UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

LARISSA SANTANA DE ALMEIDA

MATEMÁTICA PARA O ENSINO: A CONSTRUÇÃO DO RACIOCÍNIO FUNCIONAL PARA OS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Feira de Santana-BA
2025

LARISSA SANTANA DE ALMEIDA

MATEMÁTICA PARA O ENSINO: A CONSTRUÇÃO DO RACIOCÍNIO FUNCIONAL PARA OS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual de Feira de Santana, para a obtenção do grau de Mestre em Educação.

Orientadora: Drª. Ana Virginia de Almeida Luna

Feira de Santana – BA
2025

LARISSA SANTANA DE ALMEIDA

“**MATEMÁTICA PARA O ENSINO: A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO A PARTIR DE UMA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DOS ANOS INICIAIS**”. Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Estadual de Feira de Santana, na linha de Currículo, formação e práticas pedagógicas, como requisito para obtenção do grau de mestre em Educação.

Feira de Santana, 18 de março de 2025

Documento assinado digitalmente
gov.br ANA VIRGINIA DE ALMEIDA LUNA
Data: 15/04/2025 19:46:45-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof/a. Dr/a. Ana Virginia de Almeida Luna Orientador/a – UEFS

Documento assinado digitalmente
gov.br ROBERTA D ANGELA MENDUNI BORTOLOTI
Data: 28/04/2025 09:15:30-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof/a. Dr/a. Roberta D'Angela Menduni-Bortoloti Primeiro/a Examinador/a – UESB

Documento assinado digitalmente
gov.br FLAVIA CRISTINA DE MACEDO SANTANA
Data: 21/04/2025 17:39:43-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof/a. Dr/a. Flávia Cristina de Macêdo Santana Segundo/a Examinador/a – UEFS

Documento assinado digitalmente
gov.br VERA LUCIA MERLINI
Data: 21/04/2025 17:06:19-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof/a. Dr/a.Vera Lucia Merlini Terceiro/a Examinador/a – UESC

RESULTADO: Aprovada

Ficha Catalográfica - Biblioteca Central Julieta Carteado - UEFS

A448m

Almeida, Larissa Santana de

Matemática para o ensino: a construção do raciocínio funcional para os anos iniciais do ensino fundamental / Larissa Santana de Almeida. – 2025.

83 f.: il.

Orientadora: Ana Virgínia de Almeida Luna

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Feira de Santana, Programa de Pós-Graduação em Educação, Feira de Santana, 2025.

1. Matemática. 2. Raciocínio funcional. 3. Formação continuada para professores. 4. Ensino – Anos iniciais. I. Luna, Ana Virginia de Almeida, orient. II. Universidade Estadual de Feira de Santana. III. Título.

CDU 371.13:51

Daniela Machado Sampaio Costa - Bibliotecária - CRB-5/2077

Dedico esta pesquisa aos meus pais de criação Elias Barreto Rios (i*n memoriam*) e Isabel Alves da Silva, o amor e o cuidado de vocês me trouxeram até aqui.

AGRADECIMENTOS

Ao Deus da minha vida, autor da minha história, que esteve comigo durante toda a minha trajetória, me inspirou e me sustentou em todos os momentos de incertezas e aflições no decorrer da pesquisa, com louvor chegamos até aqui.

Agradeço a toda a minha família pelo apoio e cuidado, especialmente à minha mãe, Rosalia, por me dar a vida e por ser uma mulher forte, que me inspira a ter resiliência. Não poderia deixar de expressar minha gratidão àqueles que sempre estiveram comigo: meus pais de criação, minha madrinha Isabel, meu tio Elias (*in memoriam*) e meu padrinho Josevando, que cuidaram de mim e me educaram com dignidade e honestidade. Lembrar das palavras do tio Elias — "tenha fé em Deus, minha filha" — me trouxe força e esperança nos dias difíceis. E tenho convicção de que as orações da minha madrinha Isabel, pedindo para que Deus realizasse os meus sonhos, me aproximaram desta conquista.

Não poderia deixar de agradecer aos meus avós Maria da Glória (*in memoriam*) e Pedro (*in memoriam*), vocês me ensinaram que o trabalho dignifica e que a felicidade está nas coisas simples. A minha vó Maria da Glória, um agradecimento especial por me fazer entender que estudar é uma OPORTUNIDADE que deve ser aproveitada, a sua angustia de não tido a oportunidade de aprender ao menos assinar o seu nome me fez aproveitar todas as oportunidades formativas, sua neta se torna mestra em Educação para honrar a sua história e de todas as outras da nossa família que não puderam acessar a educação formal.

Ao meu companheiro de vida, Pedro, expresso minha gratidão por todo o carinho e amor, e por compreender todas as vezes que precisei me ausentar. Agradeço por ouvir minhas lamentações e por enxugar minhas lágrimas. Nosso amor transcende esta vida. Agradeço também a sua família que me apoiaram e incentivaram nesse percurso, especialmente a tio Nilo e tia Sumaya que vibraram desde a seleção do mestrado.

A minha orientadora, Ana Virginia, te agradeço por ser fonte de inspiração, na pesquisa e na vida, agradeço por ter acreditado nesta pesquisa, pela paciência, por cada orientação e indicações de leitura, que contribuíram para a concretização desta pesquisa.

Aos membros do NEEMFS (Núcleo de Estudos em Educação Matemática de Feira de Santana), pela parceria, contribuição e momentos de estudos, especialmente a Vanessa Silva, por estar sempre a uma mensagem de distância, sempre pronta a me ajudar ou dar um conselho.

Agradeço também aos membros da Banca Examinadora, Profa. Vera, Flávia e Roberta, por suas valiosas contribuições, questionamentos e sugestões que enriqueceram este estudo.

A Capes (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio financeiro. Estendo meus sinceros agradecimentos ao corpo docente e administrativo do PPGE-UEFS, assim como aos meus colegas de mestrado: Ayrton e Marilya.

Especialmente, expresso meu agradecimento a todas as professoras da Escola Municipal Celso Ribeiro Daltro, com imensa boa vontade e carinho, contribuíram para a realização desta pesquisa, sem vocês, nada disso seria possível. À equipe gestora, especialmente a professora Karine que me acolheu com tanto afeto e presteza, dirijo meu sincero muito obrigada.

A todos vocês, meus mais sinceros agradecimentos.

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo construir uma matemática para o ensino nos anos iniciais a partir das realizações do raciocínio funcional por meio de diferentes contextos, a saber, estudos correlatos e uma formação continuada para professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Para atingir o objetivo geral, atribuímos dois objetivos específicos. O primeiro construir uma matemática para o ensino para os anos iniciais a partir de pesquisas relacionadas ao raciocínio funcional. E o segundo, constitui-se em construir uma matemática para o ensino do raciocínio funcional em uma formação continuada com professores dos anos iniciais. A escolha por uma pesquisa de cunho qualitativo encontra-se na construção do modelo por meio do que é comunicado como raciocínio funcional, seja por professores da educação básica em um ambiente de formação ou pela produção científica de pesquisadores. Utilizamos o dispositivo investigativo Estudo do Conceito de Brent Davis e Moshe Renert para identificar as diferentes realizações do raciocínio funcional nos anos iniciais. Este dispositivo foi entrelaçado as lentes teóricas dos trabalhos desenvolvidos pela pesquisadora Anna Sfard, que se constituiu em instrumento de análise e estratégia de modelagem teórica. Os resultados do estudo apontam uma variabilidade de realizações do raciocínio funcional que foram agrupadas em panoramas. Considerando os estudos correlatos foram identificados os panoramas: generalização de padrões, proporcionalidade e máquina de transformação. Já no estudo com professores foram identificados os panoramas: generalização de padrões, proporcionalidade, expressão algébrica e diagrama.

Palavras-chave: Raciocínio Funcional. Realizações. Matemática para o Ensino. Anos Iniciais.

ABSTRACT

This research aimed to construct a mathematics for teaching in the early years based on the achievements of functional reasoning in different contexts. Based on related studies and ongoing training for elementary school teachers. To achieve the general objective, we assigned two specific objectives. The first was to construct a mathematics for teaching based on research related to functional reasoning. And the second was to construct a mathematics for teaching functional reasoning in ongoing training for elementary school teachers. The choice for qualitative research lies in the construction of the model through what is communicated as functional reasoning, whether by elementary school teachers in a training environment or through the scientific production of researchers. We used the investigative device of Brent Davis and Moshe Renert's Concept Study to identify the different uses of functional reasoning in the early years. This device was intertwined with the theoretical lenses of the work developed by researcher Anna Sfard, which constituted an analysis instrument and theoretical modeling strategy. The results of the study indicate a variability of functional reasoning achievements that were grouped into panoramas. Considering the related studies, the following panoramas were identified: generalization of patterns, proportionality and transformation machine. In the study with teachers, the following panoramas were identified: generalization of patterns, proportionality, algebraic expression and diagram.

Keywords: Functional Reasoning. Achievements. Mathematics for Teaching. Early Years.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
EC	Estudo do Conceito
NCIM	National Countil of Teachers of Mathematics
NEEMFS	Núcleo de Estudos em Educação Matemática de Feira de Santana
PPGE	Programa de Pós Graduação em Educação
REPARE	Grupo de Pesquisa Reflexão, Planejamento, Ação e Reflexão em Educação Matemática
UEFS	Universidade Estatual de Feira de Santana
UERJ	Universidade do Estado do Rio de Janeiro
UESB	Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
UESC	Universidades Estadual de Santa Cruz
UFPE	Universidade Federal de Pernambuco
UFRB	Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
UFSB	Universidade Federal do Sul da Bahia

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Nesta introdução, apresento, inicialmente, parte da minha trajetória pessoal e acadêmica que tornaram possível o encontro com objeto de pesquisa. Desse modo, apresento-a na primeira pessoa do singular. Justifico o interesse por investigar, especificamente o raciocínio funcional, como foram delimitados o objetivo geral e específicos desta dissertação, e a organização dos capítulos da dissertação.

ENCONTRO COM O OBJETO DE PESQUISA

O sonho de ser professora de matemática surgiu na infância. Ainda me lembro guardando as sobras de giz da minha professora da quarta série, atual quinto ano das séries iniciais do Ensino Fundamental, e pedindo rascunho de papel para elaborar atividades para brincar de escolinha com as minhas primas. Nas séries finais do Ensino Fundamental, meus olhos brilhavam nas aulas de matemática, e os meus questionamentos ficavam cada dia mais difíceis para os meus professores.

A dedicação em registrar os conceitos e a maneira de resolver as tarefas foram observadas por uma professora, que solicitou emprestado meus cadernos das séries finais do Ensino Fundamental, como material de apoio para ministrar as aulas nos anos posteriores. Esta ação me levou a questionar as ações necessárias para o Ensino de matemática, que vão além de reproduzir registros e exercícios, as quais envolvem, estudo dos conceitos matemáticos, planejamento e constante reflexão.

Entretanto, no Ensino Médio, ao estudar na rede estadual de ensino, angustiava-me ao ver a desvalorização da profissão, não apenas na remuneração aviltante, que recebe um professor, mas também nas condições de trabalho, salas de aula em que se amontoam mais de 50 alunos, bem como a sobrecarga de trabalho. Todavia, ainda continuava me dedicando aos estudos de matemática, mas, ser professora não era mais uma opção.

Por pensar que o curso de ciências contábeis tinha relação com a matemática, ingressei no curso logo após o Ensino Médio. No entanto, decepcionei-me com o curso, tendo em vista que se tratava mais de direito do que matemática, mas fiquei por um tempo, pois era possível conciliar com meu trabalho no *shopping* da cidade. Mas, como a vida é cheia de surpresas, em 2016, após um problema de saúde que me impossibilitou de trabalhar, decidi, finalmente, prestar o vestibular da Universidade estadual de Feira de Santana (UEFS) para licenciatura em Matemática no final desse mesmo ano e, finalmente, realizar o sonho de SER PROFESSORA DE MATEMÁTICA. Obtendo aprovação, iniciei, no ano seguinte, a graduação.

No meu primeiro ano de graduação, senti muita dificuldade, mesmo tendo sido uma estudante dedicada na Educação Básica. Um dos conteúdos que mais foram utilizados nas disciplinas foi o de função, nos cálculos, nas disciplinas de física, elas estavam lá. Tinha dificuldade em relacionar informações, principalmente, em relacionar os conceitos com o cotidiano, bem como interpretar situações-problema, que envolviam o conceito de função.

