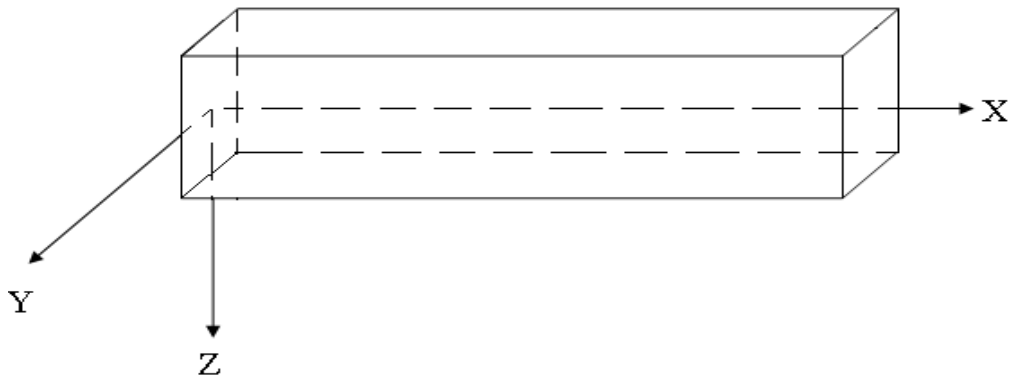


Figura 28. Sistema cartesiano ortogonal de referência

Faz-se necessário lembrar que o eixo X não passa necessariamente pelo centróide da seção transversal, como ocorre quando, por exemplo, uma camada é constituída de um material diferente das demais.

5.2 CAMPO DE DESLOCAMENTOS

Estão associadas a qualquer ponto da barra três componentes de deslocamento (u , v e w), consideradas positivas quando no sentido de X, Y e Z, respectivamente. As componentes de deslocamento dependem da posição do ponto ao qual estão associadas, portanto, pode-se escrever genericamente $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ e $w(x,y,z)$.

De acordo com a Figura 29, deduz-se que:

$$u(x,y,z) = u_0 + z \sin \theta \quad (27)$$

$$v(x,y,z) = 0 \quad (28)$$

$$w(x,y,z) = w_0 + z(\cos \theta - 1) \quad (29)$$

Já que as rotações são bem pequenas em relação à unidade, pode-se admitir as seguintes aproximações:

$$\sin \theta \cong \theta \cong -w_0' = \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (30)$$

$$\cos \theta \cong 1 \quad (31)$$

$$\cos \theta - 1 \cong -\frac{\theta^2}{2} \quad (32)$$

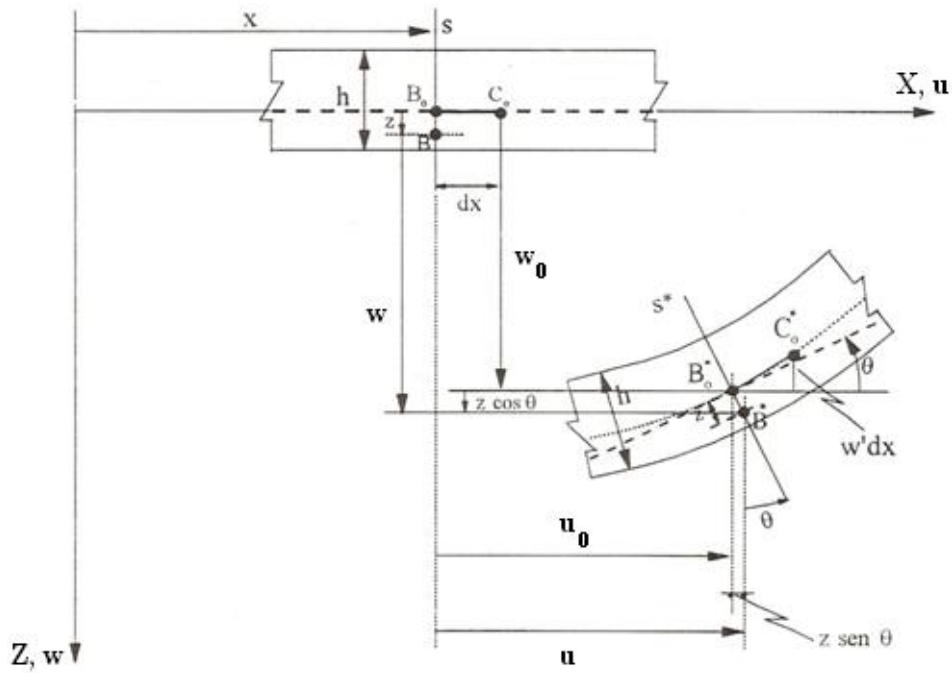


Figura 29. Deslocamentos de um ponto genérico “B” (LIMA, 1995)

A parcela $z \frac{\theta^2}{2}$ tem valor muito pequeno em relação ao valor de w e pode ser desprezada. Dessa forma, o campo de deslocamentos fica assim definido:

$$u(x,z) = u_0 - z w_0' = u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (33)$$

$$v = 0 \quad (34)$$

$$w(x) = w_0 \quad (35)$$

5.3 RELAÇÕES DEFORMAÇÃO-DESLOCAMENTO LINEARES

Por definição, as relações deformação-deslocamento são:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (36)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (37)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (38)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (39)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (40)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (41)$$

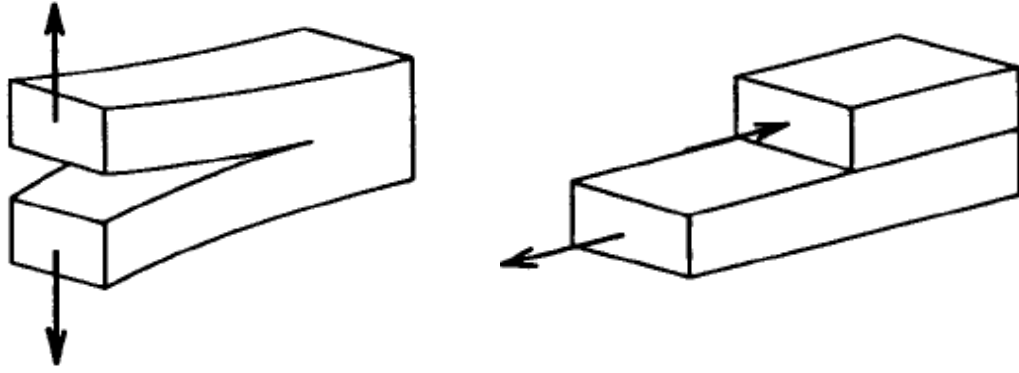
Substituindo as derivadas dos deslocamentos, todas as relações acima estabelecidas são nulas, exceto ε_x , que vale:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = u_0' - z w_0'' \quad (42)$$

5.4 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

Na presente pesquisa foi utilizado o modelo de dano proposto por Mazars (1984) para o concreto, utilizado por Álvares (1993) e Sanches Júnior e Venturini (2007), entre outros pesquisadores, para considerar a redução da rigidez do material. As hipóteses nas quais se baseia o modelo são:

- i. O dano D é considerado isótropo, desse modo, a variável D é uma grandeza escalar;
- ii. A ruptura local se dá através de um esforço perpendicular à superfície que contém o defeito (Figura 30a) ou por meio de uma combinação desse esforço com um esforço cisalhante aplicado no plano dessa superfície e na direção paralela ao defeito (Figura 30b);
- iii. Deformações permanentes são desprezadas.



(a) Modo I

(b) Modo II

Figura 30. Modos de abertura da superfície de uma fissura

O dano tem início quando a deformação equivalente supera a deformação correspondente à máxima tensão de tração obtida no ensaio de tração direta (ε_{d0}). A deformação equivalente (ε_{eq}), de acordo com Lemaitre e Desmorat (2005), é dada por:

$$\varepsilon_{eq} = \begin{cases} \varepsilon, & \varepsilon \geq 0 \\ -\nu\varepsilon\sqrt{2}, & \varepsilon < 0 \end{cases} \quad (43)$$

A variável de dano D é assumida como composta por duas partes: uma são os danos provocados por esforços de compressão e a outra, os provocados por esforços de tração, sendo admitido nesse trabalho que apenas uma das duas estará atuando em cada ponto da viga, de forma que:

$$D_c(\varepsilon_{eq}) = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1-A_c)}{\varepsilon_{eq}} - \frac{A_c}{\exp[B_c(\varepsilon_{eq} - \varepsilon_{d0})]} \quad (44)$$

$$D_t(\varepsilon_{eq}) = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1-A_t)}{\varepsilon_{eq}} - \frac{A_t}{\exp[B_t(\varepsilon_{eq} - \varepsilon_{d0})]} \quad (45)$$

onde A_c , B_c , A_t , B_t e ε_{d0} são parâmetros do material, sendo os índices c e t referentes ao comportamento do material sob esforços de compressão e tração, respectivamente.

5.4.1 Relação constitutiva para o concreto

Em consonância com a teoria de dano apresentada, levando-se em consideração a hipótese iii, que descarta as deformações permanentes, tem-se:

$$\sigma_x = (1-D)E_0\varepsilon_x \quad (46)$$

onde σ_x e ε_x são as componente de tensão e deformação, respectivamente, na direção x , D é o dano, que pode ser calculado através das equações de D_c e D_t já apresentadas, e E_0 , o módulo de elasticidade longitudinal do material íntegro.

Conforme sugere a hipótese v, citada em 5.1, no modelo proposto neste trabalho, a seção transversal da viga poderá ser dividida em lâminas a fim de possibilitar a análise de elementos com mais de um material em sua composição, como vigas de concreto armado, por exemplo. Cada lâmina ou camada tem rigidez específica e está sujeita a solicitações diferentes, dessa maneira, a evolução do dano se dará de modo distinto para cada uma e, portanto, para cada camada resultará uma relação constitutiva correspondente, a partir da relação (46).

$$\sigma_x = (1-D^k)E_0^k\varepsilon_x; k=1,2,3\dots NC. \quad (47)$$

sendo NC igual ao número de camadas.

5.4.2 Relação constitutiva para o aço

Na modelagem de vigas de concreto armado, para as barras de reforço, um comportamento elástico linear é assumido antes do escoamento; $\sigma_s = E_s\varepsilon$, onde E_s é o módulo de elasticidade do aço. Após este ponto, $\varepsilon \geq \varepsilon_y$, a tensão é considerada constante e igual à tensão de escoamento (f_y), sendo ε_y a deformação correspondente ao escoamento. Adota-se a deformação limite de 10%, acima da qual a tensão é zero, na tração e na compressão, caracterizando a ruptura do material.

5.5 ESFORÇOS SOLICITANTES

Na seção transversal submetida a esforços de flexão plana atuam os esforços normal (N) e cortante (Q) e o momento fletor (M). Convencionaram-se como positivos os esforços de mesmo sentido que os apresentados na Figura 31.

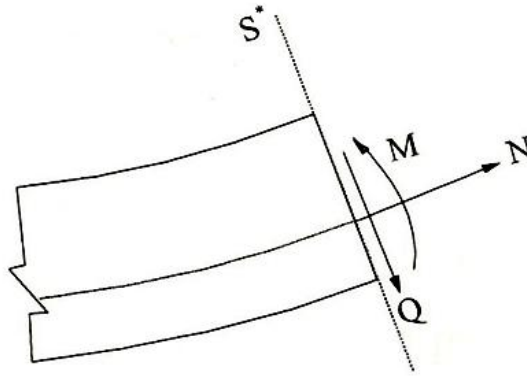


Figura 31. Sentido positivo dos esforços N, Q e M (LIMA, 1995)

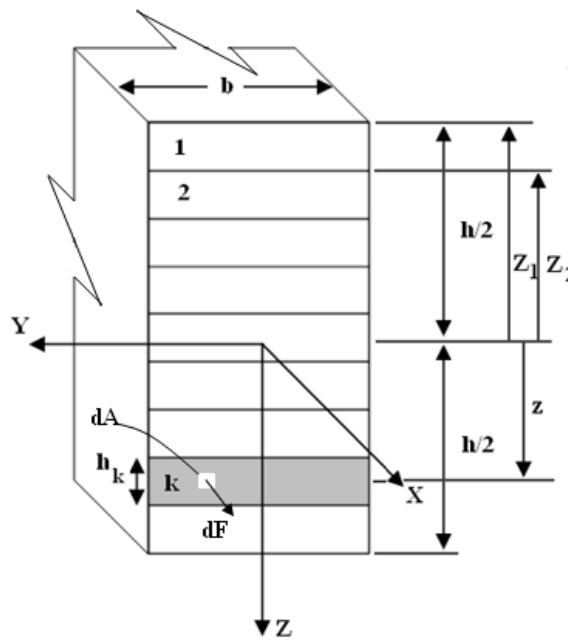


Figura 32. Representação de força atuando num elemento de área dA na seção transversal de uma viga laminada

Observando a Figura 32, deduz-se que o valor do esforço normal na seção transversal é:

$$N = \int_A \sigma_x dA \quad (48)$$

Levando-se em consideração a largura constante b da seção:

$$N = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz \quad (49)$$

Substituindo (47) em (49):

$$N=b \int_{-h/2}^{h/2} (1-D^k) E_0^k \varepsilon_x dz = b \sum_{k=1}^{NC} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} (1-D^k) E_0^k \varepsilon_x dz \quad (50)$$

que se pode escrever:

$$N=b \sum_{k=1}^{NC} (1-D^k) E_0^k \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \varepsilon_x dz \quad (51)$$

Então, substituindo (42) na equação acima, tem-se:

$$N=b \sum_{k=1}^{NC} (1-D^k) E_0^k \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} u_0' - z w_0'' dz \quad (52)$$

Desenvolvendo-se:

$$\begin{aligned} N &= b \sum_{k=1}^{NC} (1-D^k) E_0^k \left(u_0' \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} dz - w_0'' \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} z dz \right) = \\ &= b \sum_{k=1}^{NC} (1-D^k) E_0^k \left(u_0' z \Big|_{Z_k}^{Z_{k+1}} - w_0'' \frac{z^2}{2} \Big|_{Z_k}^{Z_{k+1}} \right) \end{aligned} \quad (53)$$

Dessa forma,

$$N= b \sum_{k=1}^{NC} \left\{ [(1-D^k) E_0^k (Z_{k+1}-Z_k) u_0'] - \left[(1-D^k) \frac{E_0^k}{2} (Z_{k+1}^2 - Z_k^2) w_0'' \right] \right\} \quad (54)$$

Definindo a rigidez: $Q_{11}^k = (1-D^k) E_0^k$, tem-se:

$$N= b \sum_{k=1}^{NC} \left\{ [Q_{11}^k (Z_{k+1}-Z_k) u_0'] - \left[\frac{Q_{11}^k}{2} (Z_{k+1}^2 - Z_k^2) w_0'' \right] \right\} \quad (55)$$

Reconhecendo os elementos A_{11} e B_{11} das matrizes $[A]$ e $[B]$, rigidezes axial e de acoplamento conforme denominação na teoria de laminados, resulta:

$$N = bA_{11}u_0' - bB_{11}w_0'', \text{ onde } \begin{cases} A_{11} = \sum_{k=1}^{NC} Q_{11}^k (Z_{k+1} - Z_k) \\ B_{11} = \sum_{k=1}^{NC} \frac{Q_{11}^k}{2} (Z_{k+1}^2 - Z_k^2) \end{cases} \quad (56)$$

Ainda com base na Figura 32, o momento fletor é:

$$M = \int_A z \sigma_x dA \quad (57)$$

Então,

$$\begin{aligned} M &= b \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x dz = b \int_{-h/2}^{h/2} z (1-D^k) E_0^k \epsilon_x dz = \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[z (1-D^k) E_0^k u_0' - z^2 (1-D^k) E_0^k w_0'' \right] dz \end{aligned} \quad (58)$$

Desenvolvendo:

$$\begin{aligned} M &= b \sum_{k=1}^{NC} (1-D^k) E_0^k \left(u_0' \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} z dz - w_0'' \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} z dz \right) = \\ &= b \sum_{k=1}^{NC} Q_{11}^k \left(u_0' \frac{z^2}{2} \Big|_{Z_k}^{Z_{k+1}} - w_0'' \frac{z^3}{3} \Big|_{Z_k}^{Z_{k+1}} \right) \end{aligned} \quad (59)$$

Assim,

$$M = b \sum_{k=1}^{NC} \left\{ \left[\frac{Q_{11}^k}{2} (Z_{k+1}^2 - Z_k^2) u_0' \right] - \left[\frac{Q_{11}^k}{3} (Z_{k+1}^3 - Z_k^3) w_0'' \right] \right\} \quad (60)$$

Identificando o elemento D_{11} , denominado rigidez de flexão conforme a teoria de laminados, escreve-se:

$$M = bB_{11}u_0' - bD_{11}w_0'', \text{ onde } \begin{cases} B_{11} = \sum_{k=1}^{NC} \frac{Q_{11}^k}{2} (Z_{k+1}^2 - Z_k^2) \\ D_{11} = \sum_{k=1}^{NC} \frac{Q_{11}^k}{3} (Z_{k+1}^3 - Z_k^3) \end{cases} \quad (61)$$

Determina-se o esforço cortante através da relação: $Q = M'$; proveniente do equilíbrio de um elemento diferencial da viga. Portanto,

$$Q = bB_{11}u_0'' - bD_{11}w_0''' \quad (62)$$

5.6 PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

O Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) estabelece que o trabalho virtual das forças internas é igual ao trabalho virtual das forças externas:

$$\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{ext}} \quad (63)$$

O trabalho virtual das forças internas pode ser calculado através da equação:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_V \sigma_x \delta \varepsilon_x dV + \int_V \sigma_z \delta \varepsilon_z dV + \int_V \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} dV$$

associada a um problema de estado plano de tensões e deformações. Todavia, conforme as relações deformação-deslocamento descritas em 5.3, a única componente de deformação não-nula do problema é ε_x (foram desconsideradas no modelo as contribuições do cisalhamento). Dessa forma, resulta para o trabalho interno:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_V \sigma_x \delta \varepsilon_x dV \quad (64)$$

Substituindo (42) em (64):

$$\delta W_{\text{int}} = \int_V \sigma_x \delta (u_0' - zw_0'') dV \quad (65)$$

Como

$$\delta(u'_0 - zw''_0) = \delta u'_0 - z \delta w''_0 \quad (66)$$

então,

$$\delta W_{\text{int}} = \int_V \sigma_x (\delta u'_0 - z \delta w''_0) dV \quad (67)$$

A equação acima pode ser escrita da seguinte forma:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^\ell \int_A \sigma_x (\delta u'_0 - z \delta w''_0) dA dx = \int_0^\ell \left[\delta u'_0 \int_A \sigma_x dA - \delta w''_0 \int_A z \sigma_x dA \right] dx \quad (68)$$

Substituindo (48) e (57) em (68), tem-se:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^\ell [N \delta u'_0 - M \delta w''_0] dx \quad (69)$$

Substituindo as equações (56) e (61) em (69), fica:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^\ell [(bA_{11} u'_0 - bB_{11} w''_0) \delta u'_0 - (bB_{11} u'_0 - bD_{11} w''_0) \delta w''_0] dx \quad (70)$$

O trabalho virtual das forças externas é decorrente do carregamento que atua no plano XZ da barra, ilustrado na Figura 33, e pode ser escrito da seguinte forma:

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_0^\ell (q_x(x) \delta u_0 + q_z(x) \delta w_0) dx + [\bar{F}_x \delta u_0 + \bar{F}_z \delta w_0 - \bar{M} \delta w'_0]_0^\ell \quad (71)$$

sendo $q_x(x)$ e $q_z(x)$ os carregamentos distribuídos ao longo do comprimento da barra nas direções X e Z, respectivamente, e \bar{F}_x , \bar{F}_z e \bar{M} as cargas e momentos aplicados nas extremidades.