Em, em 2019, decidi me aprofundar nos estudos relacionados a Educação Matemática, com isso, ingressei no Núcleo de Estudos em Educação Matemática de Feira de Santana (NEEMFS), cujo propósito é desenvolver ações para a formação continuada de professores da Educação Básica (Educação Infantil, 1º ao 9º ano do Ensino Fundamental e Ensino Médio) e realizar pesquisas voltadas para essa formação.

Ao ingressar no NEEMFS, iniciei meus estudos com ênfase na *Early Algebra*, que se refere ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes, desde o início da escolaridade. A partir dos estudos e leituras realizadas no grupo de pesquisa, pude notar o impacto da publicação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), publicada em 2017, uma vez que álgebra como unidade temática se torna obrigatória desde os Anos Inicias do Ensino Fundamental. Por entender que as mudanças que ocorrem nos currículos não acontecem simultaneamente com as ações em sala de aula, e que os professores são protagonistas no processo de ensino e aprendizagem, decidi me debruçar sobre o entendimento que as professoras dos anos inicias tinham a respeito da álgebra para essa etapa da escolaridade.

Ainda, em 2019, iniciei o projeto de pesquisa de iniciação científica, intitulado: "Formação de professores em *Early Algebra* e a produção de textos que são legitimados nesse espaço", aprovado no Edital PPPG-IC/UEFS N° 01/2019. A pesquisa foi realizada durante a formação continuada de professores, que aconteceu durante o projeto: "*Early Algebra* na Educação Básica: mapeamento, diagnóstico e formação". Foi neste projeto, também, que me aproximei da Teoria dos Códigos de Basil Bernstein, e pude notar como os conceitos desta teoria me ajudaram a compreender práticas pedagógicas [1]e as relações dentro delas.

Posteriormente, em 2022, apresentei, no XIV Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), o artigo: ''Álgebra na educação infantil e nos anos iniciais: o processo de recontextualização interna no espaço formativo'', que teve como objetivo analisar como os textos de um curso de formação continuada são recontextualizados pelos seus participantes, em outro espaço de formação.

[1] A prática pedagógica, segundo Basil Bernstein, é entendida como um conjunto de atividades e interações que ocorrem no processo de ensino e aprendizagem, influenciadas pelas estruturas sociais e culturais (Bernstein,1990).

Os estudos, até então, evidenciaram que, em relação ao pensamento algébrico, grande parte dos professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, nem sempre, reconhecem "o que ensinar "e nem "como ensinar". Daí surge a importância de espaços formativos para os professores que ensinam matemática nessa etapa da Educação Básica.

Essas pesquisas me trouxeram inquietações em torno das vertentes que estão relacionados ao pensamento algébrico, um deles é o raciocínio funcional, que traz implicações relacionadas ao conceito de função, uma vez que , este raciocínio é essencial para o estudo de funções e é frequentemente utilizado para representar situações do mundo real, seja por meio de tabelas, gráficos, ou fórmulas matemáticas (Kaput, 2008; Blanton; Kaput, 2011) , que ainda era uma das dificuldades nas disciplinas da Licenciatura em Matemática.

A partir disso, resolvi me aprofundar no entendimento deste raciocínio ainda nos Anos Iniciais. Blanton e Kaput (2011) caracterizam o raciocínio funcional como um processo que envolve a criação e a generalização de padrões e relações, utilizando recursos linguísticos e representacionais para essa finalidade. Além disso, este raciocínio pode ser entendido como a capacidade de compreender e analisar como duas variáveis estão relacionadas, ou seja, como uma depende da outra.

Nesta pesquisa adotaremos o Raciocínio Funcional como um conceito, conforme o entendimento de Teixeira, Magina e Merlini (2016, p. 4) que definem o Raciocínio Funcional como "a capacidade de estabelecer a relação entre grandezas". Este raciocínio pode ser desenvolvido em contextos práticos do dia a dia, como, analisar o consumo de combustível de um veículo de acordo com a quilometragem, ou ajustar receitas culinárias com base em proporções. A respeito deste raciocínio, a BNCC propõe ideias de generalização, análise da interdependência de grandezas e variação proporcional direta entre duas grandezas (sem utilizar a regra de três) em contextos adequados a esta fase de escolaridade (Brasil, 2017).

Assim, em 2022, ainda no último semestre da graduação, decidi me inscrever na seleção do Programa de Pós-Graduação em Educação (PPGE) da UEFS, com o projeto inicial que tinha como objeto de estudo, o raciocínio funcional, e como objetivo investigar quais são os textos referentes ao pensamento funcional produzidos por professores em uma formação continuada em *Early Algebra* e de que forma eles são legitimados nesse espaço?

Ao ingressar no (PPGE) da UEFS, na linha 2: Formação de professores, currículo e prática docente, durante a disciplina: Tópicos especiais em educação matemática II, realizei leituras sobre a Matemática para o Ensino na perspectiva dos autores Brent Davis e Moshe Renert, e tive a oportunidade de conhecer o Estudo do Conceito como estratégia metodológica proposta por esses autores.

Com o aprofundamento dos estudos no grupo de pesquisa, NEEMFS, e em discussão nas orientações, percebi que as inquietações, como: De que modo os estudos recentes têm abordado o raciocínio funcional nos anos iniciais? Qual o entendimento que os professores dos anos iniciais têm sobre o raciocínio funcional? De que modo eles apresentam este conceito nos anos iniciais?

Tais questionamentos poderiam ser traduzidos em uma "Matemática para o Ensino", a partir da estrutura metodológica do Estudo do conceito apresentada por Davis e Renert (2014). A matemática para o Ensino, aqui se refere a diversidade de modos que um conceito matemático pode ser apresentado, seja por meio da publicação de periódicos, livros didáticos, ou em ambientes de formação continuada. A construção teórica desta conceituação e a estrutura metodológica do Estudo do conceito, serão apresentadas no capítulo 1, desta dissertação.

Nas orientações, pude perceber que as minhas inquietações se tratavam de maneiras de comunicação matemática, diante disso, fui apresentada, de forma aprofundada, por minha orientadora, aos pressupostos teóricos de Anna Sfard (2008), que compreende a matemática como um discurso, ou seja, como uma forma de comunicação. As lentes teóricas desta pesquisadora contribuíram para traçar o objetivo geral desta pesquisa, que tem como fim, construir uma matemática para o ensino nos anos iniciais a partir das realizações de raciocínio funcional por meio de diferentes contextos.

Para tanto, utilizamos o Estudo do Conceito como uma ferramenta investigativa, visando explorar os diversos usos do raciocínio funcional. A abordagem desse dispositivo, em conexão com as definições teóricas dos estudos da pesquisadora Anna Sfard, tornou-se um meio de análise e uma estratégia para a construção do modelo teórico.

Tendo em vista que existe uma diversidade de pesquisas relacionadas ao raciocínio funcional, traçamos o primeiro objetivo específico, construir uma matemática para o ensino a partir de pesquisas relacionadas ao raciocínio funcional.

Já o segundo objetivo específico, constitui-se em construir uma matemática para o ensino do raciocínio funcional em uma formação continuada com professores dos anos iniciais. Para isto realizamos um estudo empírico em uma formação continuada para professores dos anos iniciais, intitulada: *Álgebra para a Educação Infantil e Anos Iniciais? Mas, como?* que está vinculada a uma das ações do projeto de pesquisa "O Raciocínio Algébrico: do diagnóstico do Estudante à Formação do Professor da Educação Infantil e dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental".[2]

---

[2]O projeto, O Raciocínio Algébrico: do diagnóstico do Estudante à Formação do Professor da Educação Infantil e dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, financiado pela Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), e envolve

Ao investigar a construção do raciocínio funcional para os anos inicias do Ensino Fundamental, amplio minha compreensão sobre conceitos fundamentais da matemática, como padrões, regularidades e funções, que servem de base para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Esse processo me permite enxergar o ensino da matemática não como uma simples repetição de técnicas, mas como um campo intelectual rico, reflexivo e desafiador, o que fortalece minha identidade profissional como professora. Além disso, essa pesquisa pode contribuir com a formação continuada de outros docentes, com a elaboração de projetos pedagógicos e com a produção de materiais didáticos que favoreçam práticas mais significativas no ensino da matemática.

Esta dissertação está estruturada em cinco capítulos. O primeiro aborda o discurso matemático e a matemática para o ensino. O segundo capítulo descreve o percurso metodológico da pesquisa. No terceiro, discute-se o raciocínio funcional nos anos iniciais e as realizações do conceito em estudos correlatos. O quarto capítulo apresenta as realizações do raciocínio funcional a partir de uma formação continuada para professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Finalmente, o quinto capítulo traz as considerações finais deste estudo.

---

uma rede de pesquisadores de seis instituições, a saber: Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS), Universidade Estadual do sudoeste da Bahia (UESB), Universidade Federal do Sul da Bahia (UFSB), Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) e Universidade Estadual do Rio de Janeiro (UERJ) .

1 O DISCURSO MATEMÁTICO E A MATEMÁTICA PARA O ENSINO

Neste capítulo, apresentamos inicialmente os pressupostos teóricos da pesquisadora Anna Sfard, que compreende a matemática como um discurso, nele trazemos perspectivas deste discurso nos anos inicias do Ensino Fundamental. Em seguida, apresentamos a nossa perspectiva da matemática para o ensino enquanto modelo teórico com a estrutura do estudo do conceito.

1.1 MATEMÁTICA COMO DISCURSO NOS ANOS INICIAIS

Nesta pesquisa, teremos como aporte teórico a perspectiva de aprendizagem como forma de comunicação, apresentado por Sfard (2008) em nosso referencial teórico. Segundo a autora, podemos compreender uma base conceitual como um modo de falar. Nesta base conceitual, definirmos matemática como uma forma de comunicação, e que uma forma de comunicação é um discurso, podemos compreender a matemática como um discurso. E essa comunicação pode ocorrer de diferentes maneiras, ela pode ser falada, escrita, gestual, uma ação ou reação. A respeito disso, podemos pensar, o que comunicamos quando dispomos as carteiras de uma sala de aula em fileiras? Ou em círculo? Ou organizamos a sala de aula em pequenos grupos?

Ao compreendermos *matemática como um discurso*, entendemos que escrever ou falar sobre matemática é uma forma específica de comunicação. Podemos fazer uma analogia com um jogo de tabuleiro, se algumas pessoas estão jogando e conversando na sua língua materna e você não joga esse jogo, não compreende as regras desse jogo você não entende o discurso dos participantes deste jogo.

Ao entrarmos em uma sala de aula, como podemos saber se a aula é de matemática? Alguns itens são característicos de uma aula de matemática, como, o uso da palavra (um vocabulário específico), não só as palavras, mas a forma que são usadas; elementos de mediação, narrativas endossadas, e a realização de rotinas próprias. A caracterização das propriedades citadas, podem ser observadas no quadro 1 abaixo, conforme Sfard (2008, p. 133):

Quadro 1 – Propriedades do discurso matemático

Propriedade	Caracterização	Exemplo
Uso da palavra ou vocabulário específico	Palavras- chave que fazem parte do discurso matemático.	Numerais (um, dois, três ...), elementos geométricos (retas, poliedros, polígonos, círculo e etc.) , conceitos (equação , função , proporcionalidade e etc.).
Elementos de mediação	São artefatos simbólicos, criados especialmente para auxiliar a comunicação.	Notação algébrica (x, f(x)), operadores aritméticos (+, ±, ∑ ,÷, , √, ≤, ≠, =), gráficos, tabelas e etc.
Narrativas endossadas	Sequências de afirmações verbais ou enunciados, que queremos que os participantes da comunicação aprendam.	Definições, axiomas, teoremas e etc.
Rotinas	São padrões repetitivos do discurso matemático.	A resolução clássica de sistema de equação (isolar a incógnita); formas de comunicar uma ou mais resoluções.

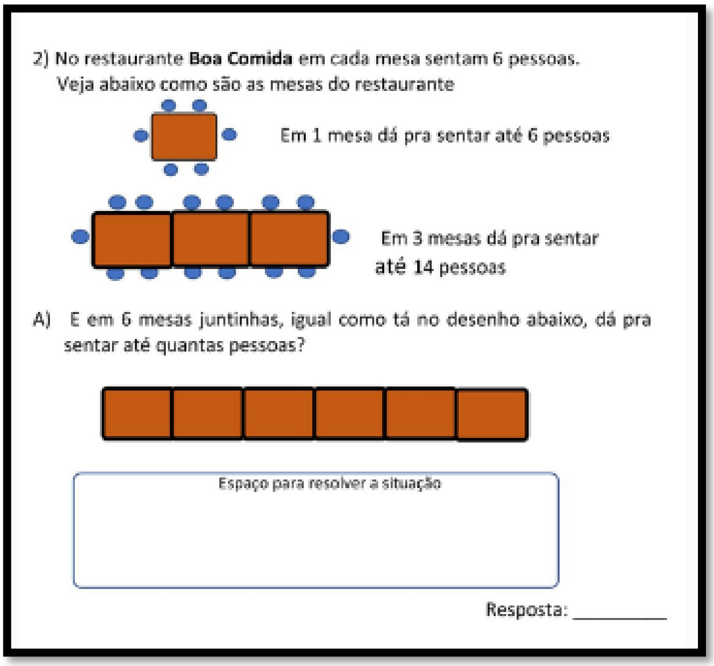
Fonte: Baseado em Sfard (2008).

Além das características elencadas, o discurso matemático é uma atividade coletiva, composta por comportamentos padronizados (Sfard, 2008). Esses padrões são interpretados por dois tipos de regras: **as regras do nível do objeto** e as regras metadiscursivas, também chamadas de **metarregras**.

As regras do nível do objeto, “são narrativas sobre regularidades no comportamento dos objetos do discurso matemático”. (Sfard, 2008, p. 201, tradução nossa). Por exemplo, uma vez que conhecemos os números naturais e suas operações, podemos compreender com facilidade sua propriedade comutativa. Então do ponto de vista algébrico, compreendemos que $ab=ba$. Observe que este discurso constituí uma narrativa, que foi endossada, ou seja legitimada entre a comunidade de matemáticos e de professores de matemática.

Já as metarregras podem ser compreendidas como a forma em que os participantes da comunicação interpretam o discurso matemático. Desse modo, essas regras são mais complexas, tendo em vista que elas são relacionadas às ações dos participantes. Observemos exemplos de metarregras, a partir de uma tarefa relacionada ao discurso funcional e da produção discursiva de dois estudantes:

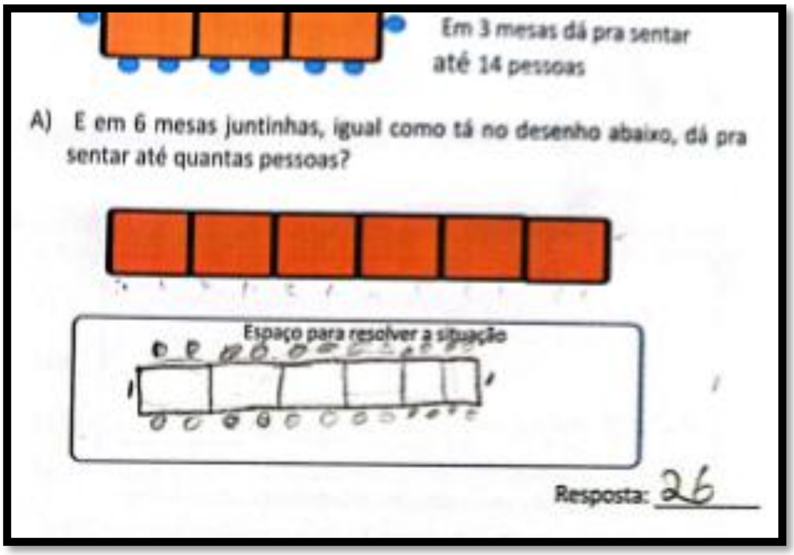
Figura 1 – Tarefa As mesas dos restaurantes



Fonte: Dados da pesquisa.

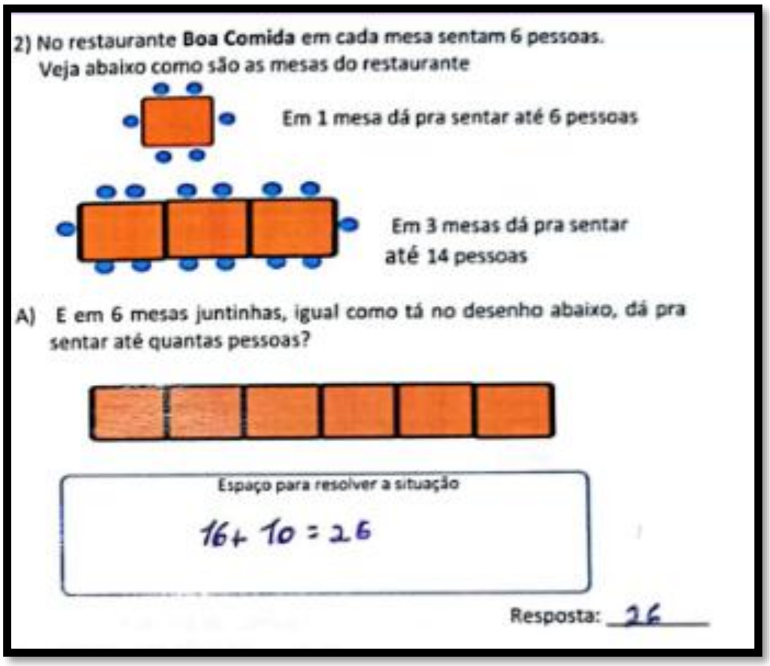
A seguir, temos a produção discursiva de dois estudantes que participaram do diagnóstico do projeto maior, em que esta pesquisa está vinculada:

Figura 2 – Produção discursiva 1



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 3 – Produção discursiva 2



Fonte: Dados da pesquisa.

Na produção discursiva 1, a metarregra associada faz referência em desenhar a quantidade de cadeiras ao redor da mesa, utilizando como ponto de partida o exemplo que foi dado. Já na produção discursiva 2, a metarregra identificada pelas professoras, seria considerar 10 como valor fixo, adicionando a quantidade de mesas do meio vezes 4. Ampliando o pensamento das professoras, então considerando n= número de assentos, x= número de mesas dos meios, a metarregra poderia ser descrita como a função que relaciona a quantidade de cadeiras e quantidade de mesas do meio: n= 10+ 4x.

Uma possível interpretação para a diferenciação entre as regras do nível objeto e as metarregras, é que as metarregras estão relacionadas a processos, ou seja, o comportamento dos objetos , enquanto as do nível objeto se restringem aos produtos dos discursantes (Ripardo, 2014). No entanto, Segundo Bernardes (2016), a distinção entre os dois tipos de regra não é absoluta e dependendo do discurso, por exemplo na narrativa "ao adicionar a mesma quantidade em ambos os lados de uma sentença, a relação de igualdade é preservada", é vista como uma metarregra da aritmética, mas na álgebra ela se transforma em uma regra do nível do objeto quando dizemos que "a + c = a + c".

Retomando ao conceito de rotina descrito anteriormente, "as *rotinas* são formas de produção discursiva peculiar ao discurso matemático" (Luna; Souza; Menduni-Bortoloti, 2017, p. 51). Ou seja, são tarefas típicas como, calcular, estimar, demonstrar entre outras. Esse discurso é regido por regras, assim podemos dizer que as rotinas podem ser consideras um conjunto de *metarregras*, que descrevem a estrutura das ações discursivas, assim podemos compreender como a forma que o conceito é interpretado pelos participantes da comunicação. (Sfard, 2008)

Cabe considerar ainda, que quando um grupo participa da comunicação, um conceito pode ser comunicado de formas distintas, compreendemos como realizações, as diferentes formas de comunicar um conceito (Sfard, 2008). Assim, o conceito pode ser sentido como sendo as realizações associadas ao nome que o designa ou pode designar. Menduni-Bortoloti (2016, p. 63) ao utilizar as regras de realização para identificar as formas de comunicar o conceito de proporcionalidade, apresenta o seguinte exemplo:

> [...] consideremos uma situação hipotética, em que se queira encontrar a altura de um poste, com dados já conhecidos, como o comprimento da sombra que ele projeta no chão, a altura de um prédio e o comprimento da sombra projetada pelo prédio. Uma das formas de resolver a situação é a partir da regra de três, em que três números são conhecidos e pede-se o quarto (Lima et al., 2006b). Vale dizer que ela é considerada uma metarregra, pois é a ação discursiva utilizada pelo participante da comunicação que descreve a rotina por ele empregada. Entretanto, para que essa forma de realizar o conceito de proporcionalidade seja aceita, é preciso que ela esteja respaldada em alguma regra de realização do conceito, isto é, em uma narrativa que fundamente o uso da regra de três. A regra de realização que fundamentou esse uso, por exemplo, foi o teorema de Tales, pois as grandezas envolvidas (altura do prédio e poste e comprimento das respectivas sombras) estão relacionadas proporcionalmente, permitindo a aplicação desse teorema.

Nesse sentido, a rotina empregada acima é respaldada por uma regra de realização. Assim, nessa pesquisa, ao construir uma matemática para o ensino do raciocínio funcional nos anos iniciais, iremos agrupar as realizações do conceito do raciocínio funcional nos anos inicias do Ensino Fundamental.

1.2 MATEMÁTICA PARA O ENSINO A PARTIR DAS DIFERENTES FORMAS DE REALIZAÇÃO E O ESTUDO DO CONCEITO

A partir da década de 1980, surgiu um interesse no campo da Educação Matemática em investigar a conceituação do conhecimento do professor. Os estudos de Shulman (1986) trouxeram contribuições importantes ao proporem a ideia de um conhecimento pedagógico do conteúdo — um tipo de saber específico que o professor desenvolve para ensinar determinado conteúdo de forma eficaz, indo além do simples domínio do conteúdo em si.

. Nesse sentido, as pesquisas de (Ball, Thames, Phelps, 2008; Davis, Renert, 2014; Barbosa, 2017), investigaram quais os conhecimentos necessários aos professores para ensinar matemática. Davis e Renert (2014), alegam que o conhecimento disciplinar dos professores de matemática, ainda não é bem compreendido, e envolve muito mais que o conteúdo de livros didáticos, em uma perspectiva de ensino que contempla todas as ações que são necessárias para dar suporte ao aprendizado dos estudantes.

Inspirados em Shulman (1986), Ball, Thames e Phelps (2008) apontam uma série de habilidades de conhecimentos necessários para o ensino de matemática, como conhecimento formal do conteúdo, conhecimento pedagógico especializado, e um tipo conhecimento de conteúdo que implica nas tarefas de ensino. Nesse sentido, o conhecimento matemático necessário para realizar as tarefas de ensino de matemática, é discutido como conhecimento matemático- tradução livre de *mathematical knowledge for teaching* - para (Ball, Thames, Phelps,2008) ou ainda matemática para o Ensino – tradução livre de *Mathematics for teaching* (Davis, Renert, 2014).

Davis e Renert (2014), ainda apontam que a definição da matemática para o ensino é uma maneira diferente de estar com o conhecimento matemático, que permite que o professor estruture situações de aprendizagem e interprete mentalmente as ações dos seus estudantes. Nesse sentido, os professores possuem uma dimensão de conhecimento especializado do conteúdo que não é necessário para engenheiros, ou até mesmo matemáticos, como por exemplo identificar as semelhanças e diferenças na resolução de um problema de aritmética dos seus estudantes.

As contribuições da matemática para o ensino de Ball, Thames e Phelps (2008), são importantes à medida que trazem uma conceituação do conhecimento matemático do professor. No entanto, se apresenta numa perspectiva cognitivista, em que existe uma série de conhecimentos e habilidades que o professor precisar "adquirir e assimilar", para desenvolver as tarefas de ensino. Davis e Renert (2014) e Barbosa (2017), se opõem a noção da matemática para o ensino proposta por Ball, Thames e Phelps (2005), por trazer uma ideia "de que o professor seria o lócus de um tal "conhecimento" (Barbosa, 2017, p. 60). Essa noção traz uma ideia de conhecimento estático, que não considera os contextos e as relações do indivíduo.