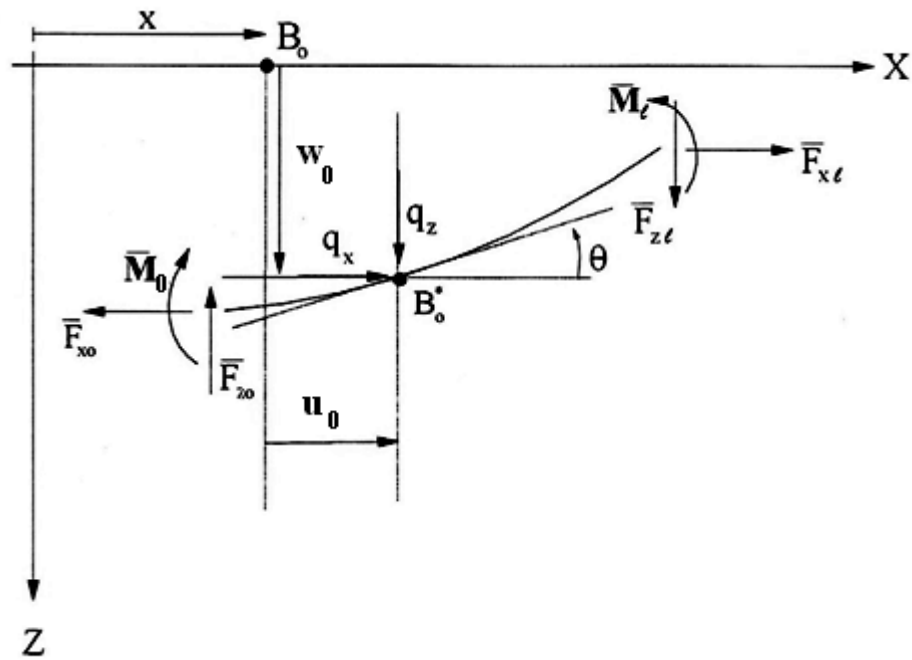


Figura 33. Carregamento externo (LIMA, 1995)

5.7 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS QUE REGEM O PROBLEMA E SUAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

Com o propósito de instituir as equações diferenciais e as condições de contorno do problema, integra-se por partes a equação do trabalho virtual das forças internas, de modo a compatibilizá-la, em termos de variações dos deslocamentos, com a equação do trabalho virtual externo. Assim, integrando-se por partes, a equação (70) fica:

$$\delta W_{\text{int}} = - \int_0^{\ell} [(bA_{11}u_0'' - bB_{11}w_0''')\delta u_0 - (bB_{11}u_0'' - bD_{11}w_0''')\delta w_0] dx + \quad (72)$$

$$+ [(bA_{11}u_0' - bB_{11}w_0'')\delta u_0]_0^{\ell} - [(bB_{11}u_0' - bD_{11}w_0'')\delta w_0]_0^{\ell}$$

Integrando-se por partes novamente, a equação do trabalho virtual das forças internas, torna-se:

$$\begin{aligned}
\delta W_{\text{int}} = & - \int_0^\ell [(bA_{11}u_0'' - bB_{11}w_0''')\delta u_0 + (bB_{11}u_0''' - bD_{11}w_0^{IV})\delta w_0] dx + \\
& + [(bA_{11}u_0' - bB_{11}w_0'')\delta u_0]_0^\ell - [(bB_{11}u_0' - bD_{11}w_0'')\delta w_0]_0^\ell + \\
& + [(bB_{11}u_0'' - bD_{11}w_0''')\delta w_0]_0^\ell
\end{aligned} \tag{73}$$

Aplicando o PTV, substituindo em (63) as equações (71) e (73):

$$\begin{aligned}
& - \int_0^\ell [(bA_{11}u_0'' - bB_{11}w_0''')\delta u_0 + (bB_{11}u_0''' - bD_{11}w_0^{IV})\delta w_0] dx + \\
& + [(bA_{11}u_0' - bB_{11}w_0'')\delta u_0]_0^\ell - [(bB_{11}u_0' - bD_{11}w_0'')\delta w_0]_0^\ell + \\
& + [(bB_{11}u_0'' - bD_{11}w_0''')\delta w_0]_0^\ell = \\
& = \int_0^\ell (q_x(x)\delta u_0 + q_z(x)\delta w_0) dx + [\bar{F}_x\delta u_0 + \bar{F}_z\delta w_0 - \bar{M}\delta w_0]_0^\ell
\end{aligned} \tag{74}$$

Institui-se, assim, as equações diferenciais do problema:

$$-(bA_{11}u_0'' - bB_{11}w_0''') = q_x(x) \text{ ou } N' = -q_x(x) \tag{75}$$

$$-(bB_{11}u_0''' - bD_{11}w_0^{IV}) = q_z(x) \text{ ou } M'' = -q_z(x) \tag{76}$$

e as seguintes condições de contorno naturais:

$$(bA_{11}u_0' - bB_{11}w_0'') = \bar{F}_x \text{ ou } N = \bar{F}_x \tag{77}$$

$$(bB_{11}u_0'' - bD_{11}w_0''') = \bar{F}_z \text{ ou } M' = \bar{F}_z \text{ ou } Q = \bar{F}_z \tag{78}$$

$$(bB_{11}u_0' - bD_{11}w_0'') = \bar{M} \text{ ou } M = \bar{M} \tag{79}$$

e as condições de contorno cinemáticas ou essenciais:

$$\bar{u}_0 = \bar{u}_0 \text{ e } \delta \bar{u}_0 = \delta \bar{u}_0 \quad (80)$$

$$w_0 = \bar{w}_0 \text{ e } \delta w_0 = \delta \bar{w}_0 \quad (81)$$

$$w_0' = \bar{w}_0' \text{ e } \delta w_0' = \delta \bar{w}_0' \quad (82)$$

6 DESENVOLVIMENTO DA FORMULAÇÃO COMPUTACIONAL

O tratamento numérico das equações associadas ao PTV, desenvolvidas para o modelo no capítulo anterior, foi feito segundo o método das diferenças finitas energéticas (MDFE), conforme segue formulação neste capítulo, baseada em Lima (1995). Para garantir a obtenção completa de respostas carga-deflexão com a presença de pontos limites de carga, foi implementada, conjuntamente com o MDFE, a técnica de controle de deslocamentos. O programa construído foi escrito utilizando-se o compilador FORTRAN.

Conforme conceituou Pletz (1983), o método das diferenças finitas, formulado no século XIX, reduz o contínuo a um sistema com um número finito de graus de liberdade. O autor afirmou que sua abordagem tradicional, conhecida como método da substituição direta, apresenta dificuldades na consideração das condições de contorno geométricas e naturais, principalmente em contornos irregulares, implicando na perda da simetria das matrizes dos coeficientes que caracteriza o método. Em função disso, desenvolveu-se um novo procedimento: o método energético das diferenças finitas. O autor explicou que nesse novo esquema somente as condições de contorno geométricas devem ser atendidas e fica assegurada a simetria das matrizes de coeficientes.

Segundo Bathe e Wilson (1976), citado por Pletz (1983), as diferenças básicas entre esse e o método dos elementos finitos (MEF) residem na escolha das componentes dos deslocamentos generalizados e na localização dos nós, sendo que o método energético das diferenças finitas apresenta a vantagem da eficiência com que as matrizes de coeficientes dos sistemas de equações são geradas, além de exigir baixo consumo de memória de computador. Pletz (1983) ponderou que, com o advento do computador, aprimorou-se a técnica e surgiu o então método da energia discretizada, no qual a energia total da estrutura é dividida em duas parcelas: uma devida à flexão e extensão e outra devida à torção e cisalhamento. Pletz (1983) utilizou, em seu estudo, esse método, cuja formulação não depende das condições de contorno. O autor, que analisou estruturas laminares, afirmou que o método é um instrumento eficiente na análise linear de chapas e placas e na análise não-linear geométrica de placas.

Lima (1995) analisou o problema da flexão de barras prismáticas com não-linearidade geométrica, no âmbito das rotações moderadas, sob solicitação dinâmica, utilizando o método das diferenças finitas energéticas (sobre o Princípio dos Trabalhos

Virtuais) e considerou que o uso desse método aliado ao método das acelerações constantes resultou em expressões matriciais simples, o que facilita a implementação computacional.

O MDFE é um método rápido e preciso, características estas desejáveis no dimensionamento de estruturas, e tem sido utilizado para modelagem estruturas de concreto armado (Costa, 1998; Jones *et al.*, 2010).

6.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O tratamento numérico das equações associadas ao PTV, deduzidas no capítulo anterior, se dá a partir da introdução das representações simples e reduzida em diferenças finitas das derivadas dos deslocamentos no espaço nestas equações.

Para entender a representação simples em diferenças finitas, deve-se analisar a Figura 34, na qual $f(x)$ é uma função genérica, m é um ponto pivotal genérico, $m-1$ e $m+1$ são pontos nodais equidistantes de m de λ e f_{m-1} , f_m e f_{m+1} são os valores de f nos pontos $m-1$, m e $m+1$, respectivamente.

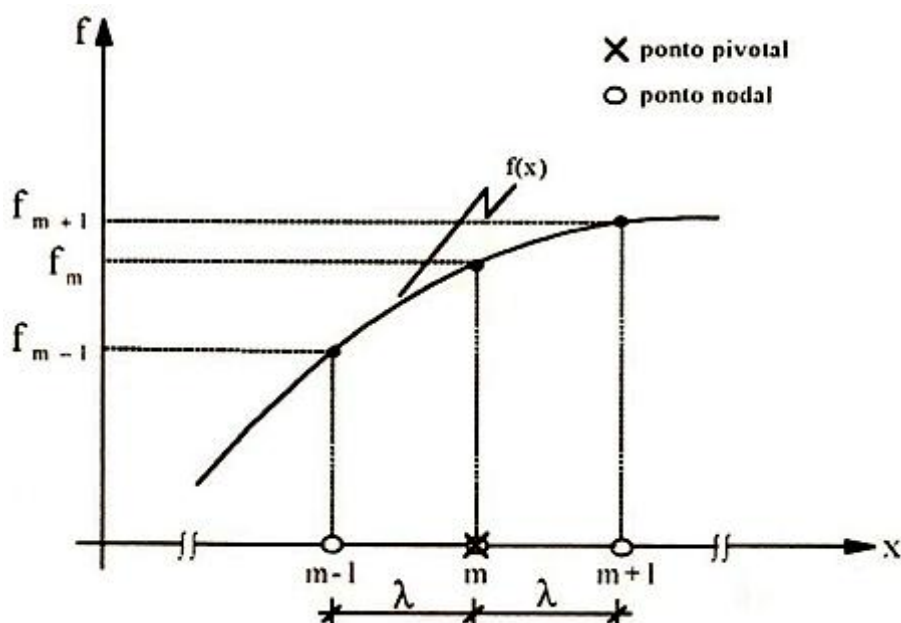


Figura 34. Esquema para representação simples da 1ª e 2ª derivadas de $f(x)$ no ponto m (LIMA, 1995)

A 1ª e a 2ª derivadas de f no ponto m , pelo MDFE, são calculadas através das expressões seguintes:

$$\dot{f}_m = \frac{1}{2\lambda} (f_{m-1} - f_{m+1}) \quad (83)$$

$$\ddot{f}_m = \frac{1}{\lambda^2} (f_{m+1} - 2f_m + f_{m-1}) \quad (84)$$

A representação reduzida deve ser compreendida com a observação da Figura 35, sendo, do mesmo modo que anteriormente, $f(x)$ uma função genérica e m um ponto pivotal genérico. $m-1$ e $m+1$ são pontos nodais equidistantes de m , dessa vez, de $\lambda/2$ e $f_{m-1/2}$, f_m e $f_{m+1/2}$ são os valores de f nos pontos $m-1/2$, m e $m+1/2$, respectivamente.

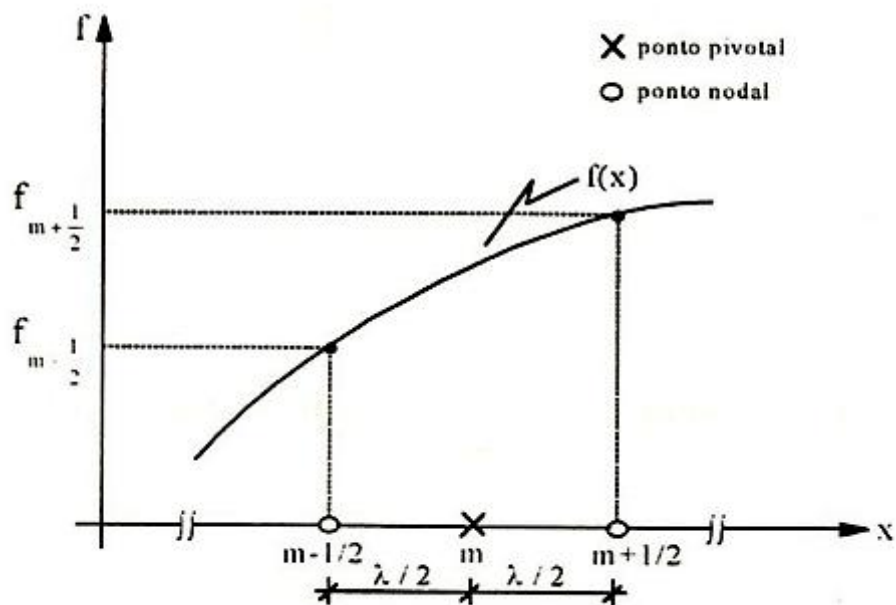


Figura 35. Esquema para representação reduzida da 1ª derivada de $f(x)$ no ponto m (LIMA, 1995)

A 1ª derivada de m , nesse caso, é calculada através da expressão abaixo:

$$\dot{f}_m \cong \frac{1}{\lambda} (f_{m+1/2} - f_{m-1/2}) \quad (85)$$

A utilização da representação reduzida será restrita às derivadas dos deslocamentos horizontais u_0' referentes aos primeiro e último trechos, conforme será apontado posteriormente, para evitar a singularidade do sistema de equações conforme já relatou Borges (1994), citada por Lima (1995).

6.1.1 Discretização do elemento estrutural e sistemas de numeração dos deslocamentos

Na Figura 36, estão representados os trechos de integração ao longo do elemento e o sistema de numeração global dos deslocamentos e, na Figura 37, está ilustrado o sistema de numeração local dos deslocamentos para os trechos inicial (a), intermediários (b) e final (c). NN significa número de nós.

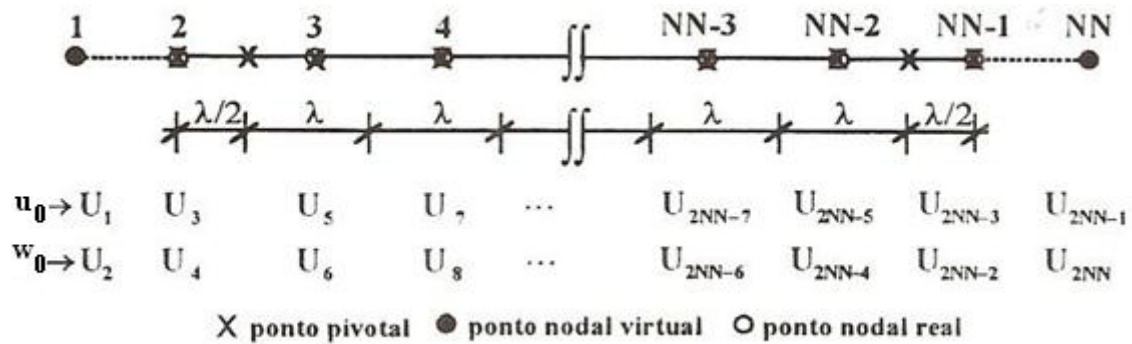
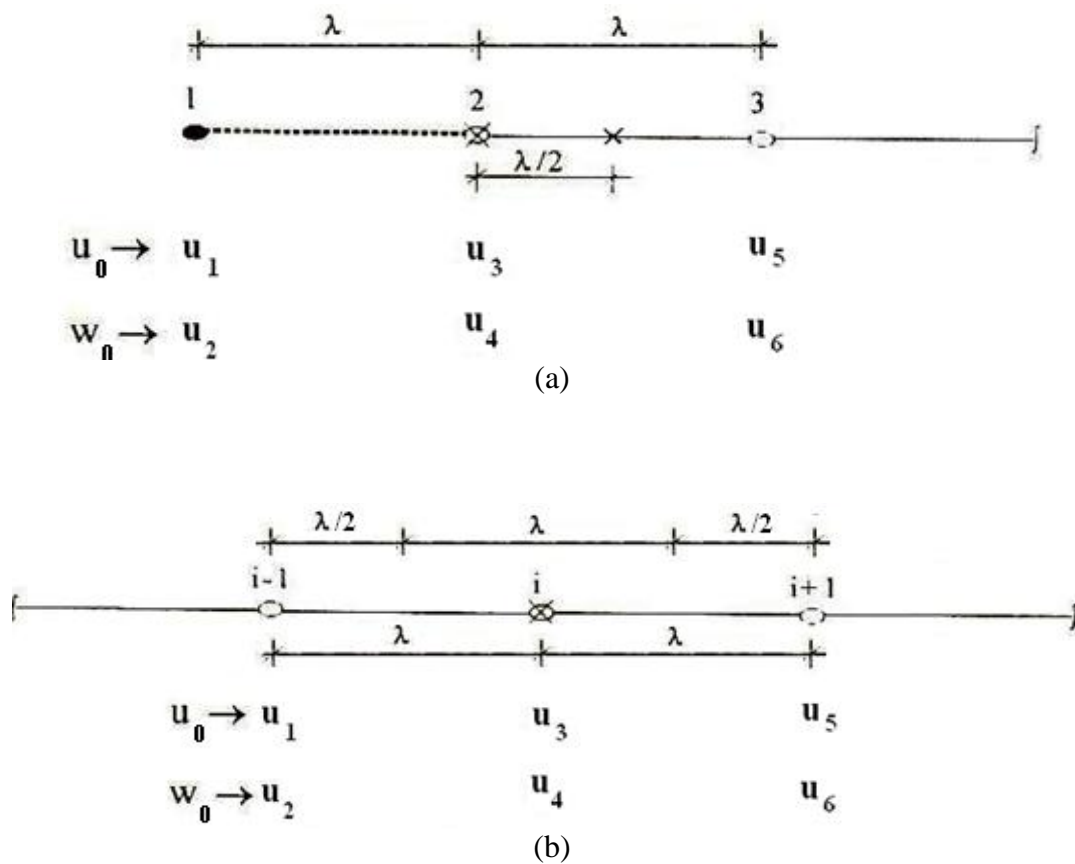


Figura 36. Discretização do elemento e sistema de numeração global dos deslocamentos (LIMA, 1995, adaptado)



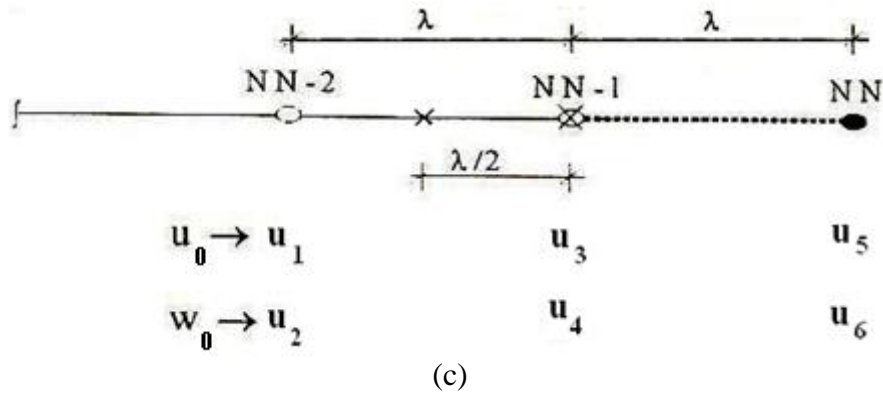


Figura 37. Sistema de numeração local dos deslocamentos (LIMA, 1995, adaptado): (a) trecho inicial, (b) trechos intermediários e (c) trecho final

6.1.2 Expressão do trabalho virtual interno

As representações em diferenças finitas serão aplicadas às derivadas dos deslocamentos no espaço que constituem a expressão (70) do trabalho virtual interno transcrita abaixo. Faz-se importante ressaltar que as derivadas serão consideradas constantes ao longo dos trechos.