Inspirado nos estudos de Basil Bernstein, Barbosa (2017), apresenta uma abordagem discursiva para a matemática para o ensino. Ele define, inicialmente, *matemática no ensino,* "como a forma pela qual os professores comunicam os conceitos na interação pedagógica", para, posteriormente, definir *matemática para o ensino*, "como qualquer re-presentação da matemática no ensino" (2017, p. 61). O prefixo "re", no termo re-presentação, é utilizado para denotar que não se trata de um retrato da coisa em si, mas um deslocamento que implica na transformação do conteúdo da comunicação. Ainda, de acordo com o autor, o livro didático pode ser um exemplo da matemática para o ensino, já que ilustra conceitos que são utilizados por professores nas aulas de matemática.

As pesquisas de Giraldo, Rangel, Maculan (2015), Menduni-Bortoloti (2016) Santos (2017) e Oliveira (2024) propõem a matemática para o ensino como um modelo teórico para o ensino de um conteúdo matemático. Assim, como proposto por Davis, Renert (2014) ,essas pesquisas trazem as diferentes formas de comunicar um conceito matemático , como, definições formais, símbolos , aplicações ,desenhos e etc. Para ilustrar observe o exemplo da comunicação do conceito de função apresentado por Santos (2017) a partir de uma formação de professores, as diferentes formas de comunicação são organizadas em "panoramas" pela autora, a saber, Panorama tabular, panorama algébrico, panorama máquina de transformação, panorama generalização de padrões, panorama gráfico e panorama diagrama. Segundo a autora, "os panoramas do conceito de função operam como "lentes de aumento" (Santos, 2017, p. 126). De modo que revela aspectos particulares do conceito de função que pode auxiliar os professores nas tarefas de ensino.

. Para a construção de um modelo teórico para o Ensino do raciocínio funcional nos anos iniciais nos inspiraremos no modelo metodológico do Estudo do Conceito proposto por David e Renert (2014), o qual está dividido em quatro ênfases, denominadas pelos pesquisadores de *realizations, landscapes, entailments e blends*. Tais ênfases foram traduzidas no estudo de Santos (2017), a saber, realizações, panoramas, vínculos e combinações. A fim de ilustrar apresentaremos as ênfases antes de mencioná-las na metodologia.

Na primeira ênfase, realizações, utilizado por David e Renert (2014), no Estudo do Conceito, cabe salientar que o termo "realizações", foi inspirado em Sfard (2008), antes utilizava-se "significados", "interpretações" e "instanciações". Essa ênfase consiste em recolher as diferentes formas de comunicação de um conceito, que um participante da comunicação possa utilizar e conectar nos esforços para dar sentido a uma construção matemática (Sfard,2008). De acordo com Davis e Renert (2014), as realizações podem se basear em: definições formais, algoritmos, metáforas, imagens, aplicações e gestos.

No que se refere às realizações, Bruner (1996) apresentou uma estrutura para classificar diferentes representações, destacando uma sequência de transições de um conceito. Ele propôs que o entendimento de um conceito passa inicialmente por uma representação operacional (baseada na ação), seguida de uma representação icônica (baseada em imagens), e, por fim, evolui para uma representação simbólica (baseada em símbolos). Em contraste, Davis e Renert (2014) reconhecem o papel dessas representações, mas argumentam que os estudantes podem manifestar essas representações simultaneamente, sem seguir necessariamente uma categorização sequencial rígida.

Já a segunda ênfase panoramas apresentam como as realizações se relacionam entre si, tendo em vista que são agrupamentos de realizações que possuem características semelhantes. Observe o exemplo da pesquisa de Santos (2017), em que as realizações comunicavam o conceito de função como tabela:

Figura 4 – Realizações de função como tabela

Quadro 3 – Realizações de função como tabela

Parte A

Um *watt*-hora (W/h) é a medida de energia usualmente utilizada em eletrotécnica e é a quantidade de energia utilizada para alimentar uma carga de potência de um *watt* pelo período de uma hora. O valor de nossa conta de energia, depende do consumo de watts mensal. Com base nessas informações, complete a tabela abaixo:

.0,54

Consumo (W)	Valor (R$)
40	21,60
70	37,80
120	64,80
170	91,80
220	118,80
254	137,16

Fonte: Transcrição do registro da Profª Janice – 3º encontro

Parte B

Uma caneta custa 3 reais. Se representarmos por "x" o nº de canetas que queremos comprar e por "y" o preço correspondente a pagar, em reais, podemos organizar a seguinte tabela:

nº canetas	Preço a pagar
1	1 . 3 = 3
2	2 . 3 = 6
.	
.	
6	6 . 3 = 18

Fonte: Transcrição do registro da Profª Cibele – 2º encontro

Parte C

Atividade 3: Apresente uma lei de formação de uma função que satisfaça a relação descrita pela tabela a seguir.
Existem outras funções que satisfazem a relação? Por quê?

x	-1	0	1
y	-1	0	1

Adaptado de Schwarz e Dreyfus (1995)

3ª $y = x$
$y = x^p$

Sim, pois para todo p ímpar satisfaz.

Fonte: Registro do Prof. Luis Sérgio - 5º encontro

Fonte: Santos (2017, p. 116).

No exemplo na figura 4, cada registro apresenta uma realização do conceito de função. Ainda é possível observar que mesmo se tratando de exemplos diferentes, as realizações comunicam a mesma noção de função, por isso foram agrupadas constituindo um panorama.

Já a terceira ênfase, vínculos são implicações lógicas das realizações componentes de cada panorama, que acarretam em conexões, potencialidades e limitações das relações conceituais (David; Renert, 2014). Para ilustrar, utilizaremos como exemplo a vinculação relacionada ao panorama tabular apresentado por Santos (2017, p. 126).

Quadro 2 – Síntese da MpE do Conceito de Função "que" e o "como" dos seus textos

Panorama	o "que" (reconhecimento"	O "como" (realização)	Vinculações
Tabular	Relação entre dados numéricos ou não em uma tabela, no caso em que, todo elemento de uma linha(coluna) está associado a um único elemento da respectiva coluna	Organizar os dados de uma relação funcional em linhas ou colunas, de forma que os dados de entrada e os seus respectivos dados de saída estejam na mesma linha ou coluna.	-Evidenciar as noções de variação, dependência e regularidade. -Inferir incorretamente sobre o tipo de relação funcional.

Fonte: Santos (2017, p. 126).

Ao considerarmos os vínculos, no quadro 2, de acordo com Santos (2017, p. 126) esse panorama evidencia as noções de variação, dependência e regularidade. Com isso, os vínculos dizem respeito as relações que as realizações estabelecem em um mesmo panorama.

Para ilustrar um contexto relacionado ao raciocínio funcional nos anos iniciais, podemos considerar a seguinte situação: Um bombom na cantina da escola custa R$ 2,00. Quanto custa 2 bombons? Quatro bombons? E dez bombons? Como podemos fazer para encontrar o valor de qualquer quantidade de bombos que se deseje comprar? A situação trabalha com uma variação proporcional, pois, à medida que a cada bombom que se acrescenta, acrescenta-se também o valor de R$2,00 reais no valor a ser pago. Além disso, é possível observarmos vinculações, pois a situação também evidencia uma relação de dependência e variação, uma vez que o valor a ser pago depende da quantidade de bombons. Nesse sentido, teríamos a quantidade de bombons como uma variável independente, e o valor a ser pago como uma variável dependente.

Já a última ênfase, as combinações**,** são fusões de realizações que geram construtos mais abrangentes (metarrealizações) com possibilidades interpretativas mais amplas. Na pesquisa de Menduni-Bortoloti (2016), foi identificado uma combinação (traduzido pela autora como metarrealização), com o conceito de proporcionalidade.

A partir da situação apresentada em Souza e Pataro (2012d, p. 97), que "para cada quilo de queijo são necessários 10 litros de leite", foram construídas as seguintes realizações, como razão, como igualdade, relações multiplicativas no quadro, lei de formação, gráfico representado por uma reta a partir de um conjunto de pontos, pares ordenados de pontos formando uma tabela. Segundo a autora, a situação se constitui uma combinação, tendo em vista que a situação perpassa por diferentes tipos de realização.

Nesta pesquisa, utilizaremos o termo "Matemática para o Ensino", por David e Renert (2014), para designar a matemática específica para o ensino que é constituída a partir de diferentes realizações das re-presentações da matemática no ensino (Sfard, 2008; Barbosa, 2017). Tendo em vista que a matemática para o ensino se dá a partir de conceitos específicos, o conceito utilizado será o raciocínio funcional nos anos iniciais, para isso, apresentaremos no capítulo 3, as especificidades deste conceito para essa fase de escolaridade.

2 PERCURSO METODOLÓGICO DA PESQUISA

Neste capítulo, apresentamos os procedimentos metodológicos que contribuíram para a realização desta investigação. Desse modo, explicitamos os processos e meios que nos possibilitaram chegar ao nosso objetivo de estudo: *construir uma matemática para o ensino nos anos iniciais a partir das realizações do raciocínio funcional por meio de diferentes contextos.*

Dividimos o capítulo em quatro partes. Na primeira seção, discutimos a respeito da nossa escolha metodológica – a natureza da pesquisa. Na segunda seção, apresentamos o contexto e os colaboradores da investigação. Na terceira seção, explicamos, detalhadamente, todo o processo formativo e como ele ocorreu. Na quarta seção, mostramos como ocorreu a coleta de dados e como foi realizada a análise de resultados.

2.1 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Para atingir o nosso objetivo, optamos por um paradigma interpretativista (Orlikowski; Baroudi, 1991), visto que objetivamos a descrição de uma matemática para o ensino do raciocínio funcional a partir da interpretação de realizações do conceito produzidas pelas participantes da pesquisa em uma formação continuada. Além disso, optamos por abordagem qualitativa, que possibilitasse subsídios para responder à seguinte questão de pesquisa: *como acontecem as realizações de relações funcionais nos anos inicias a partir de diferentes contextos?*

Adotamos esse tipo de pesquisa, devido à flexibilidade e à potencialidade de aprofundamento na compreensão deste estudo. Nesse sentido, a pesquisadora Minayo (2001) destaca que:

> [...] a pesquisa qualitativa trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis (Minayo, 2001, p. 22).

Corroborando com essa ideia, Denzin e Lincoln (2000) afirmam que, nesse tipo de pesquisa, os pesquisadores qualitativos descrevem ambientes, pessoas, eventos e processos, com o objetivo de interpretá-los, atribuir-lhes sentido e representá-los. Para isso, faz-se necessário criatividade, e utilização de procedimentos de produção e coleta de dados, ferramentas e estratégias disponíveis (Crotty, 1998). Assim, a fim de abranger a máxima amplitude na descrição, na explicação e na compreensão do objeto em estudo, optaremos pela combinação de múltiplos procedimentos de produção e coleta de dados (Denzin; Lincoln, 2000). Considerando nosso objeto de estudo, esta investigação enquadra-se na modalidade de pesquisa empírica, em que a interpretação dos dados será construída a partir do discurso proferidos pelas professoras e complementada pela análise documental. No tópico a seguir descreveremos o universo da investigação empírica.

2.2 UNIVERSO DO ESTUDO DA INVESTIGAÇÃO EMPÍRICA

A presente investigação, de cunho qualitativo, está articulada ao projeto de pesquisa "O Raciocínio Algébrico: do diagnóstico do Estudante à Formação do Professor da Educação Infantil e dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental", financiado pela Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), e envolve uma rede de pesquisadores de seis instituições, a saber: a Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS) , Universidade Estadual do sudoeste da Bahia (UESB) , Universidade Federal do Sul da Bahia (UFSB) ,Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) e Universidade Estadual do Rio de Janeiro (UERJ).

Esse projeto está vinculado ao estudo 2, que apresenta investigações voltadas para o professor e tem como objetivo investigar as contribuições que uma formação continuada de professor, podem trazer para a apropriação e expansão dos conceitos elementares da álgebra por parte do professor-cursista. A estratégia formativa utiliza a metodologia do RePARe (Reflexão, planejamento, ação, Reflexão) , tal modelo em formato de aspiral ,começa por uma ação diagnóstica, perpassando pela reflexão, depois o planejamento e, por fim, retoma-se a ação, perfazendo uma volta completa. (Magina et al., 2018)

A pesquisa terá teve como *lócus* a formação continuada, a saber: *Álgebra para a Educação Infantil e Anos Iniciais? Mas, como?* Dessa forma, está organizada pelo Núcleo de Estudos em Educação Matemática (NEEMFS), na Universidade Estadual de Feira de Santana, de acordo com as orientações do projeto interinstitucional. O grupo de professoras que participou desta investigação é composto por professoras, que lecionavam nos anos iniciais do Ensino Fundamental, na Escola Municipal Dr. Celso Ribeiro Daltro, que participou da pesquisa interinstitucional e da respectiva formação.