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^\ell [(bA_{11}u_0' - bB_{11}w_0'')\delta u_0' - (bB_{11}u_0' - bD_{11}w_0'')\delta w_0''] dx \quad (86)$$

Reescrevendo a equação:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^\ell (bA_{11}u_0'\delta u_0' + bD_{11}w_0''\delta w_0'') dx - \int_0^\ell (bB_{11}u_0'\delta w_0'' + bB_{11}w_0''\delta u_0') dx \quad (87)$$

A primeira parcela dessa adição será identificada como δW_{int}^I e a segunda, como $\delta W_{\text{int}}^{II}$, a fim de organizar os cálculos das contribuições de cada trecho no valor total do trabalho virtual interno. Sendo assim:

$$\delta W_{\text{int}} = \sum_1^{NTI} (\delta W_{\text{int}})_{\text{i}} = \sum_1^{NTI} (\delta W_{\text{int}}^I)_{\text{i}} + (\delta W_{\text{int}}^{II})_{\text{i}} \quad (88)$$

6.1.2.1 Trabalho virtual interno do primeiro trecho de integração

Para o cálculo do trabalho virtual interno no primeiro trecho de integração, cujo comprimento é igual a $\lambda/2$ e a 1ª derivada é calculada segundo a representação reduzida, tem-se, considerando o sistema de numeração local dos deslocamentos:

$$(\delta W_{\text{int}}^I)_1 = \left[bA_{11} \left(\frac{u_5 - u_3}{\lambda} \right) \delta \left(\frac{u_5 - u_3}{\lambda} \right) + bD_{11} \left(\frac{u_6 - 2u_4 + u_2}{\lambda^2} \right) \delta \left(\frac{u_6 - 2u_4 + u_2}{\lambda^2} \right) \right] \frac{\lambda}{2} \quad (89)$$

$$(\delta W_{\text{int}}^I)_1 = \left[\frac{bA_{11}}{\lambda^2} (u_5 - u_3) \delta u_5 - \frac{bA_{11}}{\lambda^2} (u_5 - u_3) \delta u_3 + \frac{bD_{11}}{\lambda^4} (u_6 - 2u_4 + u_2) \delta u_6 - \frac{2bD_{11}}{\lambda^4} (u_6 - 2u_4 + u_2) \delta u_4 + \frac{bD_{11}}{\lambda^4} (u_6 - 2u_4 + u_2) \delta u_2 \right] \frac{\lambda}{2} \quad (90)$$

$$(\delta W_{\text{int}}^I)_1 = \left[\frac{bA_{11}}{\lambda^2} u_5 \delta u_5 - \frac{bA_{11}}{\lambda^2} u_3 \delta u_5 - \frac{bA_{11}}{\lambda^2} u_5 \delta u_3 + \frac{bA_{11}}{\lambda^2} u_3 \delta u_3 + \frac{bD_{11}}{\lambda^4} u_6 \delta u_6 - \frac{2bD_{11}}{\lambda^4} u_4 \delta u_6 + \frac{bD_{11}}{\lambda^4} u_2 \delta u_6 - \frac{2bD_{11}}{\lambda^4} u_6 \delta u_4 + \frac{4bD_{11}}{\lambda^4} u_4 \delta u_4 - \frac{2bD_{11}}{\lambda^4} u_2 \delta u_4 + \frac{bD_{11}}{\lambda^4} u_6 \delta u_2 - \frac{2bD_{11}}{\lambda^4} u_4 \delta u_2 + \frac{bD_{11}}{\lambda^4} u_2 \delta u_2 \right] \frac{\lambda}{2} \quad (91)$$

e

$$(\delta W_{\text{int}}^{II})_1 = - \left[bB_{11} \left(\frac{u_5 - u_3}{\lambda} \right) \delta \left(\frac{u_6 - 2u_4 + u_2}{\lambda^2} \right) + bB_{11} \left(\frac{u_6 - 2u_4 + u_2}{\lambda^2} \right) \delta \left(\frac{u_5 - u_3}{\lambda} \right) \right] \frac{\lambda}{2} \quad (92)$$

$$(\delta W_{\text{int}}^{II})_1 = - \left[\frac{bB_{11}}{\lambda^3} (u_5 - u_3) \delta u_6 - \frac{2bB_{11}}{\lambda^3} (u_5 - u_3) \delta u_4 + \frac{bB_{11}}{\lambda^3} (u_5 - u_3) \delta u_2 + \frac{bB_{11}}{\lambda^3} (u_6 - 2u_4 + u_2) \delta u_5 - \frac{bB_{11}}{\lambda^3} (u_6 - 2u_4 + u_2) \delta u_3 \right] \frac{\lambda}{2} \quad (93)$$

$$\begin{aligned}
(\delta W_{\text{int}}^{\text{II}})_1 = & - \left[\frac{bB_{11}}{\lambda^3} u_5 \delta u_6 - \frac{bB_{11}}{\lambda^3} u_3 \delta u_6 - \frac{2bB_{11}}{\lambda^3} u_5 \delta u_4 + \frac{2bB_{11}}{\lambda^3} u_3 \delta u_4 + \frac{bB_{11}}{\lambda^3} u_5 \delta u_2 - \right. \\
& - \frac{bB_{11}}{\lambda^3} u_3 \delta u_2 + \frac{bB_{11}}{\lambda^3} u_6 \delta u_5 - \frac{2bB_{11}}{\lambda^3} u_4 \delta u_5 + \frac{bB_{11}}{\lambda^3} u_2 \delta u_5 - \frac{bB_{11}}{\lambda^3} u_6 \delta u_3 + \\
& \left. + \frac{2bB_{11}}{\lambda^3} u_4 \delta u_3 - \frac{bB_{11}}{\lambda^3} u_2 \delta u_3 \right] \frac{\lambda}{2}
\end{aligned} \tag{94}$$

Reescrevendo as expressões no sistema global de deslocamentos, o trabalho virtual interno do primeiro trecho de integração fica:

$$\begin{aligned}
(\delta W_{\text{int}})_1 = & \left[\frac{bD_{11}}{\lambda^4} U_2 \delta U_2 + \frac{bB_{11}}{\lambda^3} U_2 \delta U_3 - \frac{2bD_{11}}{\lambda^4} U_2 \delta U_4 - \frac{bB_{11}}{\lambda^3} U_2 \delta U_5 + \right. \\
& + \frac{bD_{11}}{\lambda^4} U_2 \delta U_6 + \frac{bB_{11}}{\lambda^3} U_3 \delta U_2 + \frac{bA_{11}}{\lambda^2} U_3 \delta U_3 - \frac{2bB_{11}}{\lambda^3} U_3 \delta U_4 - \\
& - \frac{bA_{11}}{\lambda^2} U_3 \delta U_5 + \frac{bB_{11}}{\lambda^3} U_3 \delta U_6 - \frac{2bD_{11}}{\lambda^4} U_4 \delta U_2 - \frac{2bB_{11}}{\lambda^3} U_4 \delta U_3 + \\
& + \frac{4bD_{11}}{\lambda^4} U_4 \delta U_4 + \frac{2bB_{11}}{\lambda^3} U_4 \delta U_5 - \frac{2bD_{11}}{\lambda^4} U_4 \delta U_6 - \frac{bB_{11}}{\lambda^3} U_5 \delta U_2 \\
& - \frac{bA_{11}}{\lambda^2} U_5 \delta U_3 + \frac{2bB_{11}}{\lambda^3} U_5 \delta U_4 + \frac{bA_{11}}{\lambda^2} U_5 \delta U_5 - \frac{bB_{11}}{\lambda^3} U_5 \delta U_6 + \\
& + \frac{bD_{11}}{\lambda^4} U_6 \delta U_2 + \frac{bB_{11}}{\lambda^3} U_6 \delta U_3 - \frac{2bD_{11}}{\lambda^4} U_6 \delta U_4 - \frac{bB_{11}}{\lambda^3} U_6 \delta U_5 \\
& \left. + \frac{bD_{11}}{\lambda^4} U_6 \delta U_6 \right] \frac{\lambda}{2}
\end{aligned} \tag{95}$$

6.1.2.2 Trabalho virtual interno dos trechos intermediários de integração

Para os trechos intermediários de integração, cujos comprimentos são iguais a λ e tanto a 1ª como a 2ª derivada são calculadas conforme a representação simples, considerando o sistema de numeração local dos deslocamentos, as parcelas do trabalho virtual interno escrevem-se:

$$(\delta W_{\text{int}}^I)_j = \left[bA_{11} \left(\frac{u_5 - u_1}{2\lambda} \right) \delta \left(\frac{u_5 - u_1}{2\lambda} \right) + bD_{11} \left(\frac{u_6 - 2u_4 + u_2}{\lambda^2} \right) \delta \left(\frac{u_6 - 2u_4 + u_2}{\lambda^2} \right) \right] \lambda \quad (96)$$

e

$$(\delta W_{\text{int}}^{II})_j = - \left[bB_{11} \left(\frac{u_5 - u_1}{2\lambda} \right) \delta \left(\frac{u_6 - 2u_4 + u_2}{\lambda^2} \right) + bB_{11} \left(\frac{u_6 - 2u_4 + u_2}{\lambda^2} \right) \delta \left(\frac{u_5 - u_1}{2\lambda} \right) \right] \frac{\lambda}{2} \quad (97)$$

onde j são os trechos de integração entre 2 e (NTI-1), sendo NTI o número total de trechos de integração. Desenvolvendo-as:

$$(\delta W_{\text{int}}^I)_j = \left[\frac{bA_{11}}{4\lambda^2} (u_5 - u_1) \delta u_5 - \frac{bA_{11}}{4\lambda^2} (u_5 - u_1) \delta u_1 + \frac{bD_{11}}{\lambda^4} (u_6 - 2u_4 + u_2) \delta u_6 - \frac{2bD_{11}}{\lambda^4} (u_6 - 2u_4 + u_2) \delta u_4 + \frac{bD_{11}}{\lambda^4} (u_6 - 2u_4 + u_2) \delta u_2 \right] \lambda \quad (98)$$

$$(\delta W_{\text{int}}^I)_j = \left[\frac{bA_{11}}{4\lambda^2} u_5 \delta u_5 - \frac{bA_{11}}{4\lambda^2} u_1 \delta u_5 - \frac{bA_{11}}{4\lambda^2} u_5 \delta u_1 + \frac{bA_{11}}{4\lambda^2} u_1 \delta u_1 + \frac{bD_{11}}{\lambda^4} u_6 \delta u_6 - \frac{2bD_{11}}{\lambda^4} u_4 \delta u_6 + \frac{bD_{11}}{\lambda^4} u_2 \delta u_6 - \frac{2bD_{11}}{\lambda^4} u_6 \delta u_4 + \frac{4bD_{11}}{\lambda^4} u_4 \delta u_4 - \frac{2bD_{11}}{\lambda^4} u_2 \delta u_4 + \frac{bD_{11}}{\lambda^4} u_6 \delta u_2 - \frac{2bD_{11}}{\lambda^4} u_4 \delta u_2 + \frac{bD_{11}}{\lambda^4} u_2 \delta u_2 \right] \lambda \quad (99)$$

e

$$(\delta W_{\text{int}}^{II})_j = - \left[\frac{bB_{11}}{2\lambda^3} (u_5 - u_1) \delta u_6 - \frac{2bB_{11}}{2\lambda^3} (u_5 - u_1) \delta u_4 + \frac{bB_{11}}{2\lambda^3} (u_5 - u_1) \delta u_2 + \frac{bB_{11}}{2\lambda^3} (u_6 - 2u_4 + u_2) \delta u_5 - \frac{bB_{11}}{2\lambda^3} (u_6 - 2u_4 + u_2) \delta u_1 \right] \lambda \quad (100)$$

$$\begin{aligned}
(\delta W_{\text{int}}^{\text{II}})_j = & - \left[\frac{bB_{11}}{2\lambda^3} u_5 \delta u_6 - \frac{bB_{11}}{2\lambda^3} u_1 \delta u_6 - \frac{bB_{11}}{\lambda^3} u_5 \delta u_4 + \frac{bB_{11}}{\lambda^3} u_1 \delta u_4 + \frac{bB_{11}}{2\lambda^3} u_5 \delta u_2 - \right. \\
& - \frac{bB_{11}}{2\lambda^3} u_1 \delta u_2 + \frac{bB_{11}}{2\lambda^3} u_6 \delta u_5 - \frac{bB_{11}}{\lambda^3} u_4 \delta u_5 + \frac{bB_{11}}{2\lambda^3} u_2 \delta u_5 - \frac{bB_{11}}{2\lambda^3} u_6 \delta u_1 + \\
& \left. + \frac{bB_{11}}{\lambda^3} u_4 \delta u_1 - \frac{bB_{11}}{2\lambda^3} u_2 \delta u_1 \right] \lambda
\end{aligned} \tag{101}$$

Reescrevendo as expressões de acordo com o sistema global de deslocamentos, o trabalho virtual interno dos trechos intermediários torna-se:

$$\begin{aligned}
(\delta W_{\text{int}})_j = & \left[\frac{bA_{11}}{4\lambda^2} U_{2j-1} \delta U_{2j-1} + \frac{bB_{11}}{2\lambda^3} U_{2j-1} \delta U_{2j} - \frac{bB_{11}}{\lambda^3} U_{2j-1} \delta U_{2j+2} - \right. \\
& - \frac{bA_{11}}{4\lambda^2} U_{2j-1} \delta U_{2j+3} + \frac{bB_{11}}{2\lambda^3} U_{2j-1} \delta U_{2j+4} + \frac{bB_{11}}{2\lambda^3} U_{2j} \delta U_{2j-1} + \\
& + \frac{bD_{11}}{\lambda^4} U_{2j} \delta U_{2j} - \frac{2bD_{11}}{\lambda^4} U_{2j} \delta U_{2j+2} - \frac{bB_{11}}{2\lambda^3} U_{2j} \delta U_{2j+3} + \frac{bD_{11}}{\lambda^4} U_{2j} \delta U_{2j+4} - \\
& - \frac{bB_{11}}{\lambda^3} U_{2j+2} \delta U_{2j-1} - \frac{2bD_{11}}{\lambda^4} U_{2j+2} \delta U_{2j} + \frac{4bD_{11}}{\lambda^4} U_{2j+2} \delta U_{2j+2} + \\
& + \frac{bB_{11}}{\lambda^3} U_{2j+2} \delta U_{2j+3} - \frac{2bD_{11}}{\lambda^4} U_{2j+2} \delta U_{2j+4} - \frac{bA_{11}}{4\lambda^2} U_{2j+3} \delta U_{2j-1} - \\
& - \frac{bB_{11}}{2\lambda^3} U_{2j+3} \delta U_{2j} + \frac{bB_{11}}{\lambda^3} U_{2j+3} \delta U_{2j+2} + \frac{bA_{11}}{4\lambda^2} U_{2j+3} \delta U_{2j+3} - \\
& - \frac{bB_{11}}{2\lambda^3} U_{2j+3} \delta U_{2j+4} + \frac{bB_{11}}{2\lambda^3} U_{2j+4} \delta U_{2j-1} + \frac{bD_{11}}{\lambda^4} U_{2j+4} \delta U_{2j} - \\
& \left. - \frac{2bD_{11}}{\lambda^4} U_{2j+4} \delta U_{2j+2} - \frac{bB_{11}}{2\lambda^3} U_{2j+4} \delta U_{2j+3} + \frac{bD_{11}}{\lambda^4} U_{2j+4} \delta U_{2j+4} \right] \lambda
\end{aligned} \tag{102}$$

6.1.2.3 Trabalho virtual interno do último trecho de integração

Analogamente ao primeiro, para o último trecho de integração escreve-se, conforme sistema de numeração local dos deslocamentos:

$$(\delta W_{\text{int}}^I)_{\text{NTI}} = \left[bA_{11} \left(\frac{u_3 - u_1}{\lambda} \right) \delta \left(\frac{u_3 - u_1}{\lambda} \right) + bD_{11} \left(\frac{u_6 - 2u_4 + u_2}{\lambda^2} \right) \delta \left(\frac{u_6 - 2u_4 + u_2}{\lambda^2} \right) \right] \frac{\lambda}{2} \quad (103)$$

$$(\delta W_{\text{int}}^I)_{\text{NTI}} = \left[\frac{bA_{11}}{\lambda^2} (u_3 - u_1) \delta u_3 - \frac{bA_{11}}{\lambda^2} (u_3 - u_1) \delta u_1 + \frac{bD_{11}}{\lambda^4} (u_6 - 2u_4 + u_2) \delta u_6 - \right. \\ \left. - \frac{2bD_{11}}{\lambda^4} (u_6 - 2u_4 + u_2) \delta u_4 + \frac{bD_{11}}{\lambda^4} (u_6 - 2u_4 + u_2) \delta u_2 \right] \frac{\lambda}{2} \quad (104)$$

$$(\delta W_{\text{int}}^I)_{\text{NTI}} = \left[\frac{bA_{11}}{\lambda^2} u_3 \delta u_3 - \frac{bA_{11}}{\lambda^2} u_1 \delta u_3 - \frac{bA_{11}}{\lambda^2} u_3 \delta u_1 + \frac{bA_{11}}{\lambda^2} u_1 \delta u_1 + \frac{bD_{11}}{\lambda^4} u_6 \delta u_6 - \right. \\ \left. - \frac{2bD_{11}}{\lambda^4} u_4 \delta u_6 + \frac{bD_{11}}{\lambda^4} u_2 \delta u_6 - \frac{2bD_{11}}{\lambda^4} u_6 \delta u_4 + \frac{4bD_{11}}{\lambda^4} u_4 \delta u_4 - \right. \\ \left. - \frac{2bD_{11}}{\lambda^4} u_2 \delta u_4 + \frac{bD_{11}}{\lambda^4} u_6 \delta u_2 - \frac{2bD_{11}}{\lambda^4} u_4 \delta u_2 + \frac{bD_{11}}{\lambda^4} u_2 \delta u_2 \right] \frac{\lambda}{2} \quad (105)$$

e

$$(\delta W_{\text{int}}^{\text{II}})_{\text{NTI}} = - \left[bB_{11} \left(\frac{u_3 - u_1}{\lambda} \right) \delta \left(\frac{u_6 - 2u_4 + u_2}{\lambda^2} \right) + bB_{11} \left(\frac{u_6 - 2u_4 + u_2}{\lambda^2} \right) \delta \left(\frac{u_3 - u_1}{\lambda} \right) \right] \frac{\lambda}{2} \quad (106)$$

$$(\delta W_{\text{int}}^{\text{II}})_{\text{NTI}} = - \left[\frac{bB_{11}}{\lambda^3} (u_3 - u_1) \delta u_6 - \frac{2bB_{11}}{\lambda^3} (u_3 - u_1) \delta u_4 + \frac{bB_{11}}{\lambda^3} (u_3 - u_1) \delta u_2 + \right. \\ \left. + \frac{bB_{11}}{\lambda^3} (u_6 - 2u_4 + u_2) \delta u_3 - \frac{bB_{11}}{\lambda^3} (u_6 - 2u_4 + u_2) \delta u_1 \right] \frac{\lambda}{2} \quad (107)$$

$$(\delta W_{\text{int}}^{\text{II}})_{\text{NTI}} = - \left[\frac{bB_{11}}{\lambda^3} u_3 \delta u_6 - \frac{bB_{11}}{\lambda^3} u_1 \delta u_6 - \frac{2bB_{11}}{\lambda^3} u_3 \delta u_4 + \frac{2bB_{11}}{\lambda^3} u_1 \delta u_4 + \right. \\ \left. + \frac{bB_{11}}{\lambda^3} u_3 \delta u_2 - \frac{bB_{11}}{\lambda^3} u_1 \delta u_2 + \frac{bB_{11}}{\lambda^3} u_6 \delta u_3 - \frac{2bB_{11}}{\lambda^3} u_4 \delta u_3 + \right. \\ \left. + \frac{bB_{11}}{\lambda^3} u_2 \delta u_3 - \frac{bB_{11}}{\lambda^3} u_6 \delta u_1 + \frac{2bB_{11}}{\lambda^3} u_4 \delta u_1 - \frac{bB_{11}}{\lambda^3} u_2 \delta u_1 \right] \frac{\lambda}{2} \quad (108)$$

Reescrevendo as expressões no sistema global de deslocamentos, o trabalho virtual interno do último trecho de integração fica:

$$\begin{aligned}
(\delta W_{\text{int}})_{\text{NTI}} = & \left[\frac{bA_{11}}{\lambda^2} U_{2\text{NN}-5} \delta U_{2\text{NN}-5} + \frac{bB_{11}}{\lambda^3} U_{2\text{NN}-5} \delta U_{2\text{NN}-4} - \frac{bA_{11}}{\lambda^2} U_{2\text{NN}-5} \delta U_{2\text{NN}-3} \right. \\
& - \frac{2bB_{11}}{\lambda^3} U_{2\text{NN}-5} \delta U_{2\text{NN}-2} + \frac{bB_{11}}{\lambda^3} U_{2\text{NN}-5} \delta U_{2\text{NN}} + \frac{bB_{11}}{\lambda^3} U_{2\text{NN}-4} \delta U_{2\text{NN}-5} + \\
& + \frac{bD_{11}}{\lambda^4} U_{2\text{NN}-4} \delta U_{2\text{NN}-4} - \frac{bB_{11}}{\lambda^3} U_{2\text{NN}-4} \delta U_{2\text{NN}-3} - \frac{2bD_{11}}{\lambda^4} U_{2\text{NN}-4} \delta U_{2\text{NN}-2} + \\
& + \frac{bD_{11}}{\lambda^4} U_{2\text{NN}-4} \delta U_{2\text{NN}} - \frac{bA_{11}}{\lambda^2} U_{2\text{NN}-3} \delta U_{2\text{NN}-5} - \frac{bB_{11}}{\lambda^3} U_{2\text{NN}-3} \delta U_{2\text{NN}-4} + \\
& + \frac{bA_{11}}{\lambda^2} U_{2\text{NN}-3} \delta U_{2\text{NN}-3} + \frac{2bB_{11}}{\lambda^3} U_{2\text{NN}-3} \delta U_{2\text{NN}-2} - \frac{bB_{11}}{\lambda^3} U_{2\text{NN}-3} \delta U_{2\text{NN}} + \\
& - \frac{2bB_{11}}{\lambda^3} U_{2\text{NN}-2} \delta U_{2\text{NN}-5} - \frac{2bD_{11}}{\lambda^4} U_{2\text{NN}-2} \delta U_{2\text{NN}-4} + \frac{2bB_{11}}{\lambda^3} U_{2\text{NN}-2} \delta U_{2\text{NN}-3} + \\
& + \frac{4bD_{11}}{\lambda^4} U_{2\text{NN}-2} \delta U_{2\text{NN}-2} - \frac{2bD_{11}}{\lambda^4} U_{2\text{NN}-2} \delta U_{2\text{NN}} + \frac{bB_{11}}{\lambda^3} U_{2\text{NN}} \delta U_{2\text{NN}-5} + \\
& + \frac{bD_{11}}{\lambda^4} U_{2\text{NN}} \delta U_{2\text{NN}-4} - \frac{bB_{11}}{\lambda^3} U_{2\text{NN}} \delta U_{2\text{NN}-3} - \frac{2bD_{11}}{\lambda^4} U_{2\text{NN}} \delta U_{2\text{NN}-2} + \\
& \left. + \frac{bD_{11}}{\lambda^4} U_{2\text{NN}} \delta U_{2\text{NN}} \right] \frac{\lambda}{2}
\end{aligned} \tag{109}$$

6.1.3 Expressão do trabalho virtual externo

O trabalho virtual externo está reescrito abaixo:

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_0^\ell (q_x(x) \delta u_0 + q_z(x) \delta w_0) dx + [\bar{F}_x \delta u_0 + \bar{F}_z \delta w_0 - \bar{M} \delta w'_0]_0^\ell \tag{110}$$

A primeira parcela dessa expressão pode ser escrita da seguinte forma:

$$\int_0^{\ell} (q_x(x)\delta u_0 + q_z(x)\delta w_0) dx = q_x(x) \frac{\lambda}{2} \delta U_3 + \sum_2^{NTI} q_x(x) \lambda \delta U_{2NTI-1} + \quad (111)$$

$$+ q_x(x) \frac{\lambda}{2} \delta U_{2NTI-1} + q_z(x) \frac{\lambda}{2} \delta U_4 + \sum_2^{NTI} q_z(x) \lambda \delta U_{2NTI} + q_x(x) \frac{\lambda}{2} \delta U_{2NTI}$$