O critério para a escolha das participantes foi a adesão espontânea por parte das professoras. Dessa forma, as colaboradoras deste estudo foram nove professoras, com formação em pedagogia, que estavam lecionando do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental. Na busca de atender às questões éticas da pesquisa científica, atribuímos pseudônimos às professoras participantes, preservando, assim, suas identidades. Desse modo, as participantes da pesquisa são as professoras Ana, Dani, Sol, Liz, Vanda, Olivia, Lia, Maria e Simone.

2.2.1 Formação continuada: Álgebra para a Educação Infantil e Anos Iniciais? Mas, como?

O espaço formativo, que foi o contexto desta pesquisa, intitulada: *Álgebra para a Educação Infantil e Anos Iniciais? Mas, como?* foi desenvolvida de modo presencial. Nesse sentido, a formação dividiu-se em seis encontros, cuja temáticas se referiam as vertentes do pensamento algébrico, escolhidas pelos pesquisadores das seis instituições participantes do projeto de pesquisa, O Raciocínio Algébrico: do diagnóstico do Estudante à Formação do Professor da Educação Infantil e dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, a saber, símbolos, sequencias, relação funcional e equivalência, sendo que cada um deles teve em torno de 4 horas de duração.

Os dois primeiros encontros ocorreram na UEFS, no entanto, por preferência das participantes da pesquisa, os demais encontros aconteceram na Escola Municipal Celso Ribeiro Daltro, *lócus* de trabalho das professoras participantes da pesquisa.

Cabe ressaltar que a autora da dissertação e a orientadora são membros do NEEMFS e atuaram como formadores nesse espaço formativo, a apresentação deste contexto será feita na primeira pessoa do plural. No quadro 3, temos a organização geral dos encontros.

Quadro 3 – Descrição dos encontros formativos

Formação continuada: ***Álgebra para a Educação Infantil e Anos Iniciais? Mas, como?***	
Encontro	Do que se trata
1º	Apresentação da proposta da formação e primeira elaboração das situações-problema 1, e estudo sobre símbolos
2º	Estudo sobre sequências repetitivas
3º	Estudo sobre sequências crescentes
4º	Estudo sobre relação funcional
5º	Estudo sobre equivalência
6º	Finalização da formação: análise dos livros didáticos, segunda elaboração das situações-problema e avaliação da formação.

Fonte: Produzido pelas autoras.

A seguir, descrevemos os encontros, em que foram coletados os dados da pesquisa.

2.2.1.1 Primeiro Encontro - Apresentação e discussão sobre Símbolos

Nesse encontro ocorreu o primeiro contato com as participantes e trabalhamos com a vertente de símbolos. O resumo das atividades está no quadro 4:

Quadro 4 – Descrição do primeiro encontro

Primeiro Encontro-Apresentação e discussão sobre Símbolos	
Atividade	**Ações Pedagógicas**
Apresentação.	Apresentar a proposta e o desenvolvimento da formação.
Termo de Consentimento.	Assinar o TCLE.
Diagnóstico inicial.	Elaborar três situações-problema que envolvessem conceitos algébricos.
Planejamento.	Planejar duas atividades envolvendo símbolos.

Fonte: Elaborado pelas autoras.

Este foi o contato inicial com as participantes da pesquisa, em que conversamos a respeito da proposta continuada, e apresentamos o objetivo da formação. Após as professoras participantes concordarem em participar da formação e do estudo, entregamos para elas o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), que se encontra no apêndice A, para que fosse assinado, autorizando-nos a utilizar as suas escritas, falas e fotos que, porventura, viessem a surgir antes, durante e depois do curso.

Em seguida, foi entregue às professoras participantes um instrumento diagnóstico inicial. Nesse instrumento, solicitamos que cada uma delas elaborasse três situações-problema, que envolvessem conceitos algébricos e que pudessem ser realizadas com os seus estudantes. Essa elaboração não contou com qualquer tipo de apoio ou consulta.

Posteriormente, realizamos uma discussão a respeito de símbolos, com a utilização de slides, tendo o propósito de possibilitar uma discussão acerca da importância dos símbolos na comunicação matemática, especialmente, na álgebra.

Para finalizar, as professoras se reuniram em grupos, de acordo o ano/série, para realizar o planejamento de duas atividades envolvendo símbolos, com o objetivo de desenvolver em suas salas de aula, antes do próximo encontro.

2.2.1.2 Segundo Encontro - Sequências de padrões repetitivos

O encontro foi iniciado com a socialização das narrativas das professoras a respeito das atividades desenvolvidas, em suas respectivas salas de aula, com o uso de símbolos. Além disso, fizemos a entrega das narrativas escritas realizadas pelo grupo. O resumo das atividades pode ser visualizado no quadro 5:

Quadro 5 – Descrição do segundo encontro

Segundo Encontro- Sequências Repetitivas	
Atividade	**Ações Pedagógicas**

Apresentação do relatório das atividades.	Discutir os relatórios das atividades desenvolvidas em sala com Símbolos.
Apresentação dos resultados.	Apresentar o resultado dos problemas sobre sequencias repetitivas do diagnóstico dos estudantes.
Discussão geral.	Apresentar e discutir o estudo sobre de padrões repetitivos.
Socialização de atividades.	Socializar de atividades envolvendo sequências de padrões repetitivos.
Planejamento.	Planejar duas atividades envolvendo sequências repetitivas.

Fonte: Elaborado pelas autoras.

Neste encontro, foi realizada uma abordagem inicial sobre sequências. Para isso, disponibilizamos, no grupo do *WhatsApp*, um recorte da pesquisa de (Ponte; Branco; Matos, 2009, p. 40-51)[3], para que as professoras realizassem uma leitura prévia antes do encontro formativo. Para fomentar uma discussão inicial, apresentamos questões do Diagnóstico de Sequência Repetitiva, respondidas pelos estudantes e os seus resultados em gráficos. Posteriormente, realizamos a reflexão teórica, com o uso de slides para fomentar discussão a respeito de sequência de padrões repetitivos, e a Socialização de situações com corpo, material manipulável, lápis e papel, com o grande grupo, para que todos visualizassem as possibilidades de trabalhar com a temática e pudessem contribuir na elaboração do planejamento. Nesse contexto, Vale *et al.* (2011, p. 23) argumentam que é aconselhável "proporcionar aos estudantes tarefas que lhes permitam reconhecer o motivo da repetição, descrever, completar, continuar e criar padrões, recorrendo a contextos diversificados, em que sejam incentivados a verbalizar os seus pensamentos e a justificá-los".

Por fim, as professoras se reuniram em grupos, de acordo o ano/série, para realizar o planejamento de duas atividades, envolvendo sequências repetitivas, para desenvolver em suas salas de aula, antes do próximo encontro.

2.2.1.3 Terceiro Encontro - Sequências Crescentes

O encontro foi iniciado com a socialização das narrativas das professoras a respeito das atividades desenvolvidas em suas respectivas salas de aula, com a temática do encontro anterior, sequências repetitivas, além da entrega das narrativas escritas realizadas pelo grupo. O resumo das atividades realizadas pode ser visualizado no quadro 6:

Quadro 6 – Descrição do terceiro encontro

Terceiro Encontro- Sequências Crescentes	
Atividade	**Ações Pedagógicas**

[3] PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. Álgebra no Ensino Básico. Lisboa: DGIDC, 2009. Disponível em: https://repositorio.ulisboa.pt/bitstream/10451/7105/1/Ponte-Branco-Matos%20(Brochura_Algebra)%20Set%202009.pdf

Apresentação do relatório das atividades.	Discutir os relatórios das atividades desenvolvidas em sala com sequências repetitivas.
Apresentação dos resultados.	Apresentar o resultado dos problemas sobre sequências de padrões crescentes do diagnóstico dos estudantes.
Discussão geral.	Apresentar e discutir o estudo sobre sequências de padrões crescentes a partir das questões realizadas pelos estudantes.
Oficinas com atividades.	Participar de atividades (que chamamos de espaços continentes) com corpo, material manipulável e lápis e papel envolvendo sequências crescentes.
Planejamento.	Planejar duas atividades envolvendo sequências crescentes.

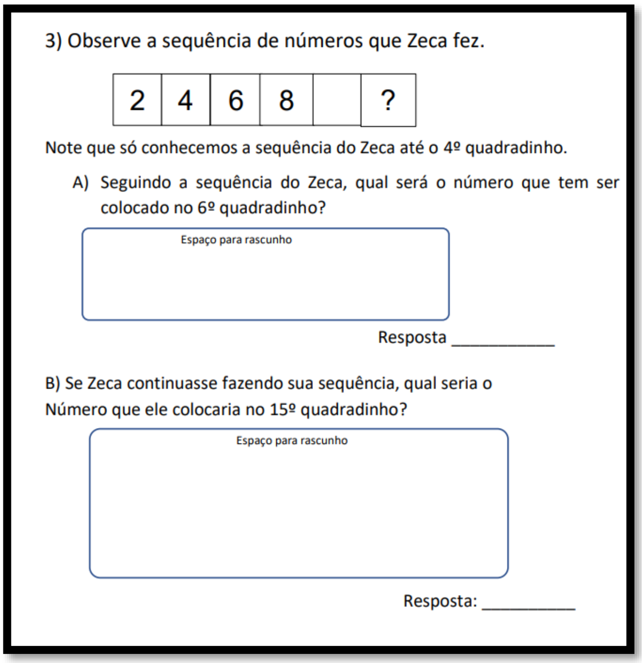
Fonte: Elaborado pelas autoras.

Inicialmente, as professoras socializaram os relatórios das atividades desenvolvidas em sala, com sequências repetitivas, colocando como se sentiram, ao realizar a atividade, e também a reação dos estudantes.

Diante disso, compreendemos que o trabalho realizado com sequências crescentes é crucial para o nosso estudo, tendo em vista que permite aos professores percorrer um caminho de compreensão da utilização das variáveis, da procura da generalização e da construção e compreensão de expressões algébricas; (Ponte; Branco; Matos, 2019). Esses elementos são considerados essenciais para a construção de uma matemática para o ensino do raciocínio funcional nos anos iniciais.

O encontro sobre sequências crescentes é posterior ao do encontro sobre sequências repetitivas. Desse modo, as professoras participantes já possuíam conhecimentos prévios, a fim da composição de uma sequência. Para iniciar a discussão da temática, apresentamos o resultado dos problemas sobre sequências crescentes do diagnóstico dos estudantes. A partir desses problemas, mobilizamos a discussão teórica da temática. A conceituação teórica sobre sequências crescentes é iniciada a partir da questão 3, que pode ser visualizada na imagem a seguir:

Figura 5 – Questões envolvendo sequência do instrumento


3) Observe a sequência de números que Zeca fez.

2	4	6	8		?

Note que só conhecemos a sequência do Zeca até o 4º quadradinho.

A) Seguindo a sequência do Zeca, qual será o número que tem ser colocado no 6º quadradinho?

Espaço para rascunho

Resposta ___________

B) Se Zeca continuasse fazendo sua sequência, qual seria o Número que ele colocaria no 15º quadradinho?

Espaço para rascunho

Resposta: __________

Fonte: Dados da pesquisa.

Posteriormente, a sala de aula foi dividida em oficinas, com cada material condicionado em espaços, denominados de *espaço continentes* (mesas, tapetes, esteiras, entre outros espaços), em que as professoras divididas em grupos vivenciaram diferentes tipos de atividade.

Após o desenvolvimento das oficinas nos seus espaços continentes, as participantes se reuniram nos grupos para desenvolver o planejamento de duas atividades sobre sequências.

2.2.1.4 Quarto Encontro - Relação Funcional

No quarto encontro, começamos com a socialização das narrativas das professoras a respeito das atividades desenvolvidas, em suas respectivas salas de aula, com sequências crescentes, além da entrega das narrativas escritas realizadas pelo grupo. A seguir, apresentamos o resumo das atividades desenvolvidas no encontro e a descrição no quadro abaixo.