A segunda parcela possui a derivada $\delta w_0'$, que, utilizando a representação em diferenças finitas e considerando o sistema de numeração local dos deslocamentos, escreve-se:

$$\delta w_0' = \delta \left(\frac{u_6 - u_2}{2\lambda} \right) \quad (112)$$

Para $x=0$ e para $x=\ell$, considerando o sistema de numeração global dos deslocamentos, tem-se, respectivamente:

$$\delta w_{00}' = \delta \left(\frac{U_6 - U_2}{2\lambda} \right) \quad (113)$$

$$\delta w_{0\ell}' = \delta \left(\frac{U_{2NN} - U_{2NN-4}}{2\lambda} \right) \quad (114)$$

A expressão do trabalho virtual externo fica:

$$\delta W_{\text{ext}} = q_x(x) \frac{\lambda}{2} \delta U_3 + \sum_2^{NTI} q_x(x) \lambda \delta U_{2NTI-1} + q_x(x) \frac{\lambda}{2} \delta U_{2NTI-1} + q_z(x) \frac{\lambda}{2} \delta U_4 + \quad (115)$$

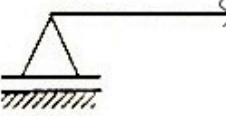

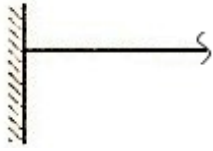
$$+ \sum_2^{NTI} q_z(x) \lambda \delta U_{2NTI} + q_z(x) \frac{\lambda}{2} \delta U_{2NTI} + \overline{F}_{x0} \delta U_3 + \overline{F}_{z0} \delta U_4 - \overline{M}_0 \delta \left(\frac{U_6 - U_2}{2\lambda} \right) +$$

$$+ \overline{F}_{x\ell} \delta U_{2NN-3} + \overline{F}_{z\ell} \delta U_{2NN-2} - \overline{M}_\ell \delta \left(\frac{U_{2NN} - U_{2NN-4}}{2\lambda} \right)$$

6.1.4 Introdução das condições de contorno

As condições de contorno do problema são dependentes dos vínculos do elemento estrutural. Os possíveis tipos de apoio estão listados na Tabela 6 e relacionados às condições que impõem:

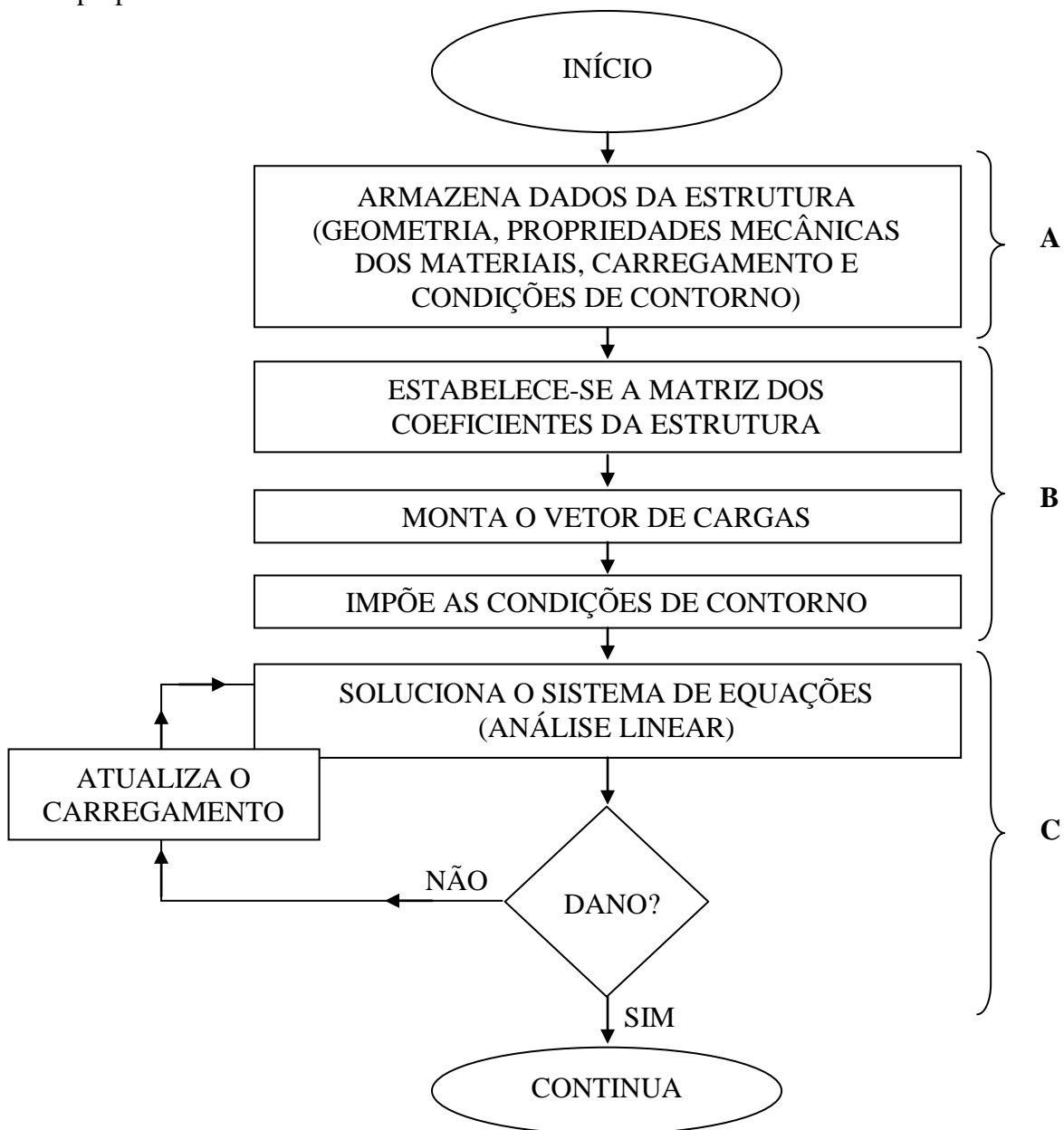
Tabela 6. Tipos de vínculos e condições de contorno associadas

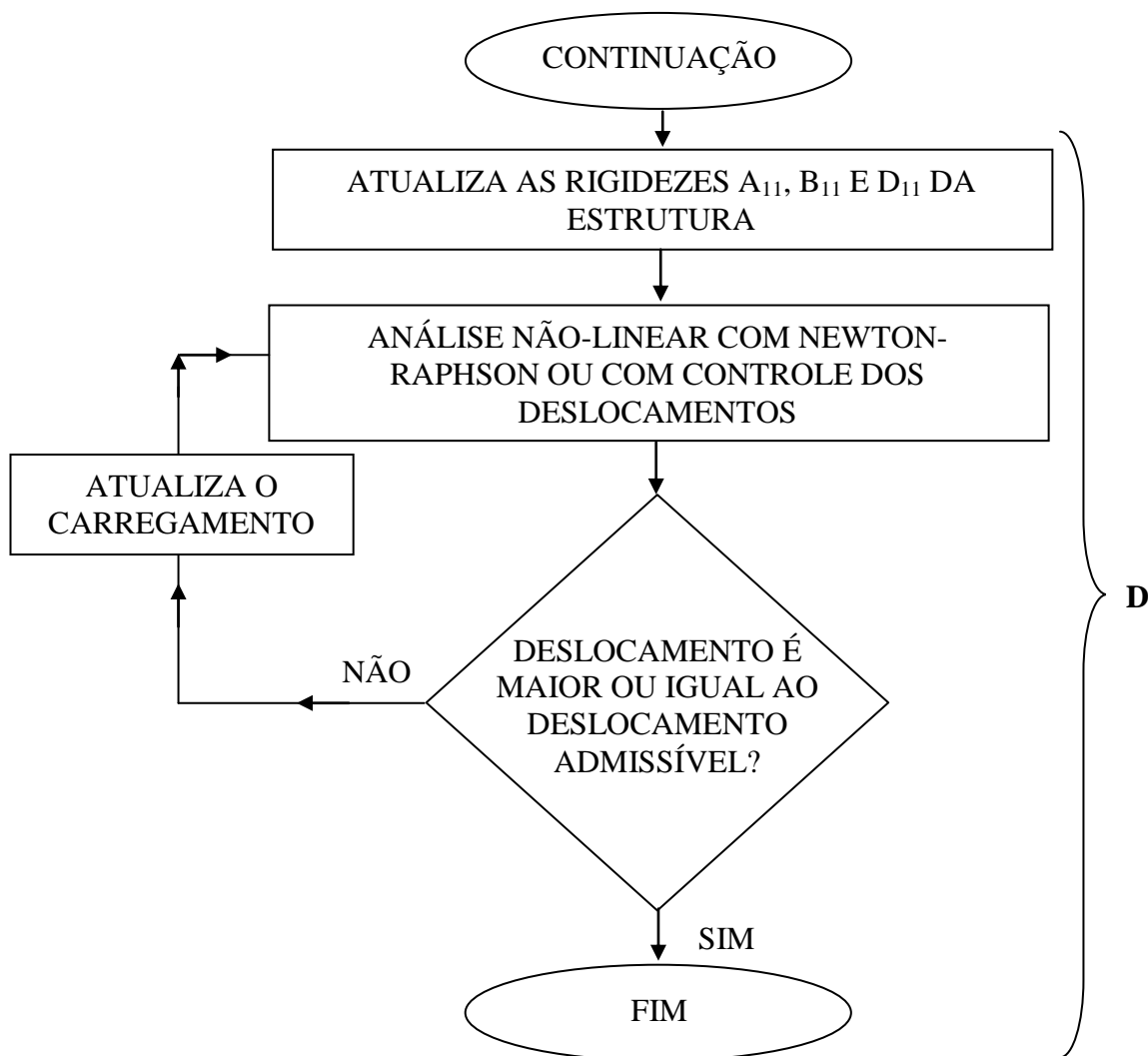
Tipo de vínculo	Condições que impõem	Condições aplicadas às extremidades
 <p data-bbox="331 857 472 887">Apoio móvel</p>	<p data-bbox="539 633 935 707">Impede o deslocamento vertical (transversal).</p>	<p data-bbox="1011 633 1118 663">Para $x=0$:</p> $U_4=0 \therefore \delta U_4=0$ <p data-bbox="1011 759 1118 788">Para $x=l$:</p> $U_{2NN-4}=0 \therefore \delta U_{2NN-4}=0$
 <p data-bbox="341 1158 459 1187">Apoio fixo</p>	<p data-bbox="539 958 935 1077">Impede os deslocamentos horizontal (axial) e vertical (transversal).</p>	<p data-bbox="1011 958 1118 987">Para $x=0$:</p> $U_3=0 \therefore \delta U_3=0$ $U_4=0 \therefore \delta U_4=0$ <p data-bbox="1011 1146 1118 1176">Para $x=l$:</p> $U_{2NL-3}=0 \therefore \delta U_{2NL-3}=0$ $U_{2NN-4}=0 \therefore \delta U_{2NN-4}=0$
 <p data-bbox="288 1641 379 1671">Engaste</p>	<p data-bbox="539 1402 935 1565">Impede os deslocamentos horizontal (axial) e vertical (transversal) e a rotação em torno do eixo Y.</p>	<p data-bbox="1011 1402 1118 1431">Para $x=0$:</p> $U_3=0 \therefore \delta U_3=0$ $U_4=0 \therefore \delta U_4=0$ $U_6-U_2=0 \therefore \delta U_6-\delta U_2=0$ <p data-bbox="1011 1653 1118 1682">Para $x=l$:</p> $U_3=0 \therefore \delta U_3=0$ $U_4=0 \therefore \delta U_4=0$ $U_{2NN}-U_{2NN-4}=0 \therefore \delta U_{2NN}-\delta U_{2NN-4}=0$

Introduzidas as condições de contorno do problema na equação (28), a partir do princípio dos trabalhos virtuais, gera-se um sistema de equações algébricas não-lineares a ser resolvido, conforme indica a programação automática que segue.

6.1.5 Programação automática

Segue, abaixo, um fluxograma simplificado que descreve o programa elaborado em linguagem FORTRAN para solução do sistema de equações geradas a partir do modelo proposto:





A: São definidos o comprimento e a seção transversal da viga a ser analisada, os materiais constituintes e suas propriedades mecânicas, os tipos de vínculo e os carregamentos de bordo e domínio, distribuídos ou pontuais. Além disso, nessa etapa define-se o número de divisões da viga, o número de camadas e a tolerância para a convergência do processo iterativo.

B: São definidas as matrizes dos coeficientes de cada trecho, considerando para cada camada suas propriedades e a ocorrência de dano, e, assim, é estabelecida a matriz dos coeficientes do elemento estrutural, ou seja, nessa etapa são calculados os valores de A_{11} , B_{11} e D_{11} para substituição na expressão do trabalho virtual interno. Segue-se, então, com a definição do carregamento e a introdução das condições de contorno na expressão do trabalho virtual externo. A partir da equação (63), constitui-se o sistema de equações.

C: O sistema de equações é solucionado a partir de uma análise linear (método de Gauss-Jordan) e o dano é calculado. Não havendo a ocorrência de dano, o programa faz um incremento na carga e calcula novamente os deslocamentos na viga.

D: Caso exista dano, são atualizadas as rigidezes A_{11} , B_{11} e D_{11} do elemento estrutural e uma análise não-linear (através de Newton-Raphson ou da técnica de controle de deslocamentos) soluciona o sistema de equações. Quando o deslocamento obtido é maior que o deslocamento admissível, a análise é concluída.

7 APLICAÇÃO E DISCUSSÃO DE RESULTADOS

Neste capítulo, avaliou-se o modelo proposto para previsão do comportamento em flexão do CRFA. Preliminarmente, foram analisados concretos reforçados com fibras de aço, determinando-se os parâmetros pertinentes ao modelo de dano aqui utilizado e, posteriormente, simulando-se o comportamento em flexão de corpos de prova prismáticos. Para validação do modelo proposto, os resultados foram comparados aos resultados obtidos experimentalmente por Nunes e Agopyan (1998) e, ainda, aos resultados da modelagem realizada por Grossi (2006). Em seguida, buscou-se validar o modelo utilizando o estudo experimental feito por Álvares (1993) em vigas de concreto armado convencionais. Por fim, simulou-se o comportamento de vigas de concreto armado reforçadas com fibras de aço, empregando-se o modelo em questão. Em todos os casos, a aplicabilidade do modelo foi discutida.

7.1 PREVISÃO DO COMPORTAMENTO EM FLEXÃO DO CRFA

Nunes e Agopyan (1998) determinaram em laboratório o comportamento em flexão do CRFA com diferentes teores de fibras adicionadas a uma matriz de concreto convencional: 20 kg/m³, 40 kg/m³ e 60 kg/m³. Grossi (2006) também utilizou os resultados experimentais de Nunes e Agopyan (1998) para avaliar a eficiência do seu modelo numérico que fez uso do método dos elementos finitos (MEF). Dessa forma, é pertinente comparar os resultados obtidos através do modelo proposto nesta pesquisa à modelagem numérica de Grossi (2006).

7.1.1 Determinação das curvas tensão-deformação

As resistências à compressão dos concretos adotadas (f_c) nesta análise foram determinadas experimentalmente por Nunes e Agopyan (1998). Os autores não determinaram os módulos de elasticidade (E) nem os coeficientes de Poisson (ν) em laboratório. Foram assumidos os mesmos valores de ν adotados por Grossi (2006), tendo em vista que os resultados serão comparados aos deste autor. O módulo de elasticidade foi calculado através da fórmula (119), recomendada pelo EUROCODE 2 (1991). O coeficiente de Poisson foi considerado igual a 0,20.

$$E=9500f_c^{1/3} \quad (116)$$

As resistências à tração (f_t) também foram as mesmas adotadas por Grossi (2006), que considerou, ao invés da média, o valor máximo obtido nos ensaios de tração na flexão realizados por Nunes e Agopyan (1998).

Para o modelo de dano, a máxima deformação de tração (ϵ_{d0}) de cada concreto foi calculada a partir da expressão (120):

$$\epsilon_{d0} = \frac{f_t}{E} \quad (117)$$

As propriedades encontram-se resumidas na Tabela 7.

Tabela 7. Propriedades mecânicas dos concretos em estudo

TEOR DE FIBRAS	f_c (MPa)	f_t (MPa)	E (GPa)	ν	ϵ_{d0}
20 kg/m ³	39,19	5,81	32,268	0,20	1,801x10 ⁻⁴
40 kg/m ³	40,64	6,81	32,662	0,20	2,085x10 ⁻⁴
60 kg/m ³	40,40	6,76	32,598	0,20	2,074x10 ⁻⁴

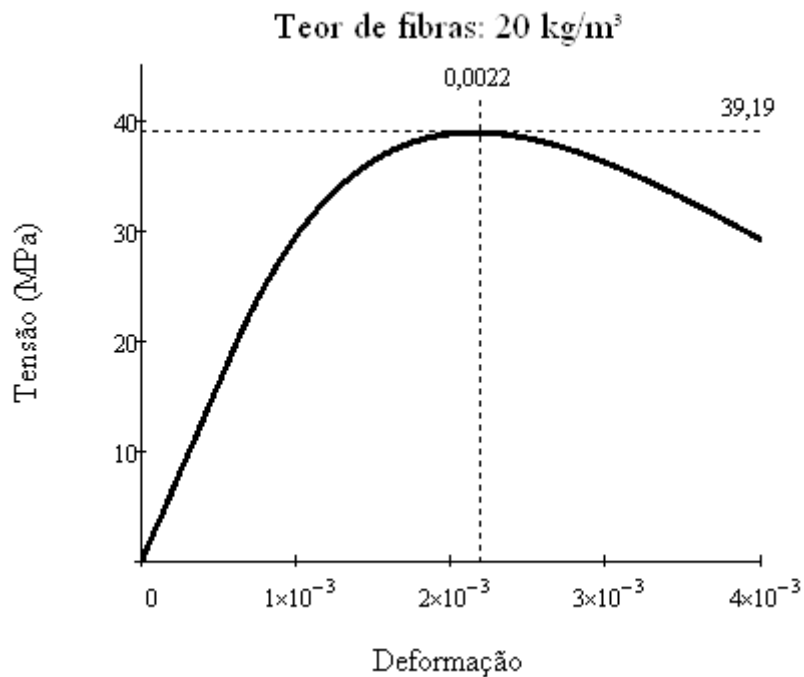
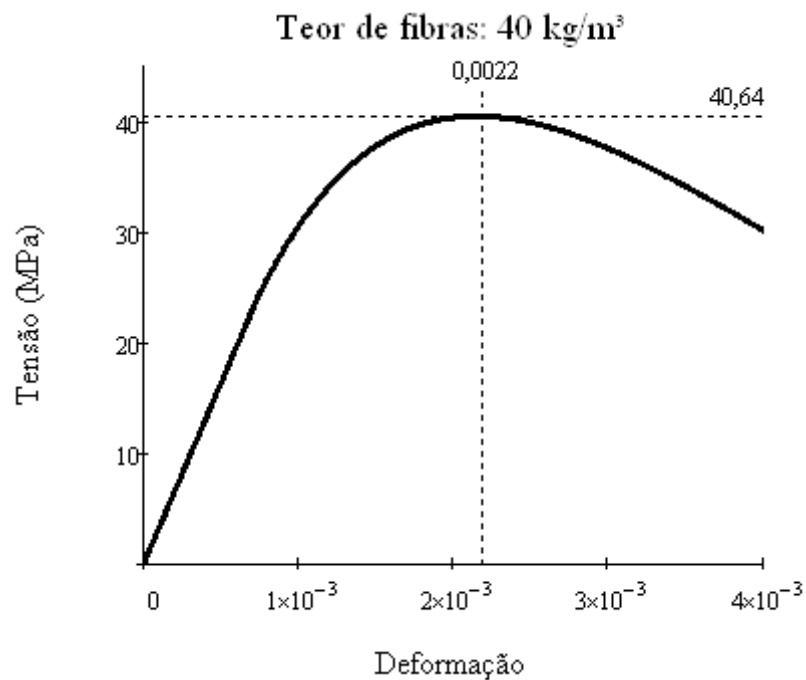
Fonte: Nunes e Agopyan (1998), Grossi (2006).

Para determinação dos parâmetros A_c e B_c , utilizados na equação (44), foram estabelecidos dois critérios: o primeiro limitou a tensão de pico da curva tensão-deformação de compressão estimada ao f_c obtido experimentalmente, e o segundo foi adotar a deformação de pico segundo critério de Grossi (2006), que considerou a indicação do CEB-FIP/MC (1990,1991), 2,2%. É pertinente admitir esse valor, uma vez que diversos autores não apontaram mudanças expressivas no comportamento sob compressão do CRFA até o pico comparando-o ao concreto convencional, cuja deformação de pico vale cerca de 2,5%. Além disso, verifica-se na Tabela 7 que a resistência à compressão não variou com o aumento do volume de fibras.

As curvas tensão-deformação na compressão obtidas com o modelo de dano de Mazars (1984) podem ser vistas nas Figura 38 a Figura 40, as quais referem-se aos diagramas cujas adições de fibras de aço foram de 20 kg/m³, 40 kg/m³ e 60 kg/m³, respectivamente. Os parâmetros de compressão determinados, relativos ao modelo de dano utilizado nesta pesquisa, encontram-se na Tabela 8.

Tabela 8. Parâmetros de compressão determinados para os concretos em estudo

TEOR DE FIBRAS	A_c	B_c
20 kg/m ³	1,33	1643
40 kg/m ³	1,33	1643
60 kg/m ³	1,33	1643

**Figura 38.** Curva tensão-deformação de compressão estimada do estudo paramétrico do concreto com 20 kg/m³ de fibras de aço**Figura 39.** Curva tensão-deformação de compressão estimada do estudo paramétrico do concreto com 40 kg/m³ de fibras de aço

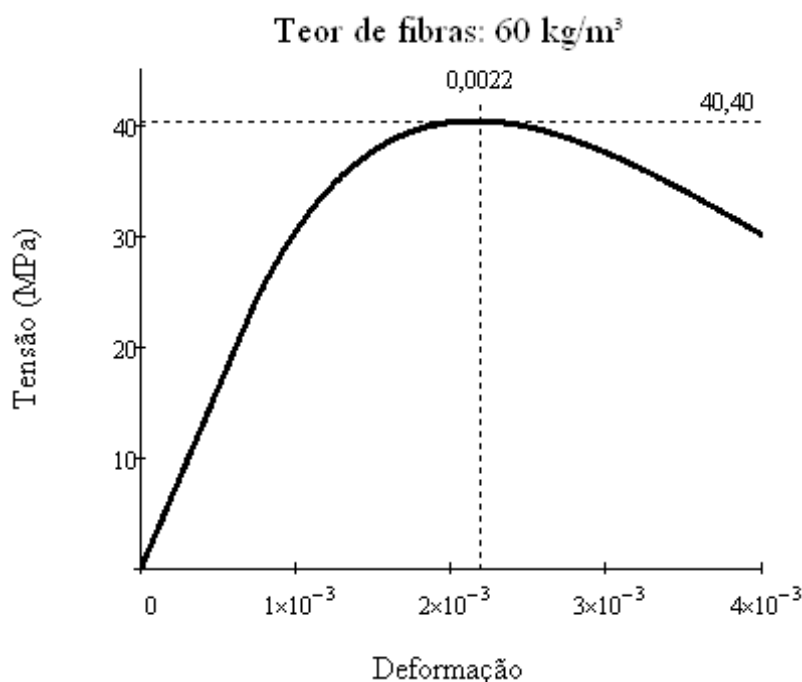


Figura 40. Curva tensão-deformação de compressão estimada do estudo paramétrico do concreto com 60 kg/m³ de fibras de aço

Para determinação dos parâmetros A_t e B_t , utilizados na equação (45), foram feitas estimativas das curvas de tração através da lei de dano de Mazars (1984), em concordância com a lei de dano em tração trilinear utilizada por Grossi (2006). O diagrama do modelo trilinear está novamente ilustrado na Figura 41 e os valores de σ_2 , ϵ_2 e ϵ_3 , encontrados na Tabela 9, na qual também estão os valores de σ_1 e ϵ_1 , foram definidos através das expressões $\sigma_2 = \alpha \sigma_1 = \alpha f_t$, $\epsilon_2 = p_1 \epsilon_1$, elucidadas no item 2.2.2, e através da expressão $A_3 = (\epsilon_3 - \epsilon_2)(\sigma_2/2)$ que pode ser deduzida a partir da Figura 41. Os valores de α e p_1 foram os mesmos utilizados por Grossi (2006).

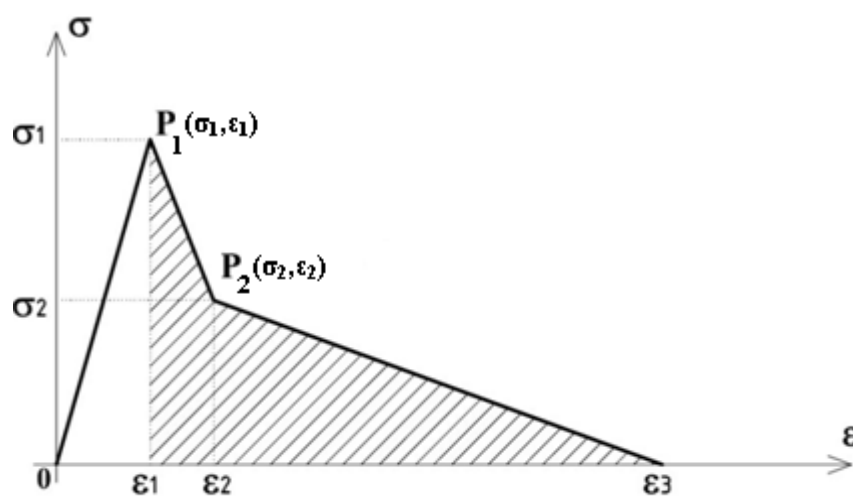


Figura 41. Modelo trilinear utilizado por Grossi (2006) para modelagem do CRFA em tração (GROSSI, 2006) (Repetida)

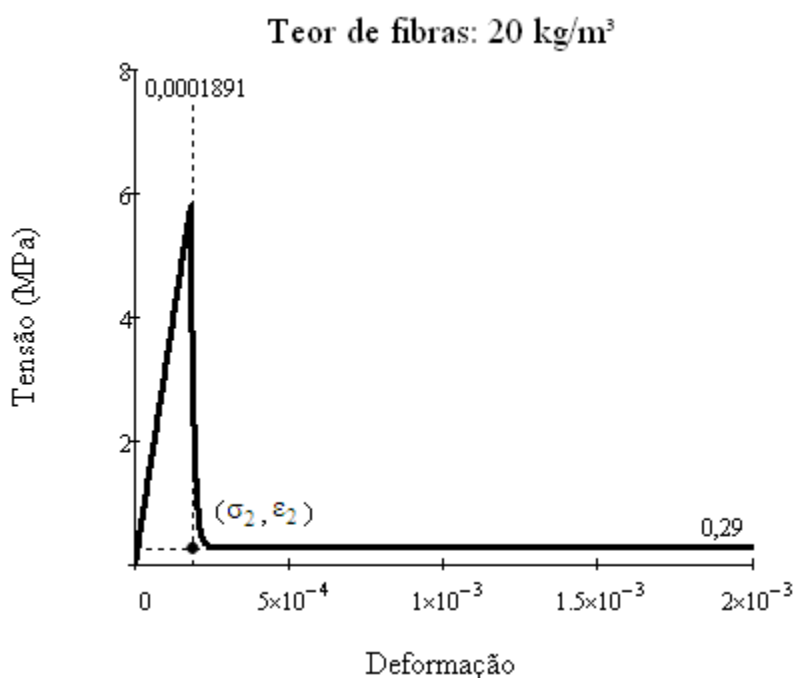
Tabela 9. Parâmetros do modelo trilinear dos concretos em estudo

TEOR DE FIBRAS	σ_1 (MPa)	ε_1	α	P_1	σ_2 (MPa)	ε_2	ε_3
20 kg/m ³	5,81	1,801x10 ⁻⁴	0,05	1,05	0,29	1,891x10 ⁻⁴	0,841
40 kg/m ³	6,81	2,085x10 ⁻⁴	0,16	1,05	1,09	2,189x10 ⁻⁴	0,191
60 kg/m ³	6,76	2,074x10 ⁻⁴	0,27	1,05	1,82	2,177x10 ⁻⁴	0,101

As curvas tensão-deformação de tração estimadas para os concretos em estudo podem ser conferidas nas Figura 42 a Figura 44 e os parâmetros encontram-se na Tabela 10.

Tabela 10. Parâmetros de tração determinados para os concretos em estudo

TEOR DE FIBRAS	A_t	B_t
20 kg/m ³	0,95	5x10 ⁴
40 kg/m ³	0,84	5x10 ⁴
60 kg/m ³	0,73	5x10 ⁴

**Figura 42.** Curva tensão-deformação de tração estimada do estudo paramétrico do concreto com 20 kg/m³ de fibras de aço

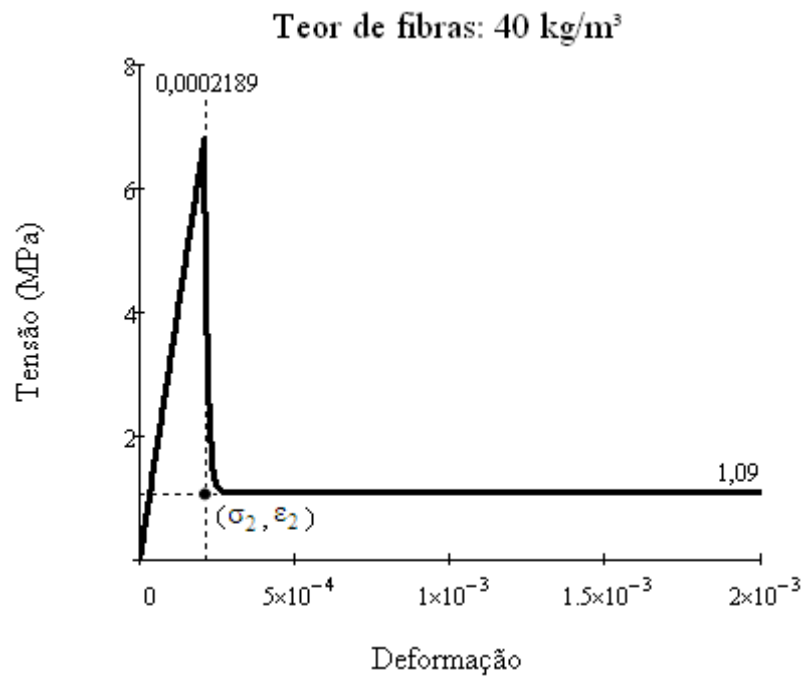


Figura 43. Curva tensão-deformação de tração estimada do estudo paramétrico do concreto com 40 kg/m³ de fibras de aço

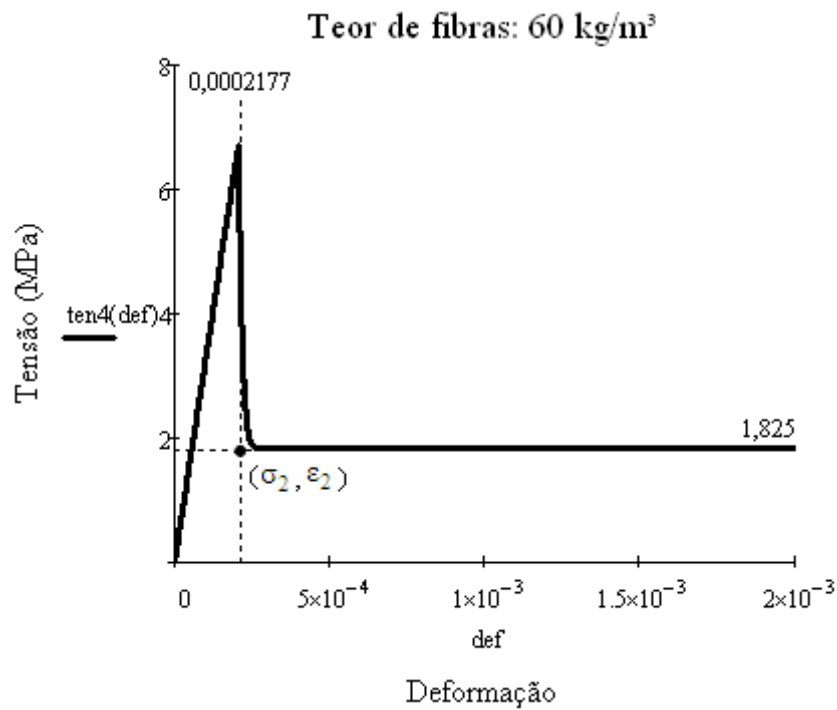


Figura 44. Curva tensão-deformação de tração estimada do estudo paramétrico do concreto com 60 kg/m³ de fibras de aço

7.1.2 Modelagem do comportamento sob flexão

Nunes e Agopyan (1998) realizaram o ensaio de flexão em quatro pontos em corpos de prova prismáticos de 150x150x500 mm, com distância entre apoios igual a 450 mm e o carregamento aplicado nos terços médios do vão livre, conforme Figura 45.

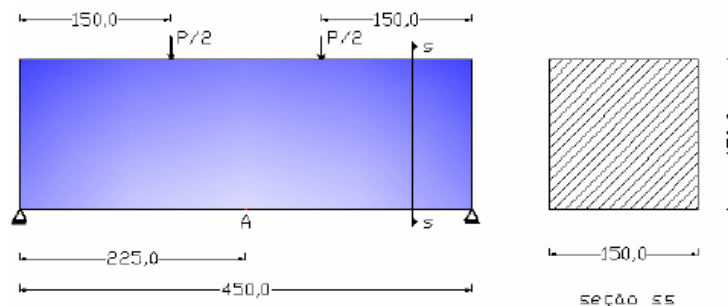


Figura 45. Geometria (mm) e esquema de carregamento das vigas de Agopyan e Nunes (1998) (GROSSI, 2006) (Repetida)

Foi feito um estudo preliminar com o objetivo de estabelecer a discretização do comprimento das vigas (12, 24 e 36), o número de camadas da seção transversal (20 e 40) e o passo de carga mais adequado às análises. Os resultados apontaram para a discretização do comprimento das vigas em 12 subdivisões e a seção transversal dividida em 20 camadas. Além disso, instituiu-se o passo de carga de 1,0 kN e a tolerância para o processo iterativo igual a 10^{-6} , mais rigorosa frente à tolerância de Grossi (2006), por exemplo, que utilizou 10^{-4} . Essa mesma estratégia foi utilizada nas demais aplicações desta pesquisa.

Definidas as propriedades, os parâmetros do modelo de dano, a geometria e as condições de apoio dos corpos de prova, simulou-se numericamente o comportamento carga-deslocamento de cada um dos concretos, através do programa construído, confrontando os resultados com as curvas experimentais obtidas por Nunes e Agopyan (1998) e com as curvas numéricas de Grossi (2006), cujos métodos e parâmetros foram apresentados no capítulo 4. Os resultados podem ser verificados nas Figura 46 a Figura 48.

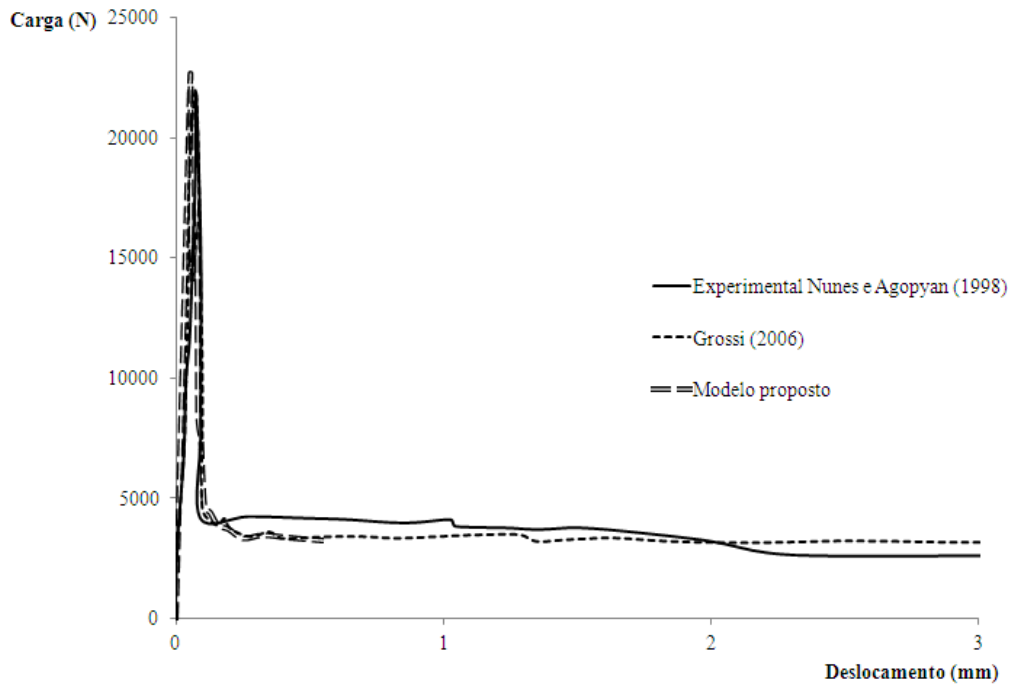


Figura 46. Resultado do modelo proposto aplicado ao concreto com 20 kg/m³ de fibras de aço

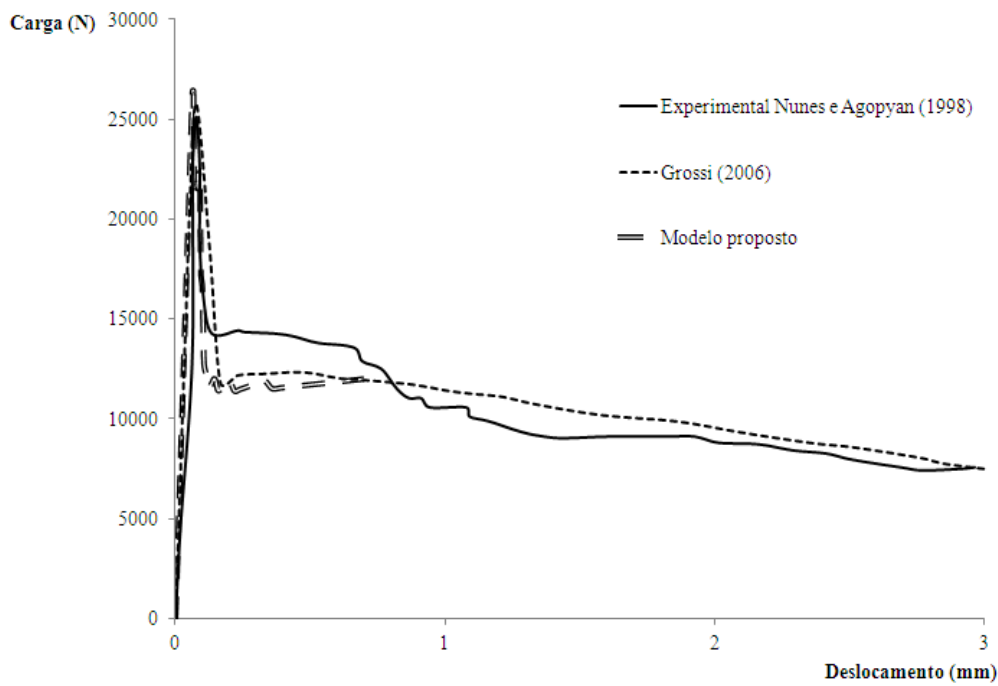


Figura 47. Resultado do modelo proposto aplicado ao concreto com 40 kg/m³ de fibras de aço

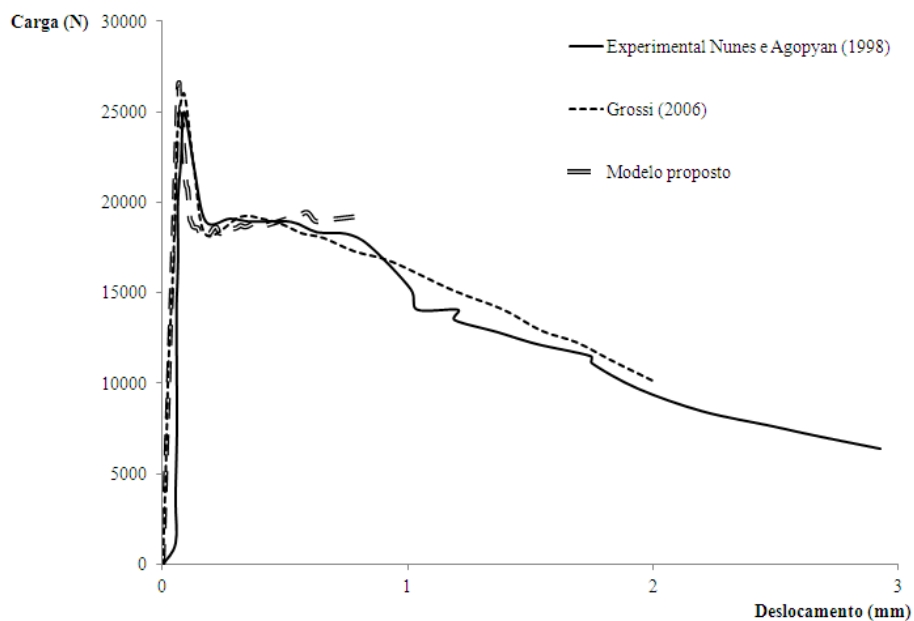


Figura 48. Resultado do modelo proposto aplicado ao concreto com 60 kg/m^3 de fibras de aço

Analisando-se os resultados obtidos, constata-se boa concordância entre as curvas obtidas através do modelo proposto e as obtidas numericamente por Grossi (2006), conforme esperado em virtude das similaridades entre as formulações e, além disso, verifica-se uma boa representação das curvas experimentais. Entretanto, o modelo sugerido apresentou limitações: a maior vantagem da utilização de fibras de aço em concreto é o aumento da tenacidade no pós-pico, o que não foi possível alcançar com fidelidade, uma vez que a simulação numérica realizada finalizou-se a deslocamentos menores do que os registrados experimentalmente por Nunes e Agopyan (1998) e por Grossi (2006) em sua modelagem. Acredita-se que devido a não-linearidade do modelo de dano, houve dificuldade de convergência.

Apesar dos testes realizados durante a construção da ferramenta computacional, suspeitou-se da existência de problemas de programação na mesma. Para investigar, foi implementado para a tração o modelo trilinear utilizado por Grossi (2006), que empregou o MEF e valeu-se de elementos de placa em sua modelagem. Os resultados encontram-se nas Figura 49 a Figura 51.