Quadro 7 – Descrição do quarto encontro

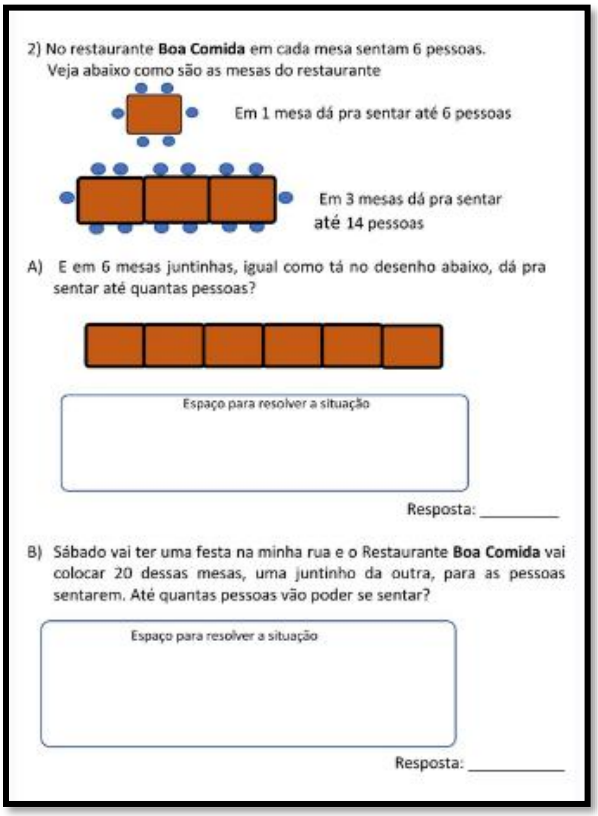
Quarto Encontro-Relação Funcional	
Atividade	**Ações Pedagógicas**
Apresentação do relatório das atividades	Discutir os relatórios das atividades desenvolvidas em sala com sequências crescentes.
Apresentação dos resultados	Apresentar o resultado dos problemas sobre raciocínio funcional do diagnóstico dos estudantes.
Análise das estratégias dos estudantes	Analisar quais estratégias os estudantes utilizaram para responder questões do diagnóstico, envolvendo relação funcional.

Socialização de atividades	Socializar situações com corpo, material manipulável e lápis e papel, com o Grande Grupo, para que todos interajam e possam contribuir na elaboração do planejamento.
Planejamento	Planejar duas atividades envolvendo sequências crescentes.

Fonte: Produzido pelas autoras.

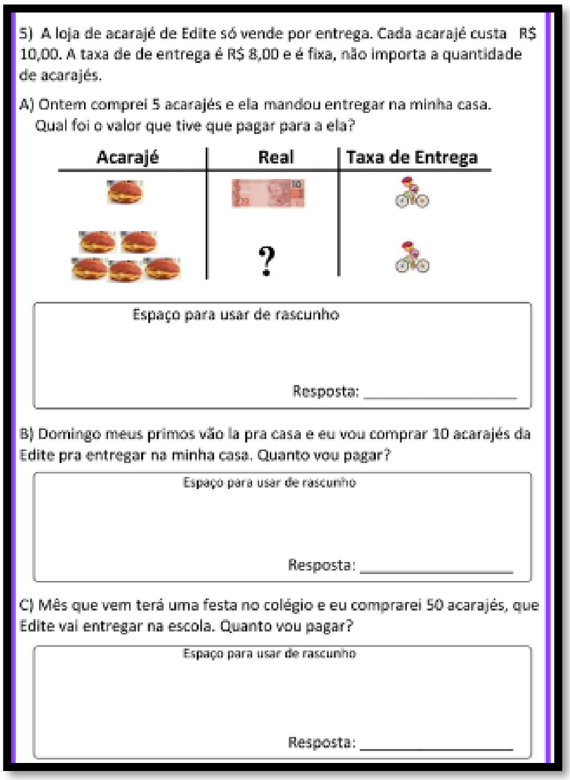
Neste encontro, foi feita a apresentação dos gráficos relacionados ao resultado do diagnóstico dos estudantes, com questões que contemplassem o raciocínio funcional. Essas questões também foram utilizadas para circunstanciar a temática. Dessa forma, tendo em vista que a temática é o foco da nossa investigação, apresentaremos essas questões aqui.

Figura 6 – Questão 2 do diagnóstico: problema das mesas



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 7 – Questão 5 do diagnóstico: A compra de acarajés



5) A loja de acarajé de Edite só vende por entrega. Cada acarajé custa R$ 10,00. A taxa de de entrega é R$ 8,00 e é fixa, não importa a quantidade de acarajés.

A) Ontem comprei 5 acarajés e ela mandou entregar na minha casa. Qual foi o valor que tive que pagar para a ela?

Acarajé	Real	Taxa de Entrega
	?	

Espaço para usar de rascunho

Resposta: ________________

B) Domingo meus primos vão la pra casa e eu vou comprar 10 acarajés da Edite pra entregar na minha casa. Quanto vou pagar?

Espaço para usar de rascunho

Resposta: ________________

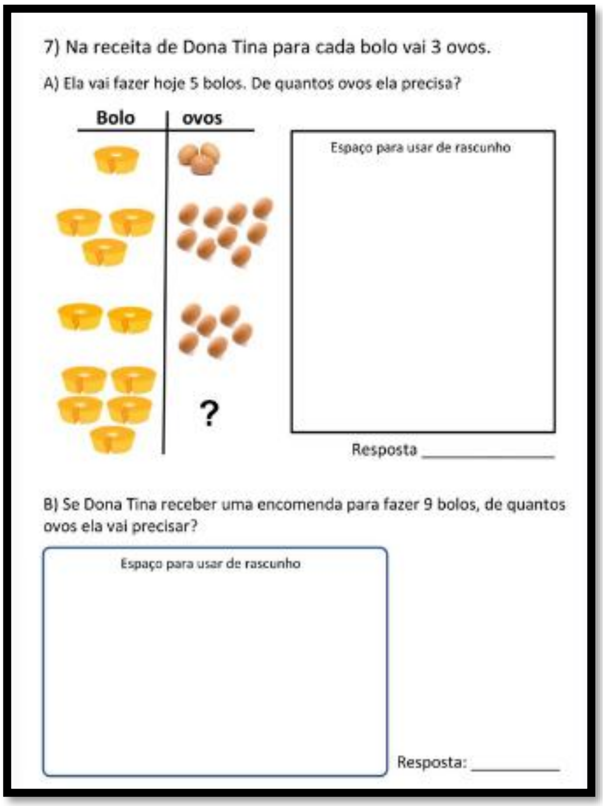
C) Mês que vem terá uma festa no colégio e eu comprarei 50 acarajés, que Edite vai entregar na escola. Quanto vou pagar?

Espaço para usar de rascunho

Resposta: ________________

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 8 – Questão 7: Quantidade de ovos em um bolo



7) Na receita de Dona Tina para cada bolo vai 3 ovos.

A) Ela vai fazer hoje 5 bolos. De quantos ovos ela precisa?

Bolo	ovos
	?

Espaço para usar de rascunho

Resposta ____________

B) Se Dona Tina receber uma encomenda para fazer 9 bolos, de quantos ovos ela vai precisar?

Espaço para usar de rascunho

Resposta: __________

Fonte: Dados da pesquisa.

As professoras foram convidadas, posteriormente, a realizarem a análise das estratégias dos estudantes ao resolverem essas questões. Nesse sentido, compreendemos que a capacidade de perceber o pensamento dos estudantes envolve mais do que apenas identificar o que está correto ou incorreto nas suas respostas. Com isso, pretendíamos analisar a capacidade de perceber o raciocínio funcional nessas atividades (Wilson; Mojica; Confrey, 2013).

Alguns estudos têm enfatizado o contributo de práticas relacionadas à capacidade de perceber os pensamentos dos aprendizes, nessas práticas de formação (Fernández; Linares; Valls, 2013, Callejo; Zapatera, 2017). Embora haja divergências nos resultados dessas pesquisas, em geral, os professores parecem ter mais dificuldades em interpretar o pensamento dos estudantes do que em identificá-lo

Em seguida, realizamos a exposição teórica com slides, a respeito do que consiste no raciocínio funcional, tendo como texto base (Blanton; Kaput, 2005, 2011). Na imagem a seguir, apresentamos um recorte do slide.

Figura 9 – Slide Relação Funcional

Fonte: Dados da pesquisa.

Em seguida, apresentamos sugestões de atividades manipuláveis e com papel e lápis, para que pudessem inspirar às professoras a realizarem os planejamentos

Após discutirem sobre as atividades sugestivas, as professoras se reuniram para, em grupos, a partir do ano/série, realizarem o planejamento de duas atividades, envolvendo a relação funcional para trabalhar antes do próximo encontro.

Os dois últimos encontros não serão apresentados, tendo em vista que os dados deste encontro não foram utilizados. Pois não contemplaram o objeto de estudo, o raciocínio funcional.

2.3 INSTRUMENTOS E PROCEDIMENTOS DE COLETA DE CADA CONTEXTO

Para esta pesquisa, analisaremos dois contextos: uma pesquisa documental, a partir de produções cientificas a respeito do raciocínio funcional e a formação de professores, anteriormente descrita. Nos dois contextos, iremos categorizar as realizações do conceito do raciocínio funcional, isto é, relacionar as realizações de forma que possamos criar um panorama amplo acerca do conceito (Goméz, 2017). Para isso, utilizaremos os pressupostos da matemática como discurso, a partir dos conceitos da teoria de Sfard (2008), nos termos descritos previamente. Desse modo, apropriamo-nos da configuração do Estudo do Conceito (EC), implementada por Davis e Renert (2014), como ferramenta analítica para organizar, estruturalmente, o modelo.

2.3.1 Primeiro contexto-Estudo a partir de estudos correlatos

Para mapear os estudos relacionados ao objeto de pesquisa utilizamos duas fontes de dados. A primeira, o banco de Teses/Dissertações da CAPES. Tal banco disponibiliza dissertações de Mestrado e teses de Doutorado defendidas no Brasil, com a finalidade de facilitar o acesso as pesquisas produzidas na esfera acadêmica. Na segunda busca realizada, utilizamos o Google Acadêmico (scholar.google.com.br). O Google Acadêmico é uma ferramenta de busca de literatura acadêmica, como artigos, teses, livros, resumos, que podem ser usadas para pesquisar uma variedade de disciplinas e fontes.

Inicialmente, para o mapeamento das dissertações e teses, utilizamos o recorte temporal de 2020 a 2024 e utilizamos e definimos descritores para iniciar as buscas, pois é a partir de palavras-chaves que o trabalho na seleção dos estudos no banco de dados eleito torna-se viável. Considerando o objetivo do nosso estudo, inicialmente utilizamos quatro descritores: “raciocínio funcional”, “pensamento funcional”, “relação funcional”, “conceito de função”. Pois estes descritores aparecem em pesquisas que abordam o raciocínio funcional. No entanto, devido ao grande número de pesquisas encontradas com o descritor “conceito de função”, acrescentamos o descritor, “anos iniciais” e “matemática para o ensino”. Já em relação ao google acadêmico, devido a grande quantidade de pesquisas encontradas para os descritores, “raciocínio funcional”, “pensamento funcional”, “relação funcional”, “conceito de função”, foram acrescentados os descritores “matemática para o ensino” e “anos iniciais. O resumo da busca é apresentado na tabela 1:

Tabela 1 – Busca de estudos correlatos

Plataforma	Termo de busca	Número de trabalhos encontrados
Capes	relação funcional	7
	raciocínio funcional	3
	pensamento funcional	5
	conceito de função	327
	“conceito de função”, “matemática para o ensino” e “anos iniciais”	2
Google acadêmico	“conceito de função”, “matemática para o ensino” e “anos iniciais”	120
	“raciocínio funcional”, “matemática para o ensino”, e “anos iniciais”	3
	“pensamento funcional”, “matemática para o ensino” e “anos iniciais”	33
	“relação funcional”, “matemática para o ensino” e “anos iniciais”	22

Fonte: Dados da pesquisa.