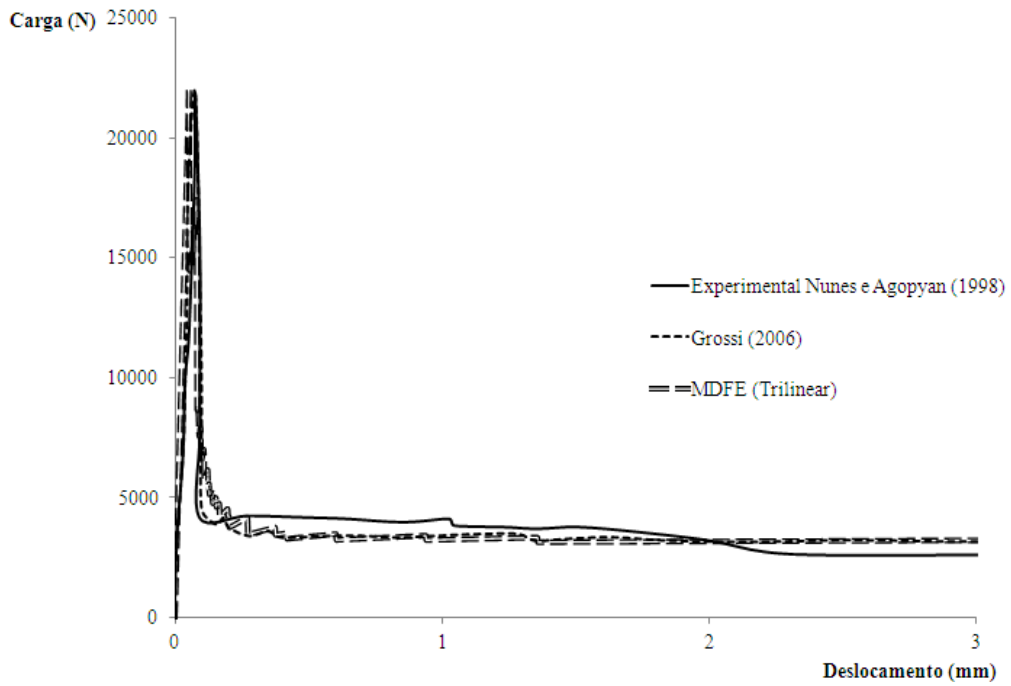


Figura 49. Resultado do MDFE (trilinear) aplicado ao concreto com 20 kg/m³ de fibras de aço

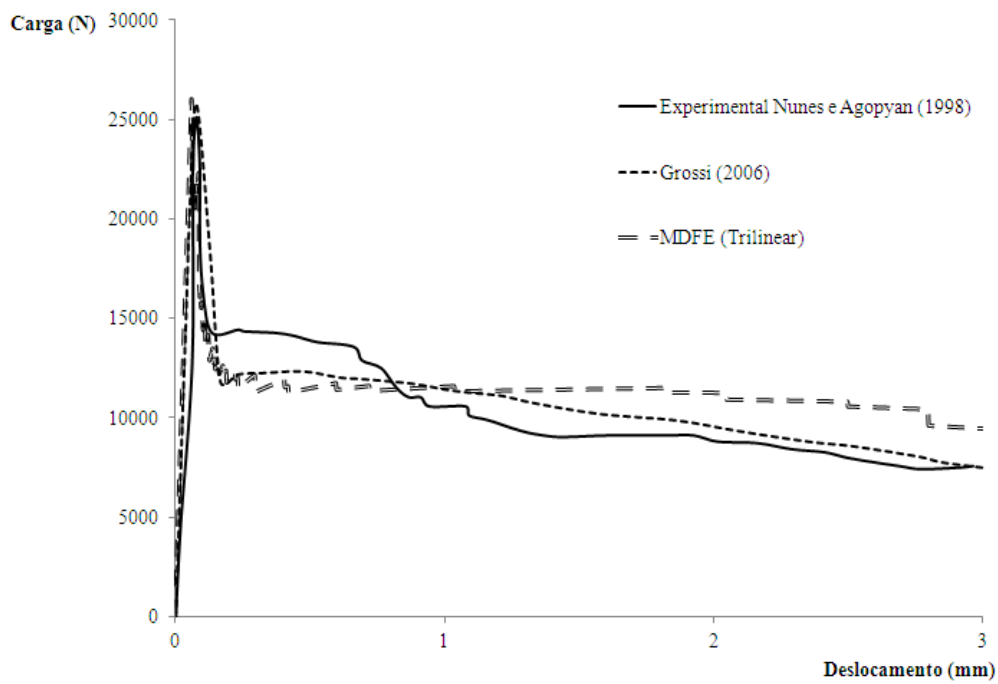


Figura 50. Resultado do MDFE (trilinear) aplicado ao concreto com 40 kg/m³ de fibras de aço

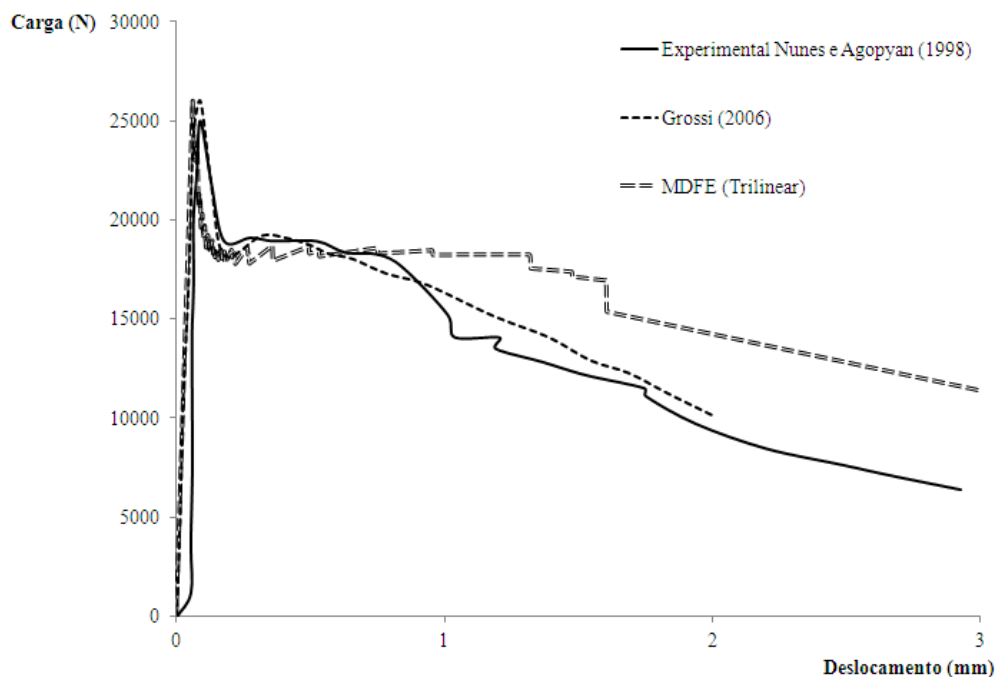


Figura 51. Resultado do MDFE (trilinear) aplicado ao concreto com 60 kg/m^3 de fibras de aço

Verifica-se que há convergência entre o comportamento das curvas obtidas com o modelo trilinear inserido no programa com MDFE e o comportamento das curvas de Grossi (2006), que utilizou o MEF. Além disso, nota-se que os deslocamentos atingem valores da ordem do experimental. Entretanto, foi observado que, para os concretos, cujos teores de fibras de aço utilizadas são 40 kg/m^3 e 60 kg/m^3 , existiu uma diferença entre os resultados numéricos de Grossi (2006) e os calculados neste trabalho. Acredita-se que essa diferença é consequência do ϵ_3 calculado neste trabalho. Possivelmente, Grossi (2006) fez uma retroanálise da sua modelagem para redefinir esse valor de forma a ajustar seus resultados com o experimental.

Não tendo sido identificado erros de implementação na ferramenta computacional, foi sugerido um modelo de dano, cujo diagrama é apresentado na Figura 52. Este modelo sugere para a tração uma linearização do diagrama de Mazars (1984), utilizando os parâmetros do modelo trilinear apresentados na Tabela 9, mas, neste caso, σ_3 é igual a σ_2 . Os resultados encontram-se nas Figura 53 a Figura 55.

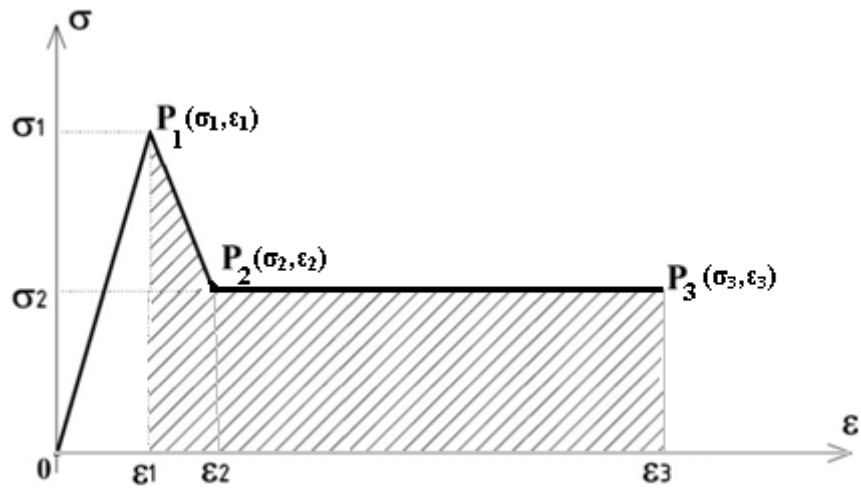


Figura 52. Modelo linearizado do diagrama tensão-deformação de tração do Mazars

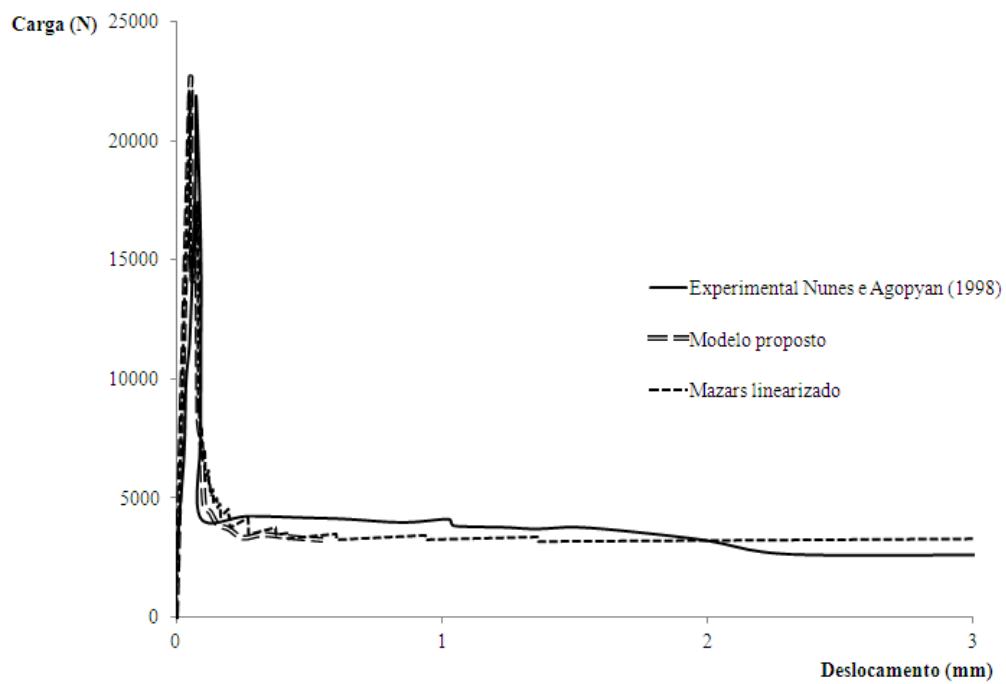


Figura 53. Resultado do Mazars linearizado aplicado ao concreto com 20 kg/m^3 de fibras de aço

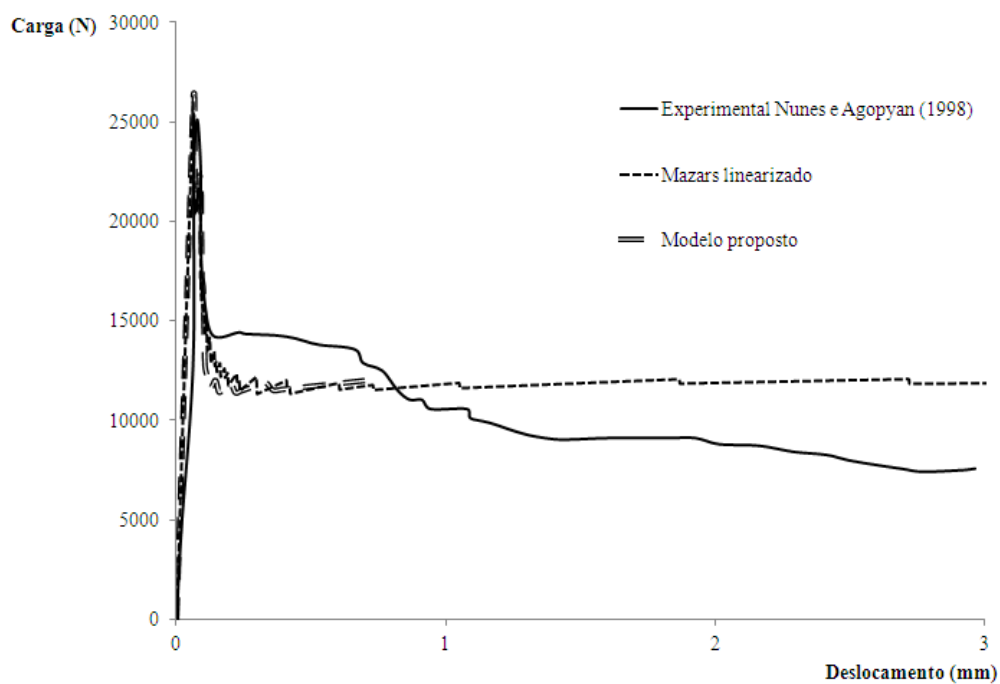


Figura 54. Resultado do Mazars linearizado aplicado ao concreto com 40 kg/m³ de fibras de aço

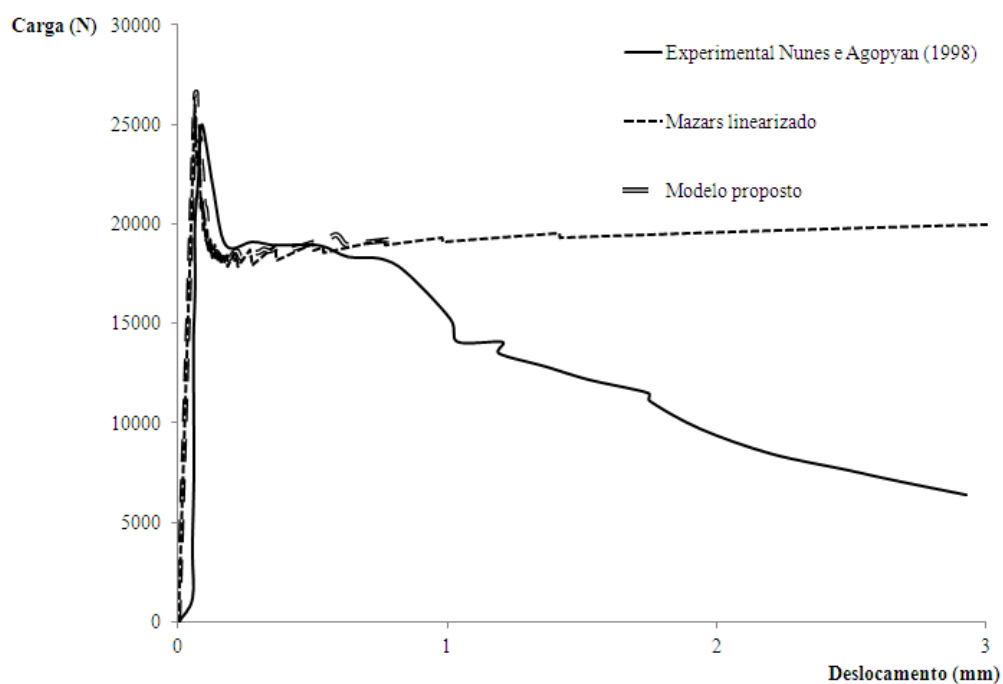


Figura 55. Resultado do Mazars linearizado aplicado ao concreto com 60 kg/m³ de fibras de aço

Verifica-se que há uma convergência quando se adota o modelo linearizado do diagrama de tração de Mazars (1984). Comparando-se a curva obtida com a experimental é identificado um maior valor de carga pós-fissuração, que pode ser atribuído a uma maior tensão pós-pico no diagrama de tração linearizado. Comparando-

se a curva carga-deslocamento com a curva tensão-deformação do material, verifica-se que ambas apresentam uma plastificação após a primeira fissura.

Esses resultados confirmam a aplicabilidade da ferramenta computacional gerada nessa pesquisa, contudo, ainda não explicam o motivo do modelo teórico proposto que utiliza o modelo de dano de Mazars (1984) não alcançar níveis de deslocamento maiores, típicos do comportamento do CRFA sob flexão.

É interessante fazer uma ressalva sobre a distribuição de tensões na seção transversal do centro da viga na ruptura prevista pelo modelo proposto para o concreto com 60 kg/m^3 de fibras de aço. A Figura 56(a) ilustra uma distribuição semelhante à apresentada na Figura 56(b), encontrada na literatura como uma distribuição de tensões característica, na qual a região comprimida encontra-se no regime elástico e que a tensão na região tracionada já superou a resistência à tração do CRFA.

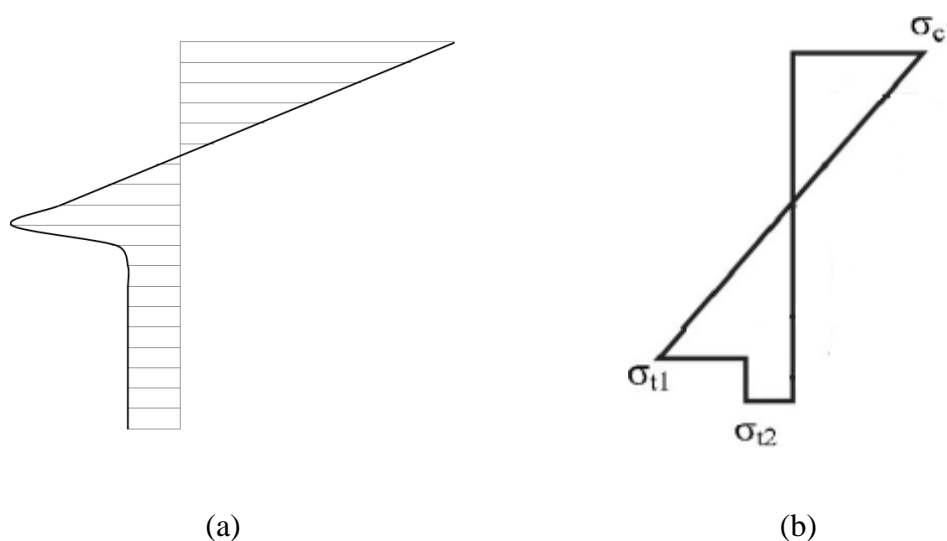


Figura 56. Distribuição de tensões na seção transversal central da viga: (a) do concreto com 60 kg/m^3 de fibras de aço e (b) diagrama de tensões característico (Soranakon e Mobasher, 2007, modificado)

7.2 PREVISÃO DO COMPORTAMENTO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO

A segunda etapa de validação do modelo teórico proposto é relativa ao comportamento do concreto armado em flexão. Para isso, como mencionado anteriormente, foram utilizados os resultados experimentais e numéricos de Álvares (1993).

Álvares (1993) afirmou que a complexa natureza do concreto (heterogeneidade, resposta assimétrica à tração e à compressão, mudanças nas propriedades mecânicas devidas à evolução da microfissuração) produz uma enorme dificuldade para formular um modelo constitutivo completo e geral e lista uma série de teorias que tem sido propostas para reproduzir algumas das propriedades do material, entre as quais estão os modelos de dano. De fato, a mecânica do dano permite considerar os efeitos de deterioração no comportamento mecânico macroscópico, através da perda de rigidez do material em função da fissuração distribuída.

Em seu trabalho Álvares (1993) propôs uma análise de vigas de concreto armado baseada no modelo de dano de Mazars (1984) e no método dos elementos finitos. Para validar seu modelo, o autor idealizou um programa experimental que consistiu na realização de ensaios de compressão uniaxial e ensaios de tração por compressão diametral para determinação dos parâmetros que caracterizassem o modelo de dano que utilizou, e, especialmente, em ensaios de flexão em quatro pontos em vigas de concreto armado convencionais com diferentes taxas de armadura longitudinal (pouco armada, normalmente armada e super-armada). O esquema de carregamento encontra-se ilustrado na Figura 57 e, na Figura 58, encontram-se as seções transversais.

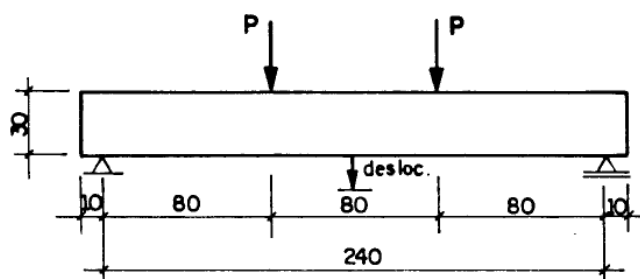


Figura 57. Esquema de carregamento das vigas (ÁLVARES, 1993)

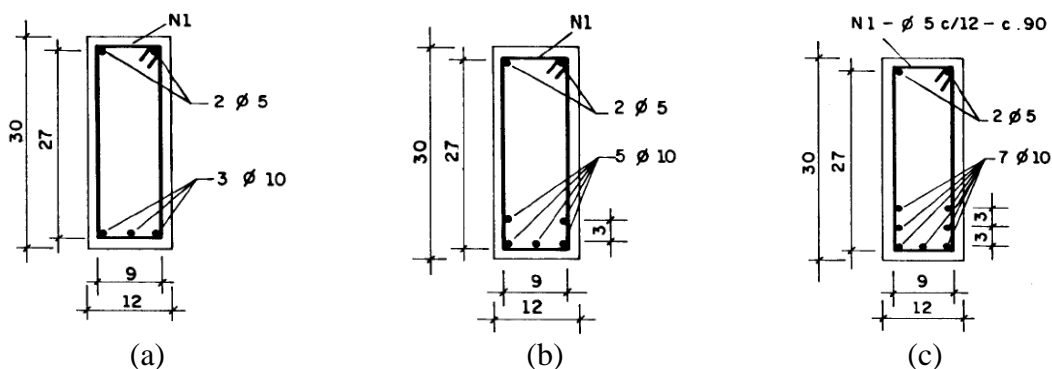


Figura 58. Armação das vigas de Álvares (1993): (a) pouco armada, (b) normalmente armada e (c) super-armada (ÁLVARES, 1993)

As relações constitutivas adotadas por Álvares (1993) para o concreto e para o aço podem ser verificadas nas Figura 59a e Figura 59b. O módulo de elasticidade (E) e o coeficiente de Poisson (ν) adotados para o concreto foram 29,2 GPa e 0,20, respectivamente. Para as armaduras longitudinais o módulo de elasticidade adotado foi 196000 MPa e o coeficiente de Poisson 0,30.

Por fim, os parâmetros associados ao modelo de dano foram: $\varepsilon_{d0}=0,00007$; $A_c=0,85$; $B_c=1620$; $A_t=0,995$; $B_t=8000$. Nota-se que os parâmetros de tração A_t e B_t adotados por Álvares são inferiores aos estabelecidos nas análises anteriores para os CRFA. Pelo fato da viga ser constituída também por aço, sendo o concreto, nesse caso, menos solicitado à tração, talvez o autor tenha feito um ajuste, já que a fissuração é retardada em relação a uma viga de concreto simples e um B_t menor conduz a um comportamento mais dúctil.

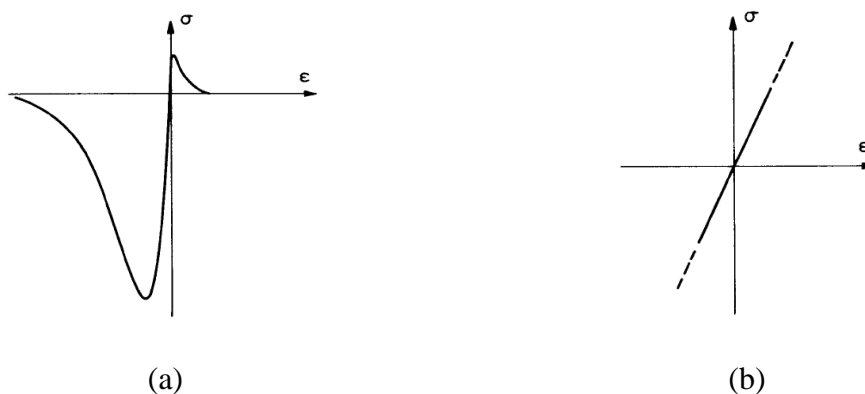


Figura 59. Relação constitutiva do concreto (a) e relação constitutiva do aço (b) (ÁLVARES, 1993)

Do mesmo modo que nas análises anteriores, a discretização do comprimento do elemento foi feita em 12 partes. Nesse caso, a seção transversal foi convenientemente dividida em 62 camadas na viga pouco armada, 63 na normalmente armada e 64 na super-armada, sendo, respectivamente, duas, três e quatro das mesmas compostas por aço, representando as barras dispostas longitudinalmente tanto na parte inferior (submetidas a esforços de tração) como na parte superior da viga (submetidas a esforços de compressão). Buscou-se com isso manter a espessura das camadas de concreto iguais a 5 mm, com o intuito de acompanhar a fissuração. O passo de carga utilizado foi 1,0 kN e a tolerância igual a 10^{-6} .

Álvares (1993) considerou que o modelo de dano de Mazars (1984) teve bom desempenho em suas análises e, conforme pode ser visto nas Figura 60 a Figura 62, os resultados da simulação feita a partir do modelo aqui proposto confirmam o bom desempenho desse modelo de dano e a funcionalidade do MDFE na representação das equações do modelo desenvolvido, já que foi possível descrever o comportamento das vigas convencionais de concreto armado. Cabe salientar que o fato das curvas experimentais serem interrompidas a deslocamentos inferiores aos da curva obtida com o modelo proposto diz respeito ao modo como o ensaio foi realizado, com controle de carga.

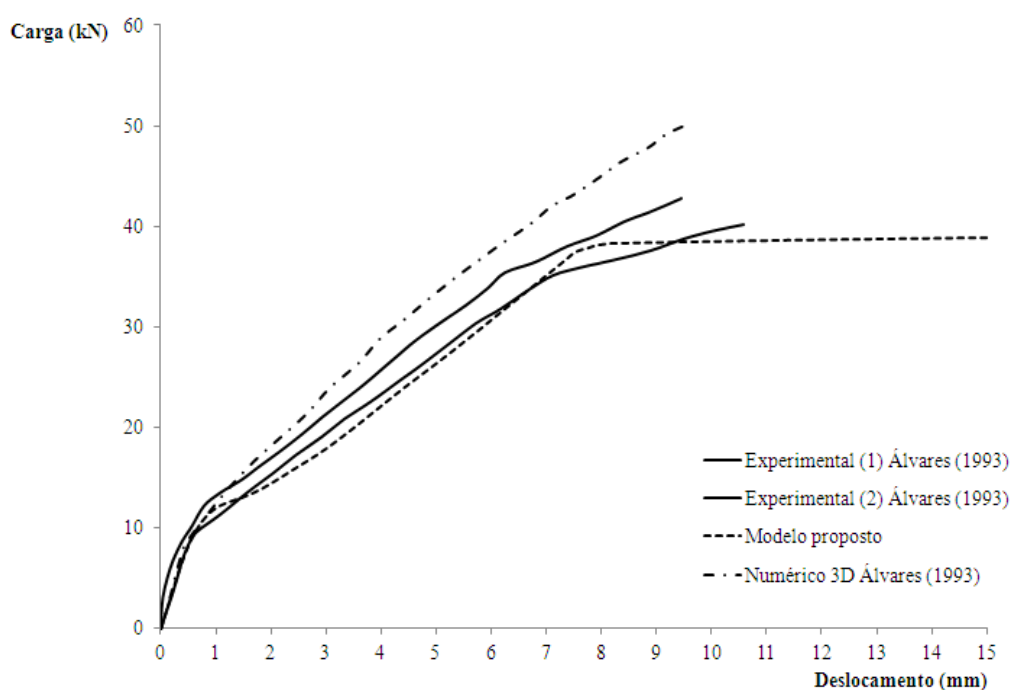


Figura 60. Curvas carga-deslocamento experimentais e numéricas da viga pouco armada de Álvares (1993)

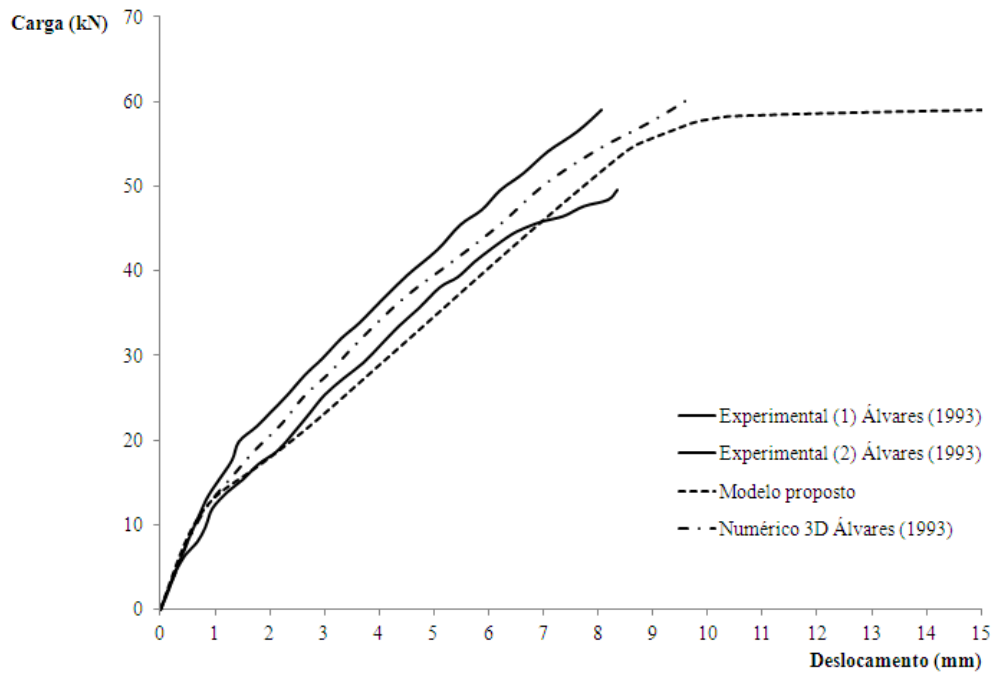


Figura 61. Curvas carga-deslocamento experimentais e numéricas da viga normalmente armada de Álvares (1993)

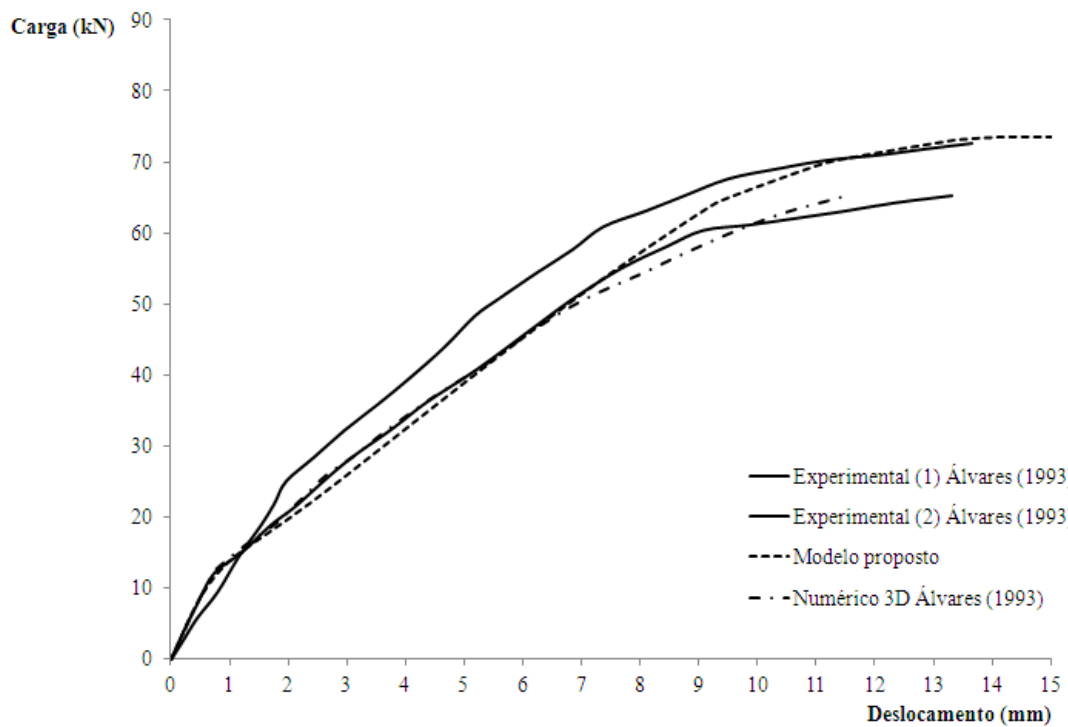


Figura 62. Curvas carga-deslocamento experimentais e numéricas da viga super-armada de Álvares (1993)

7.3 PREVISÃO DO COMPORTAMENTO EM FLEXÃO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO

Faz-se necessário, ainda, averiguar a aplicabilidade do modelo proposto para descrever o comportamento de vigas de concreto armado reforçado com fibras de aço (CARFA), já que, mesmo que indiretamente, um dos propósitos desta pesquisa é contribuir para a disseminação do uso do CRFA, dando ao mesmo uma função estrutural particularizada no que se refere aos esforços de tração. Neste sentido, foram feitas simulações numéricas, valendo-se dos dados de esquema de carregamento (Figura 57), geometria (Figura 58) e propriedades do aço ($E=196000$ MPa e $\nu=0,30$) da viga de concreto pouco armada de Álvares (1993), utilizada na análise anterior. Para a simulação, supôs-se que foram adicionadas fibras de aço ao concreto convencional utilizado por Álvares (1993) nas seguintes quantidades: 20 kg/m^3 , 40 kg/m^3 e 60 kg/m^3 . Utilizaram-se as propriedades e parâmetros de compressão do concreto produzido pelo autor, já que, conforme foi mencionado em 2.2, diversos pesquisadores não registraram variações significativas no comportamento em compressão quando adicionadas fibras curtas de aço ao concreto, o que também justifica a adoção do mesmo módulo de elasticidade do concreto convencional para os supostos CRFA e explica o porquê do coeficiente de Poisson também ter sido estimado em 0,20. Na simulação, como as supostas adições de fibras de aço foram feitas em quantidades iguais às utilizadas por Nunes e Agopyan (1998) em seus trabalhos experimentais, foram considerados os parâmetros de tração determinados no item 7.1. Manteve-se a resistência à tração e o ϵ_{d0} iguais ao do concreto convencional, respectivamente, $3,392 \text{ MPa}$ e $0,00007$, de forma que a contribuição das fibras de aço será percebida apenas através da mudança dos parâmetros A_t e B_t . Os dados utilizados foram resumidos na Tabela 11.

Tabela 11. Propriedades mecânicas e parâmetros adotados para os concretos utilizados na simulação

TEOR DE FIBRAS	f_c (MPa)	f_t (MPa)	E (GPa)	ν	ϵ_{d0}	A_c	B_c	A_t	B_t
Referência	25,509	3,392	29,2	0,20	0,00007	0,85	1620	0,995	8000
20 kg/m^3	25,509	3,392	29,2	0,20	0,00007	0,85	1620	0,95	5×10^4
40 kg/m^3	25,509	3,392	29,2	0,20	0,00007	0,85	1620	0,84	5×10^4
60 kg/m^3	25,509	3,392	29,2	0,20	0,00007	0,85	1620	0,73	5×10^4

As características de discretização da viga e laminação da seção transversal, bem como o passo de carga e a tolerância utilizada são as mesmas que as utilizadas anteriormente em 7.2. Os resultados da simulação através do modelo proposto estão na Figura 63.

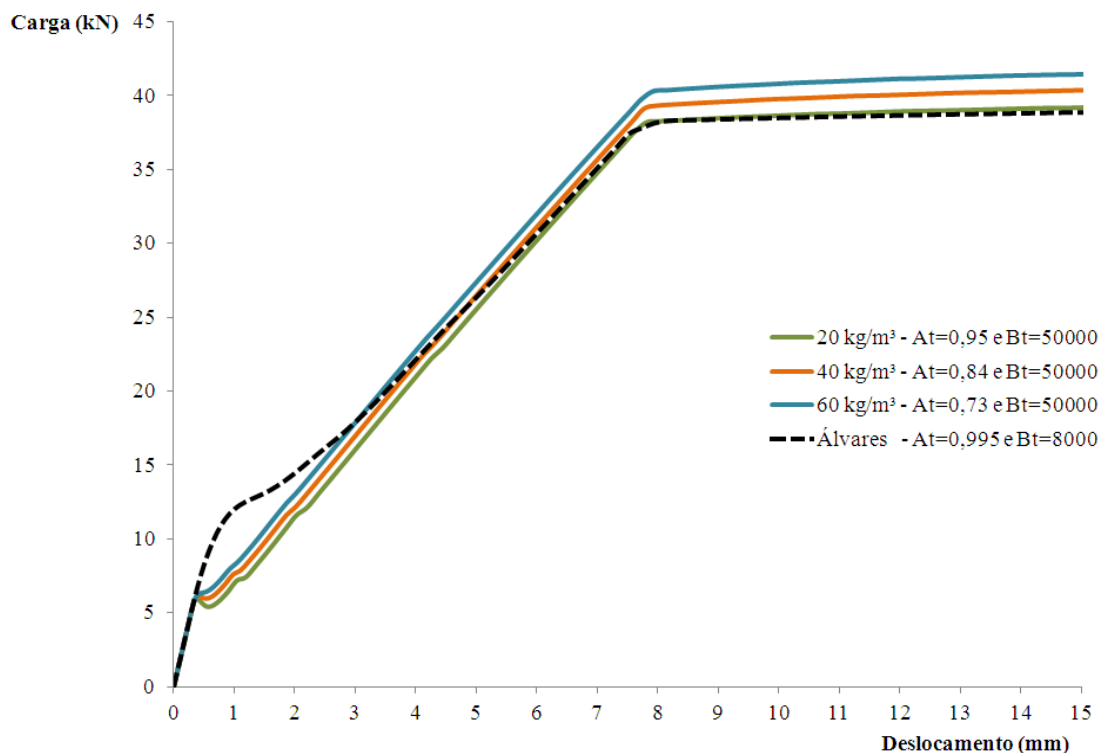


Figura 63. Curvas carga-deslocamento resultantes da simulação, realizada com o modelo proposto e com $B_t=50000$, do comportamento em flexão de vigas de concreto armado reforçado com fibras de aço

A partir das curvas do diagrama ilustrado na Figura 63, percebe-se que há vantagens no uso do CRFA: o início do escoamento do aço é retardado e a tenacidade, mensurada pela área sob cada uma das curvas, é maior à medida que se aumenta a quantidade de fibras utilizada. No entanto, os resultados não apresentam coerência imediatamente após a região elástica das curvas.

O valor do parâmetro B_t foi estabelecido em acordo com o modelo constitutivo trilinear padrão utilizado por Grossi (2006), conforme descrito em 7.1. Contudo, comparando-o ao adotado por Álvares (1993) e, até mesmo, por Mazars (1984), que utilizou $B_t=20000$ para vigas de concreto simples e armado, o valor instituído, realmente, conduz a respostas mais frágeis para os concretos com fibras que para o concreto convencional, o que não condiz com o relatado no item 2.3 sobre comportamento em tração do CRFA.

Para ilustrar e facilitar a compreensão do que foi pontuado no parágrafo anterior, as curvas tensão-deformação de tração estimadas dos concretos em questão encontram-se na Figura 64. As curvas obtidas através do modelo de dano utilizado são pontilhadas e correspondem ao valor de B_t igual a 50000, enquanto que para as curvas cheias, o B_t considerado é 8000. O concreto de referência, cujo estudo paramétrico foi realizado por Álvares (1993), tem sua curva em linha cheia preta. Fica evidenciado que, no modelo de dano proposto por Mazars (1984), quanto maior o B_t , mais frágil o comportamento do material, portanto, não deve ser admitido, nesse caso, B_t igual a 50000 para o CRFA.

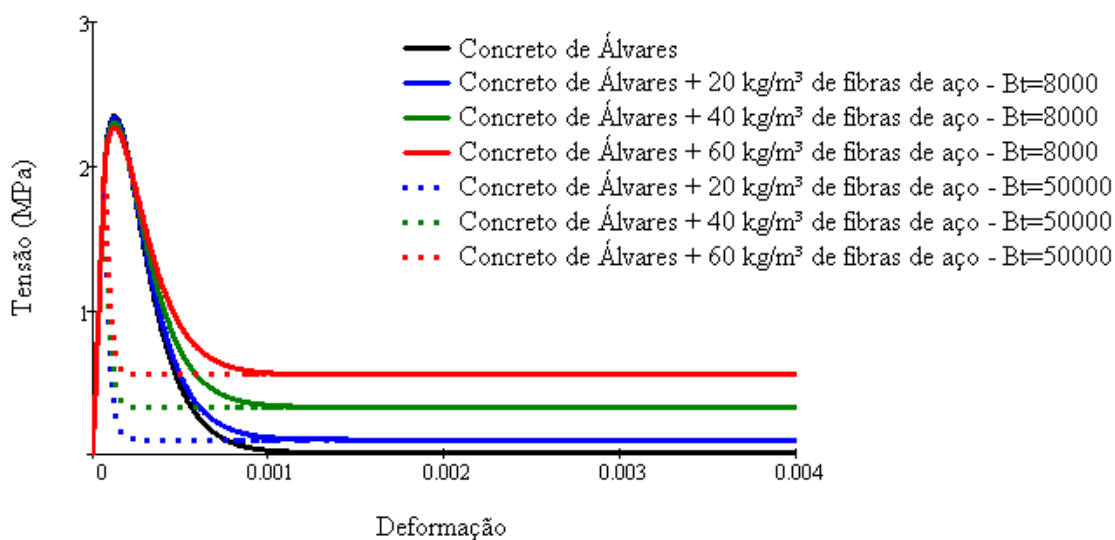


Figura 64. Curvas tensão-deformação de tração estimadas para os concretos utilizados na simulação

Em função desses resultados, novas análises foram realizadas, utilizando-se um B_t igual a 8000 para os concretos reforçados com fibras de aço. Os resultados encontram-se na Figura 65. Nota-se que as novas análises obtiveram respostas satisfatórias, o que confirma a consistência do modelo proposto.