Após realizar a leitura dos resumos, selecionamos nove estudos que se relacionam com a pesquisa, consideramos estudos que comunicam o raciocínio funcional no contexto dos anos iniciais, em estudos que envolveram, formação continuada de professores, ou em investigações envolvendo o desenvolvimento de tarefas com estudantes nessa fase de escolaridade. O resumo das produções estará apresentado no quadro 8:

Quadro 8 – Descrição dos estudos correlatos

Titulo	Autores e ano	Tipo de pesquisa
Produção de atividades com o texto do discurso funcional algébrico na prática pedagógica: olhares atentos aos estudantes com síndrome de down	Silva e Luna (2024)	Não definida
O enfoque funcional na *early algebra* em escolas brasileiras: De onde partimos?	Magina e Molina (2023)	Empírica com estudantes dos anos inicias
Resolução de Situações Multiplicativas e o Pensamento Funcional: um estudo com estudantes do 3º e 5º ano do Ensino Fundamental de Niterói	Leite e França (2024)	Empírica com estudantes dos anos inicias

O Ensino Híbrido Na Formação Continuada E A Recontextualização Pedagógica Dos Textos Produzidos Por Professores Dos Anos Iniciais Em Early Algebra: Um Enfoque Na Relação Funcional	Souza (2020)	Empírica com professores dos anos iniciais
Mediaciones Realizadas A Estudiantes De Segundo De Primaria En Una Tarea De Generalización	Narváez e Cañadas (2023)	Empírica com estudantes dos anos iniciais
O raciocínio funcional apresentado por alunos do 4º e do 6º anos do ensino fundamental: um estudo diagnóstico	Santana (2024)	Empírica com estudantes do Ensino Fundamental
Pensamiento funcional de estudiantes de tercero de primaria: un estudio bajo el enfoque del early algebr	Centella (2023)	Empírica com estudantes dos anos iniciais
Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra	Pinto e Cañadas (2021)	Empírica com estudantes dos anos iniciais.
Pensamiento funcional de estudiantes de 2º de primaria: estructuras y representaciones	Torres e Cañadas (2021)	Empírica com estudantes dos anos iniciais.

Fonte: Dados da pesquisa

2.3.2 Segundo contexto-Estudo a partir de uma formação continuada com professores dos anos iniciais

Para desenvolvê-lo, elegemos como fonte, para produzir os dados, a discussão de um grupo de professores dos anos iniciais, durante a formação continuada, especificamente referida ao ensino do raciocínio funcional, assim como o material produzido pelas professoras durante a formação

No quadro 9 a seguir, apresentamos os instrumentos que foram utilizados para a produção de dados.

Quadro 9 – Instrumentos para a produção de dados

Instrumento	Finalidade
Diário de bordo	Apresentar as observações que foram feitas pelos pesquisadores durante o processo formativo.
Gravação de áudio e vídeo-gravação	Registrar os depoimentos e reflexões das professoras participantes durante o processo formativo.
Análise das estratégias dos estudantes na resolução de tarefas envolvendo sequências crescentes e padrões	Identificar a realização do conceito de função na análise realizada pelas professoras.
Planejamento de atividades	Identificar realizações do raciocínio funcional no planejamento de atividades envolvendo padrões de sequência e raciocínio funcional

Relatório de atividades	Identificar realizações do raciocínio funcional no relatório de atividades envolvendo padrões de sequência e raciocínio funcional

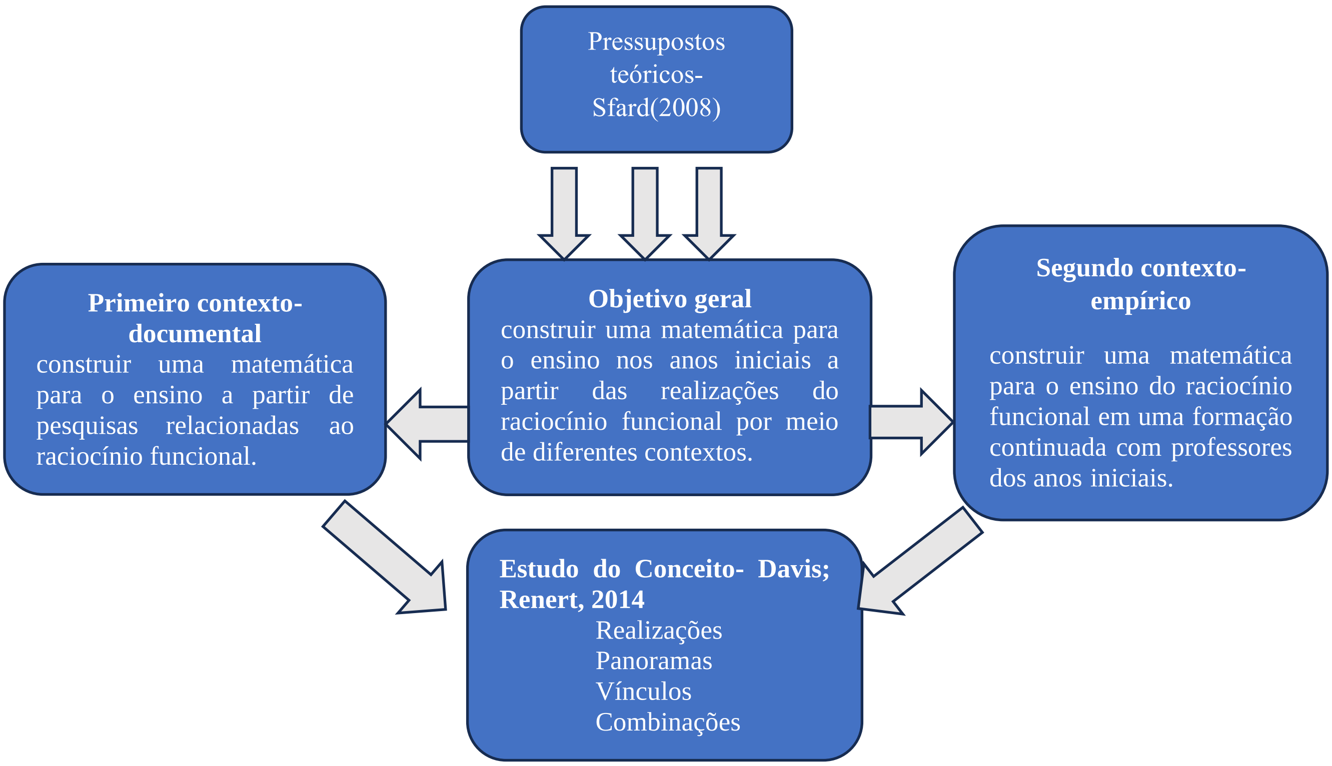
Fonte: Dados da pesquisa

Após cada encontro formativo, os materiais produzidos eram separados e documentados, juntamente com as transcrições dos encontros formativos, a fim de capturar a maior diversidade de comunicações do raciocínio funcional no contexto dos anos iniciais.

2.4 ANÁLISE DE DADOS

Para a análise dos dados, utilizamos os pressupostos teóricos da pesquisadora Anna Sfard, que compreende a matemática como discurso, juntamente com a estrutura metodológica do Estudo do Conceito (EC). Para isso, inspiramo-nos nas categorias ou ênfases propostas por Davis e Renert (2014). Originalmente, o EC é uma estrutura de investigação coletiva, com um grupo de professores, que tem como objetivo auxiliá-los na análise, compreensão e construção de um conceito matemático, apoiando-os no desenvolvimento da Matemática para o Ensino. No entanto, assim como nas pesquisas de Santos (2017), Menduni-Bortoloti (2016), Gómez (2017), nesta pesquisa, apoiar-nos-emos, simultaneamente, no EC como um instrumento de análise dos estudos correlatos e da investigação com o grupo de professores na formação continuada (Davis; Renert, 2014). A análise se deu, conforme a configuração metodológica apresentada na figura 10:

Figura 10 – Configuração metodológica



Fonte: Elaboração própria

A primeira ênfase do EC se refere às realizações dos participantes da comunicação. As realizações são produzidas por meio de rotinas, que se fundamentam em regras de realização do conceito, ao passo que as metarregras descrevem as rotinas, ou seja, as ações, dos participantes, ao comunicarem um conceito (Menduni-Bortoloti, 2016). À medida que as analisamos conforme rotinas se aproximam, temos a segunda ênfase, panoramas, produzidos segundo as regras de realização que os fundamentam e as metarregras que os descrevem. Já os vínculos, que formam a terceira ênfase, são gerados entre a realização e a rotina e, observando-as mais de perto, com inspiração em Goméz (2017), a ênfase, será configurada a partir das relações que cada realização do raciocínio funcional possui com conceitos matemático (definições, conceitos e rotinas, etc. Em cada. Embora não tenha sido identificada nesta pesquisa, a ênfase combinações é comunicada como uma realização mais abrangente porque perpassa os cenários, relacionando-os por meio de realizações.

2.5 ASPECTOS ÉTICOS DA PESQUISA

A estruturação desta pesquisa atende aos critérios estabelecidos pelo comitê de ética, para o desenvolvimento de pesquisas com seres humanos, não que se refere aos métodos e instrumentos utilizados para a produção de dados da presente pesquisa. A sua concretização ocorreu mediante a compreensão dos objetivos da pesquisa, manifestação de consentimento e a preservação da identidade de todos os participantes envolvidos, assegurados pelo Termo de Consentimento Livre e esclarecido – TCLE. Além disso, pesquisa foi submetida e aprovada na Plataforma a Brasil, e cumpriu as exigências do comitê de ética CEP/UEFS, com o número de aprovação 75591123.0.0000.0053.

3 ESTUDOS SOBRE O RACIOCINIO FUNCIONAL E AS REALIZAÇÕES EM ESTUDOS CORRELATOS

Neste capitulo apresentaremos as realizações do raciocínio funcional nos anos iniciais, a partir de estudos correlatos. Para tanto, inicialmente apresentaremos os aspectos deste raciocínio nesta fase de escolaridade, para posteriormente apresentar as realizações do conceito identificas e agrupadas em panoramas.

3.1 O RACIOCÍNIO FUNCIONAL NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

A partir da publicação da primeira versão da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), publicada em 2017, os currículos escolares passaram por uma série de mudanças para atender as orientações desse documento, uma delas foi a unidade temática de álgebra que passou a ser apresentada desde a primeira etapa do ensino fundamental (Brasil, 2017). Nesse sentido, o desenvolvimento do raciocínio algébrico deve acontecer já nos primeiros anos de escolaridade.

O raciocínio funcional é um tipo de raciocínio algébrico, sendo apresentado como das vertentes relacionada ao desenvolvimento do pensamento algébrico por Ponte, Branco e Matos (2009). No que se refere ao desenvolvimento deste raciocínio nos anos iniciais, a BNCC propõe ideias de generalização, análise da interdependência de grandezas e variação proporcional direta entre duas grandezas (sem utilizar a regra de três) em contextos adequados a esta fase de escolaridade (Brasil, 2017).

No entanto, anteriormente estudos como os de Blanton e Kaput (2005), Schliemann, Carraher, & Brizuela, Canavarro (2007); Ponte; Branco; Matos (2009) já indicavam a realização de atividades com o raciocínio funcional desde os primeiros anos de escolaridade, bem como a caracterização e as ideias relacionadas a este raciocínio.

Neste estudo, entendemos como raciocínio funcional a capacidade de estabelecer a relação entre grandezas. De acordo com Blanton (2008, p. 5), ele "procura regularidades em como as grandezas variam em relação uma à outra. Uma função é um modo de expressar essa variação". Neste sentido, as ideias de função serão o centro do raciocínio funcional, conforme Mestre (2014):

> Uma função é uma afirmação matemática que descreve como duas (ou mais) quantidades variam na relação entre elas. Essa relação pode ser muito simples ou mais complexa e pode ser descrita por palavras ou por símbolos matemáticos e expressa através de representações como gráficos ou tabelas (Mestre, 2014, p 71).

No entanto, não se trata de discutirmos a definição formal de função nos Anos Inicias do Ensino Fundamental, mas noções que estão relacionadas a este raciocínio e ~~com~~ formas de representação adequadas a esta fase de escolaridade. Ao considerar ideias relacionadas ao raciocínio funcional, Canavarro (2007, p. 90) afirma que este se dá na descrição de regularidades, de modo a "comparar diferentes expressões relativas à mesma regularidade ou para determinar valores particulares de uma função motivada, por exemplo, pela necessidade de previsão".