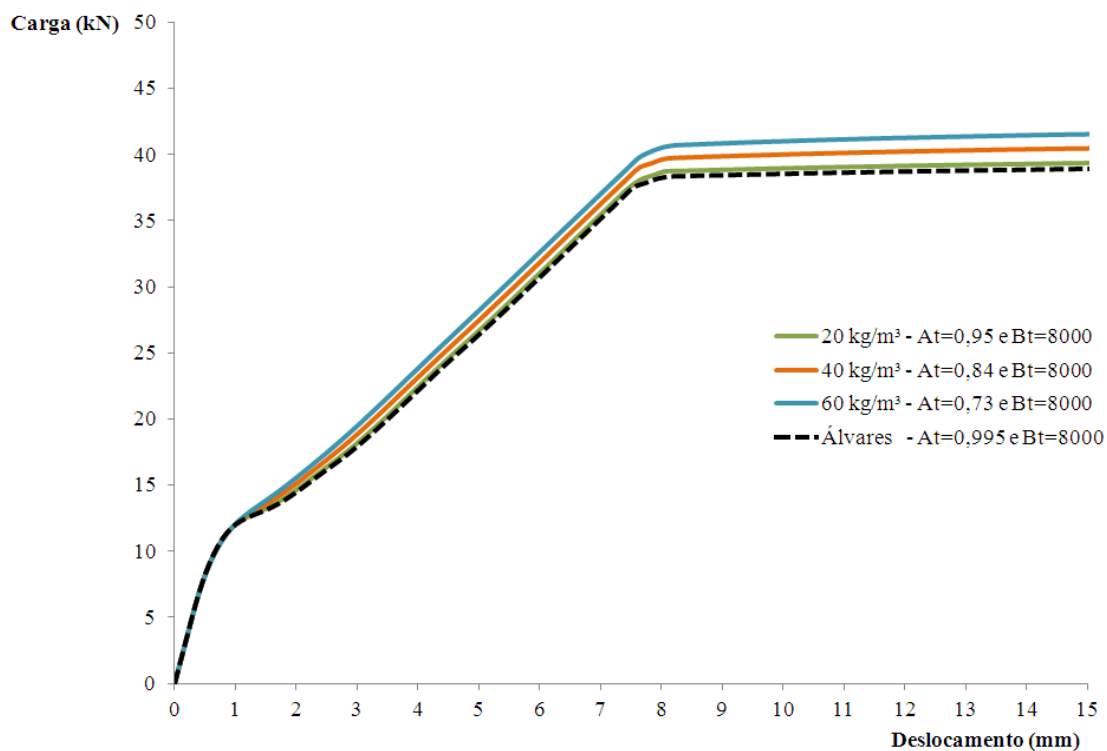


Figura 65. Curvas carga-deslocamento resultantes da simulação, realizada com o modelo proposto e com $B_t=8000$, do comportamento em flexão de vigas de concreto armado reforçado com fibras de aço

Para atestar o potencial do modelo proposto nesta pesquisa, simulou-se ainda, o comportamento de uma viga com as mesmas características da viga pouco armada de Álvares (1993) exceto pela ausência de armadura convencional. Numa outra análise, adicionou-se 40 kg/m^3 de fibras de aço ao concreto dessa viga sem armadura longitudinal. Os resultados foram expressos na Figura 66.

Com as curvas carga-deslocamento apresentadas na Figura 66, conclui-se que o modelo teórico proposto e o programa desenvolvido nesta pesquisa estão aptos a realizar análises de vigas de concreto com e sem o reforço convencional de aço e/ou constituídas por concreto com e sem o reforço de fibras curtas de aço. Além disso, fica claro com as análises o ganho de tenacidade com a adição de fibras de aço.

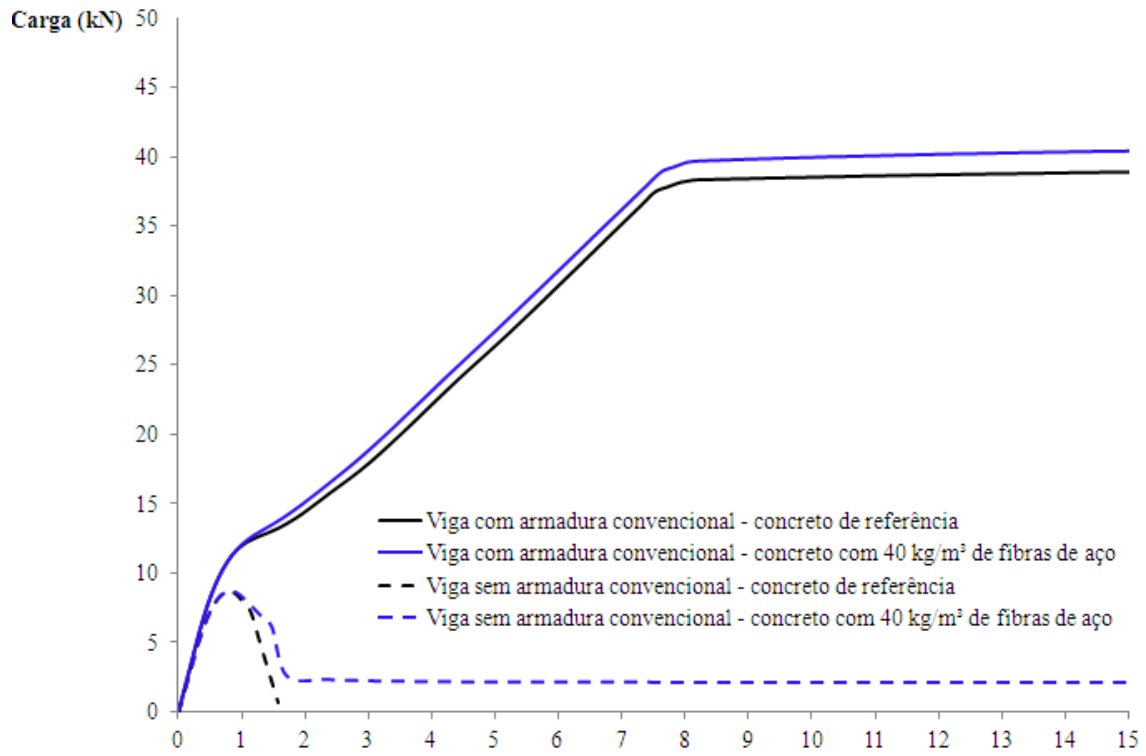


Figura 66. Curvas carga-deslocamento que simulam o comportamento de vigas com e sem armadura convencional, compostas por concreto de referência e por CRFA

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na presente pesquisa foi proposto um modelo para prever o comportamento de vigas constituídas por CRFA, com armadura convencional ou não, que se valeu do modelo de dano de Mazars (1984) e da teoria clássica dos laminados para descrever a perda de rigidez do concreto, cujo tratamento numérico utilizado foi o MDFE, resultando num programa computacional em FORTRAN.

Foram realizadas análises com o intuito de validar a ferramenta computacional elaborada e verificar o potencial do modelo proposto. Inicialmente, foram feitos estudos paramétricos, tendo sido estimadas, segundo o modelo de dano utilizado, curvas tensão-deformação de compressão e de tração para o CRFA, cujos parâmetros relacionados foram aplicados à simulação do comportamento de corpos de prova de CRFA sob flexão.

Observou-se uma dificuldade do modelo proposto em obter deslocamentos da ordem dos alcançados experimentalmente e pela modelagem de Grossi (2006). Decidiu-se pela implementação do modelo trilinear de tração, a fim de verificar o programa elaborado na pesquisa, mesmo já tendo sido efetuados testes no decorrer da sua construção. Verificou-se que a ferramenta computacional não apresentava problemas.

Um novo modelo, que buscou linearizar o modelo de dano de Mazars (1984), foi sugerido para a tração, a fim de se compreender as razões pelas quais as análises do modelo proposto encerravam-se a deslocamentos consideravelmente inferiores aos obtidos em laboratório. Novamente, foram alcançados resultados satisfatórios no que diz respeito à eficácia da ferramenta computacional e ao potencial do modelo proposto, contudo, ainda não foi possível explicar sua deficiência. Acredita-se que a não-linearidade do modelo na tração tenha provocado a dificuldade na convergência.

A ferramenta computacional desenvolvida nesta pesquisa funciona e é passível de modificações convenientes para seu aprimoramento, como, por exemplo, a inserção de outros modelos de dano, sem que haja necessidade de modificar o tratamento numérico das equações, uma vez que o mesmo apresentou-se eficaz, nas análises realizadas por diversos modelos.

8.1 SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

Embora tenha apresentado limitação, o modelo teórico proposto tem potencial para descrever o comportamento de vigas constituídas por CRFA com armadura convencional ou não, mas, faz-se necessária a continuidade da pesquisa efetuada utilizando dados experimentais de outros trabalhos para explicar a razão do modelo teórico proposto, baseado no modelo de dano de Mazars (1984), encerrar as análises a deslocamentos inferiores aos que realmente caracterizam a ruptura do elemento estrutural, subestimando o material CRFA. O que também pode viabilizar uma adaptação do modelo de dano que foi idealizado para descrever a perda de rigidez do concreto convencional, cujo modo de ruptura é frágil.

Sugere-se também que novas pesquisas contemplem a realização de um programa experimental que caracterize o CRFA com diversos teores e comprimentos de fibras. Para que se estime o mínimo possível de dados necessários à análise estrutural, é interessante submeter o material a ensaios de resistência à compressão, determinação do módulo de elasticidade, e, se possível, realizando, até mesmo, ensaios de tração direta, buscando descrever as curvas tensão-deformação, possibilitando uma melhor correlação das propriedades e do comportamento do material às respostas carga-deslocamento de vigas, com e sem a armadura convencional, sob flexão.

Com a realização de um programa experimental que verse sobre diversos teores de fibras, será possível verificar qual o limite ideal de fração volumétrica a utilizar, sem que haja prejuízos às propriedades requeridas do concreto nem um alto custo-benefício. Além disso, a avaliação do comportamento do CRFA considerando-se comprimentos diferentes é igualmente importante e poderá definir qual o tamanho de fibra deve ser considerado curto ou longo.

Com a última simulação, confrontando curvas carga-deslocamento em flexão de vigas de concreto com e sem fibras de aço, armadas convencionalmente ou não, foi verificado que ponderar a contribuição estrutural das fibras de aço no concreto é plausível e que, portanto, deve-se prosseguir as investigações a fim de se estabelecer métodos de dimensionamento de estruturas com CRFA consistentes o suficiente para serem normatizados, inclusive, considerando-se os esforços de cisalhamento previstos na teoria de primeira ordem de laminados e a não-linearidade geométrica.

REFERÊNCIAS

ÁLVARES, M. da S. **Estudo de um modelo de dano para concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação com o emprego do método dos elementos finitos.** São Carlos, 1993. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, 1993.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **Manual of concrete practice: part 5.** State-of-the-art report on fiber reinforced shotcrete. (ACI 506.1R). ACI Committee 506. American Concrete Institute. Detroit, USA, 1984. 13p.

ARAÚJO, D. L. **Cisalhamento entre viga e laje pré-moldada ligadas mediante ninchos preenchidos com concreto de alto desempenho.** São Carlos, 2002. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, 2002.

ARAÚJO, D. L.; CARMO, L. C.; NUNES, F. G. T.; TOLEDO FILHO, R. D. Modelagem computacional de vigas de concreto armado reforçado com fibras de aço submetidas a cisalhamento. **Revista Ibracon de Estruturas e Materiais**, Vol. 3, nº 1, 2010; p.68-94.

ASSAN, A. E. Nonlinear analysis of reinforced concrete cylindrical shells. **Computers and Structures**, n. 80, p. 2177-2184, 2002.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118 - Projeto de estruturas de concreto.** Rio de Janeiro, 2003.

_____. **NBR 15530 – Fibras de aço para concreto - Especificações.** Rio de Janeiro, 2007.

BALAGURU, P. N., SHAH, S. P. **Fiber-Reinforced Cement Composites.** International Edition, 1992.

BARROS, J. A. O. de. **Comportamento do betão reforçado com fibras: Análise experimental e simulação numérica.** Porto, 1995. Tese de Doutoramento, Universidade do Porto, Portugal, 1995.

BARROS, J. Comportamento à flexão de betão reforçado com fibras de aço – Caracterização experimental e conceitos para uso em projecto. In: BARROS, Joaquim; ROSSI, Pierre; MASSICOTTE, Bruno (Org.). **DIMENSIONAMENTO DE ESTRUTURAS DE BETÃO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO.** Guimarães, 2003. p. 2.1-2.13.

BASTOS, P. S. dos S. **Análise experimental de dormentes de concreto protendido reforçados com fibras de aço.** São Carlos, 1999. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, 1999.

BATHE, K. J.; WILSON, E. L. **Numerical methods in finite element analysis.** Prentice Hall, 1976.

BENTUR, A.; MINDESS, S. **Fibre reinforced cementitious composites.** 2. Ed. Modern Concrete Technology Series. Taylor & Francis, 2007.

CAMPIONE, G.; MANGIAVILLANO, M. L. Fibrous reinforced concrete beams in flexure: Experimental investigations, analytical modeling and design considerations. **Engineering Structures**, n. 30, p. 2970-2980, 2008.

CARREIRA, D. J.; CHU, K. H. **Stress-strain relationship for plain concrete in compression**. ACI Journal, n. 82, p. 797-804, 1985.

CARVALHO, R. C.; FIGUEIREDO FILHO, J. R. de. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado**: segundo a NBR 6118:2003. 3. ed. São Carlos: EdUFSCar, 2007.

CASTRO, N de S. **Influência do agregado graúdo na trabalhabilidade do concreto reforçado com fibras de aço**. Feira de Santana, 2010. Monografia, Universidade Estadual de Feira de Santana, 2010.

CECCATO, M.R. **Estudo da trabalhabilidade do concreto reforçado com fibras de aço**. São Paulo, 1998. Dissertação de mestrado. Universidade de São Paulo, 1998. 98p.

CHANG, T. Y.; CHEN, W. F. **Extended NONSAP program for OTEC Structural Systems**. ERDA Report COO, 1976.

CHEN, W. F.; SUZUKI, H.; CHANG, T. Y. Nonlinear analysis of concrete cylinder structures under hydrostatic loading. **Computers and Structures**, p. 559-570, 1980.

CHUNXIANG, Q.; PATNAIKUNI, I. Properties of high-strength steel fiber-reinforced concrete beams in bending. **Cement and Concrete Composites**, n. 21, p. 73-81, 1999.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. CEB-FIP Model Code 1990. Bulletin d'information, n. 203. 1991.

COSTA, F. P. **Análise numérica da flexão de vigas com a consideração da deformabilidade por cortante e da inércia de rotação**. Rio de Janeiro, 1998. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1998.

COSTA, J. B de A. **Estudo experimental de consolos de concreto com fibras moldados em etapas distintas dos pilares**. São Carlos, 2009. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, 2009.

CUCCHIARA, C.; MENDOLA, L. La; PAPIA, M. Effectiveness of stirrups and steel fibres as shear reinforcement. **Cement and Concrete Composites**, n. 26, p. 777-786, 2004.

DING, Y.; KUSTERLE, W. Compressive stress-strain relationship of steel fibre-reinforced concrete at early age. **Cement and Concrete Research**, n. 30, p. 1573-1579, 2000.

DING, Y.; YOU, Z.; JALALI, S. The composite effect of steel fibres and stirrups on the shear behavior of beams using self-consolidating concrete. **Engineering Structures**, n. 33, p. 107-117, 2011.

FIGUEIREDO, A. D. de. **Concreto reforçado com fibras**. São Paulo, 2011. Tese de Livre-docência, Universidade de São Paulo, 2011.

GROSSI, B. F. **Uma contribuição para a modelagem numérica do concreto com fibras curtas de aço.** Belo Horizonte, 2006. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, 2006.

GROSSI, B. F.; CALIXTO, J. M. F. **Modelagem numérica do concreto com fibras de aço** In: ANAIS DO 50º CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO. 2008, Salvador. ISBN 978-85-98576-13-8.

HABIBI, A.; MOHARRAMI, H. Nonlinear sensitivity analysis of reinforced concrete frames, **Finite Elements in Analysis and Design**, n. 46, p. 571–584, 2010.

JONES, J.; WUA, C.; OEHLERS, D. J.; WHITTAKER, A. S.; SUN, W.; MARKS, S.; COPPOLA, R. Finite difference analysis of simply supported RC slabs for blast loadings. **Engineering Structures**, n. 31, p. 2825-2832, 2009.

JONES, R.M. **Mechanics of composite materials.** Taylor & Francis Group, 1999.

LEMAITRE, J. DESMORAT, R. **Engineering damaged mechanics: ductile, creep, fatigue and brittle failures.** Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.

LIMA, J. M. F. **Análise dinâmica da flexão de barras com não-linearidade geométrica utilizando diferenças finitas energéticas.** Rio de Janeiro, 1995. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1995.

LIMA, J. M. F.; SANTOS, J. G. B.; NAGAHAMA, K. de J.; LIMA, P. R. L. Um modelo para análise não-linear física da flexão de vigas de concreto armado. **Mecânica Computacional**, v. XXIX, p. 9839-9853, 2010.

LIMA, P. R. L. **Análise teórica e experimental de CRFAs reforçados com fibras de sisal.** Rio de Janeiro, 2004. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2004.

LIMA, P.R.L.; TOLEDO FILHO, R.D. **Determinação da tensão de aderência fibra-matriz em CRFAs à base de cimento reforçados com fibra de sisal.** In: CONFERÊNCIA BRASILEIRA SOBRE MATERIAIS E TECNOLOGIAS NÃO-CONVENCIONAIS NA CONSTRUÇÃO ECOLÓGICA E SUSTENTÁVEL. 2006, Salvador. ISBN 85-9873-07-5.

LOPES, M. M. **Substituição parcial de armadura de flexão por fibras de aço em vigas de concreto.** Rio de Janeiro, 2005. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2005.

MAJORANA, C. E.; SALOMONI, V. A.; SCHREFLER, B. A. **A constitutive relationship for high performance and ultra high performance concrete.** Computational Modelling of Concrete Structures, de Borst, Bićanić, Mang & Meschke (eds). Balkema, 1998.

MARANGON, E. **Desenvolvimento e caracterização de concretos auto-adensáveis reforçados com fibras de aço.** Rio de Janeiro, 2006. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2006.

MAZARS, J. Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure. Thèse de Doctorat d'État, Université Paris 6, 1984.

MEHTA, P. K.; MONTEIRO, P. J. M. **CONCRETO: Microestrutura, Propriedades e Materiais**. São Paulo. IBRACON, 2008.

NAAMAN, A. E.; NAJM, H. Bond-Slip Mechanisms of Steel Fibers in Concrete. **ACI Materials Journal**, v.88, n. 2, March-April 1991.

NATARAJA, M. C.; DHANG, N.; GUPTA, A. P. Stress-strain curves for steel-fiber reinforced concrete under compression. **Cement and Concrete Composites**, n. 21, p. 383-390, 1999.

NUNES, N. L.; AGOPYAN, V. **A influência do fator de forma da fibra na tenacidade à flexão do concreto reforçado com fibras de aço**. 18 p. Boletim Técnico BT/PCC/225, Departamento de Engenharia de Construção Civil, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (USP), São Paulo, SP, 1998.

OLIVEIRA JÚNIOR, L. A. **A influência das fibras de aço e das adições minerais no enrijecimento à tração do concreto armado: análise experimental**. Goiânia, 2007. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Goiás, 2007.

OLIVEIRA JÚNIOR, L. A.; ARAÚJO, D. L.; TOLÊDO FILHO, R. D.; FAIRBAIRN, E. M. R.; ANDRADE, M. A. S. Influência das fibras de aço e das adições minerais na fissuração de tirantes de concreto armado. **Revista Ibracon de Estruturas e Materiais**, v. 2, n. 2, p. 142-165, 2009.

PLETZ, E. **Análise de estruturas laminares pelo método da energia discretizada**. Rio de Janeiro, 1983. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1983.

RILEM TC 162-TDF (2002). Test and design methods for steel fibre reinforced concrete, **Matériaux et Constructions**, Vol.35, pp.262-278.

SANCHES JÚNIOR, F.; VENTURINI, W. S. Damage modeling of reinforced concrete beams. **Advances in Engineering Software**, n. 38, p. 538-546, 2007.

SORANAKOM, C.; MOBACHER, B. Closed-form solutions for flexural response of fiber-reinforced concrete beams. **Journal of Engineering Mechanics**, p. 933-941, 2007.

SOUZA, M. B. S. e. **Modelagem numérica de vigas de concreto reforçado com fibras de aço**. Goiânia, 2006. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Goiás, 2006.

VELASCO, R. V. **Concretos auto-adensáveis reforçados com elevadas frações volumétricas de fibras de aço: propriedades reológicas, físicas, mecânicas e térmicas**. Rio de Janeiro, 2008. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2008.

VELASCO, R. V.; SILVOSO, M. M.; TOLEDO FILHO, R. D. FAIRBAIRN, E. M. R. **Avaliação experimental da retração autógena e por secagem de concretos reforçados com fibras de aço.** Anais do 52º Congresso Brasileiro do Concreto – CBC 2010. Fortaleza, 2010. IBRACON.

WANG, Z. L.; WU, J. WANG, J. G. A study of constitutive relation and dynamic failure for SFRC in compression. **Construction and Building Materials**, n. 24, p. 1358-1363, 2010.

YAZICI, S.; INAN, G.; TABAK, V. Effect of aspect ratio and volume fraction of steel fiber on the mechanical properties of SFRC. **Construction and Building Materials**, n. 21, p. 1250-1253, 2007.