Nesse sentido, podemos propor contextos como, descobrir a quantidade de dias que são necessários para correr 15 quilômetros, tendo em vista que uma pessoa corre 3 quilômetros todos os dias. A respeito da maneira em que deve ser representadas esse tipo de generalização, Kaput (2008), assim como, Radford (2014) atestam que ela pode ser representada por gestos, linguagem escrita, falada ou outras representações semióticas.

Além disso, no que se refere ao raciocínio funcional, Blanton e Kaput (2005), elencam diversos exemplos de aspectos, como:

- Simbolizar quantidades e operar com as operações simbólicas;
- Representar dados graficamente;
- Descobrir relações funcionais;
- Prever resultados desconhecidos, usando dados conhecidos;
- Identificar e descobrir padrões algébricos e geométricos.

É possível também que o raciocínio funcional seja desenvolvido a partir da apresentação de situações que estejam relacionadas às operações básicas e à proporcionalidade, pois desde cedo é possível fazer menção à relação funcional, derivando de outros conceitos (Ponte; Branco; Matos, 2009). Já no que se refere às estratégias que podem ser utilizadas, Gomés (2017) sugere que é possível trabalhar com relação funcional através da construção de diagramas ou tabelas e do uso do plano cartesiano para relacionar as quantidades. Abaixo, segue o quadro 10, o qual demonstra o exemplo que aborda a relação funcional como uma proporcionalidade, valendo-se como estratégia da utilização da tabela.

Quadro 10 – Exemplo de relação funcional

Número de cachorros	Número de patas
1	4
2	8
3	?

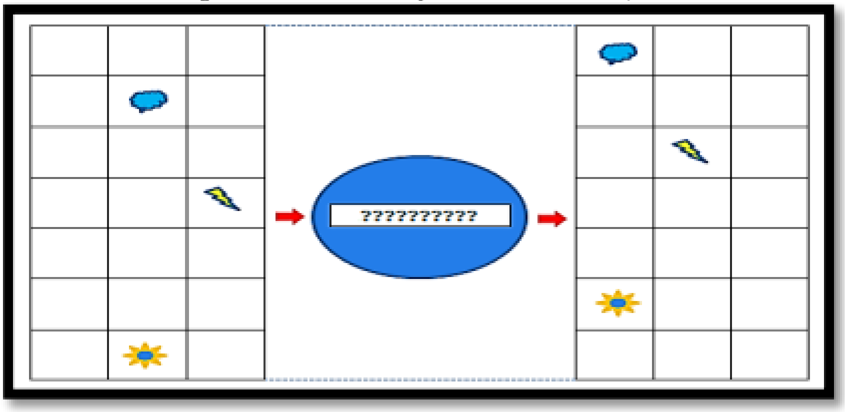
Fonte: Almeida e Luna (2024, p. 5).

Podemos observar na situação no quadro 10, uma relação de proporcionalidade, nesse caso, o número de cachorros aumenta de 1 em 1, enquanto o número de patas aumenta de 4 e em 4. Assim, é possível analisar uma correspondência entre duas variáveis (número de cachorros e quantidade de patas) que, neste caso, apresenta uma variação quatro vezes mais. De acordo com Magina e Porto (2018), o raciocínio funcional surge quando buscamos a generalização, podemos compreender a situação, como uma estrutura multiplicativa que pode ser descrita por meio da função linear y= 4x, que apresenta uma relação de dependência entre o número de patas, chamado de y, e o número de cachorros descrito como x. Outra possibilidade seria fazer a relação inversa "se tivermos 12 patas qual é o número de cachorros?".

Vieira, Magina e Luna (2021, p. 6) destacam que, para o desenvolvimento do raciocínio funcional, é necessário "promover um ambiente em que as crianças possam explorar, modelar o mundo a sua volta, participar das ações propostas e construir de forma autônoma novos conhecimentos." Os estudantes podem utilizar este raciocínio em diversas situações, como descobrir o padrão da relação entre a quantidade de pães comprados e o valor a ser pago ou descobrir o valor do aluguel de uma fantasia para uma festa da escola, considerando que se paga uma taxa fixa de R$ 10,00 acrescido de um valor de R$ 7,00 por dia que o estudante ficar com o produto, estabelecendo a relação entre a quantidade de dias e o valor a ser pago , a lei de recorrência desta função pode ser descrita como y= 10 + 7x , em que se relaciona uma quantidade de dias x , com o valor a ser pago pelo empréstimo , denotado por y.

Além disso, é importante destacar que as atividades não precisam estar vinculadas apenas representações numéricas ou com incógnitas e variáveis, podem envolver outras formas de representações por meio de desenhos, movimentos, entre outras. Podemos observar uma dessas representações na tarefa proposta por Souza e Carneiro (2021):

Figura 11 – tarefa máquina de transformação

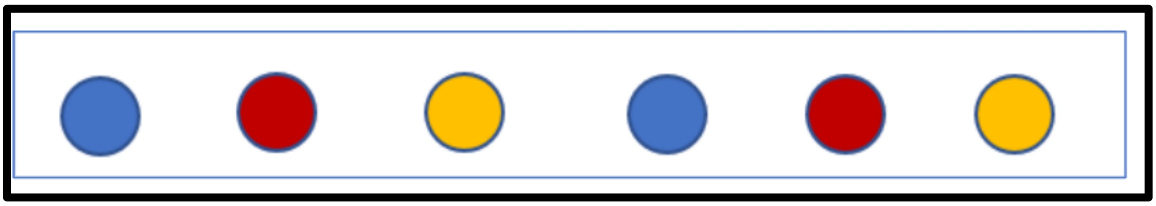


Fonte: Souza e Carneiro (2021).

A tarefa intitulada “máquina de transformação”, tem como objetivo identificar o que acontece com as figuras do “sol”,” raio” e “nuvem”, ao passarem pela máquina de transformação. Note que mesmo de maneira implícita, a máquina de transformação atua como uma lei de recorrência de uma função, tendo em vista que os elementos que entram, que nesse caso seriam os ícones são operados por uma lei que faz com que estes elementos se desloquem uma unidade para cima, e depois uma casa para a esquerda.

No que se refere a construção do raciocínio funcional por meio da generalização de padrões, este raciocínio pode se apresentar em sequência repetitivas e crescentes. Na situação, apresentada por Silva e Magina (2024), na qual envolve uma sequência de padrões repetitiva icônica com três elementos, ao descobrir sua lei de formação conseguimos descobrir qual é a cor da bolinha em qualquer posição hipotética. Conforme a figura 12:

Figura 12 – Sequência de padrões repetitiva icônica com três elementos

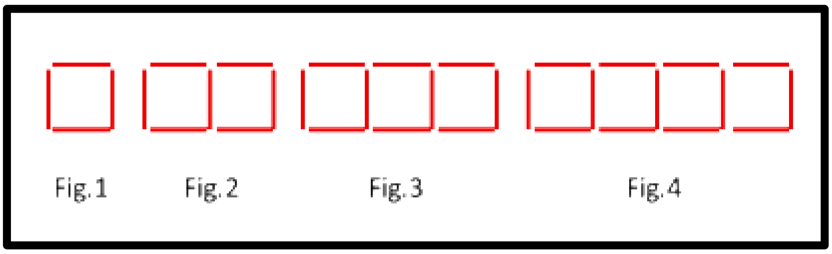


Fonte: Silva e Magina (2024, p. 3).

Nesta situação é possível inferir situações do tipo: Qual é cor da bolinha na posição 33? E na posição 37? E na 41? Com se trata de uma sequência de padrões repetitiva é de três elementos e na terceira posição está a bolinha amarela. Desse modo, o elemento de toda posição que for múltipla de três será a bolinha de cor amarela, que é o caso da posição 33, e trata-se de uma função linear do tipo $f(x) = 3x$. Para descobrir qual seria o elemento de uma posição não múltipla de três, que é o caso da posição 37 e 41, basta dividir também por três e observar o resto. Se fosse uma divisão com o resto 1, a bolinha será azul e com o resto 2 será Vermelha. Nesses dois casos, a função representada será a Afim, $g(x) = 3x - 2$e $h(x) = 3x - 1$, respectivamente (Silva; Magina, 2024).

Já a tarefa apresentada por Vale e Barbosa (2019), podemos examinar este raciocínio na construção de uma sequência crescente com palitos, conforme a figura 13.

Figura 13 – Sequência de quadrados com palitos



Fonte: Vale e Barbosa (2019, p. 406).

Nesta tarefa apresentada pelas autoras, é solicitado que os estudantes descubram a quantidade de palitos necessários para montar a próxima figura. Um dos estudantes utilizou a seguinte estratégia, começou por desenhar duas filas paralelas com 5 palitos cada e depois desenhou 6 palitos na vertical, fechando os 5 quadrados do 5.º termo da sequência. Na construção do 6.º termo recorreu ao mesmo processo. A partir desta construção descobriu, a partir de um raciocínio funcional, a expressão geral que relaciona o número de palitos com o número da figura e com o modo que utilizou na construção, obtendo a expressão 2x5+6. Mesmo sem utilizar a ideia de variável, ele conseguiu conjecturar um modo de encontrar o número de palitos necessários para a construção da figura em qualquer posição. A partir disso, conjeturou de imediato a expressão geral 2xn + (n+1), que pode ser resumida para 3n + 1 (Vale; Barbosa, 2019).

Desse modo, o exemplo mencionado reafirma que o raciocínio funcional integra sequências, na construção de generalizações e relações, usando diferentes representações e generalizações. Nesse sentido, destaca-se a importância de que o professor se atente a identificar, e incentivar diversas maneiras de estabelecer essas generalizações, realizando perguntas do tipo: O número de palitos depende de quê? Qual o padrão de crescimento observado? Consegue descrever de outra maneira o que você pensou?

Desse modo, o raciocínio funcional integra as situações relacionadas a identificar, interpretar e estabelecer relações entre variáveis, compreender padrões e construir generalizações. Esse tipo de raciocínio é a base para o entendimento das funções, um dos pilares da matemática nos anos posteriores. Souza (2020) afirma que o objetivo não é que os estudantes dos anos iniciais do ensino fundamental já compreendam o conceito e a definição de função, mas possam compreender algumas relações que estejam ligadas a este raciocínio.

3.2 PANORAMAS PARA A REALIZAÇÃO DO RACIOCÍNIO FUNCIONAL

Nesta seção agrupamos as realizações do raciocínio funcional no contexto dos anos iniciais, em três panoramas, a saber, raciocínio funcional como proporcionalidade, como generalização de padrões e como máquina de funções**.** Nesse sentido, cabe lembrar que consideramos por realizações, o conceito comunicado, neste caso, a comunicação estrita do raciocínio funcional (Sfard, 2008). Para facilitar a visualização as realizações do conceito serão destacadas em negrito.

3.2.1 Primeiro panorama- raciocínio funcional como proporcionalidade

Para Magina e Molina (2023, p. 5) "Uma situação proporcional é modelada por uma função tipo $f(x) = ax$". Essa narrativa comunica o comportamento do raciocínio funcional, uma vez que, de acordo com Blanton (2008), uma função é uma maneira de expressar o raciocínio funcional. Nesse sentido, compreenderemos esse tipo de regra, como regra de realização (Sfard, 2008).

Magina e Molina (2023), Souza (2020), Silva e Luna (2024), Santana (2024), Leite e França (2024), apresentam o raciocínio em situações de proporcionalidade simples. Uma das formas de identificar a realização do conceito foi a **variação proporcional**. Tomemos como exemplo, uma situação apresentada por Souza (2020): Maria esta curiosa para saber quanto recebe por mês. Se Maria recebe R$50,00 por dia, quanto ela receberá em um mês?

Observemos que no exemplo apresentado no parágrafo anterior, ao calcular o valor a ser pago por dois, três, quatro dias de trabalho, e assim por diante, existe uma regra que expressa a relação entre a quantidade de dias trabalhados e o valor a ser pagos, as regras que descrevem as ações discursivas são chamadas de metarregras (Sfard, 2008). Neste exemplo, a metarregra seria multiplicar 50 pela quantidade de dias trabalhados.

Ainda é possível observamos que valor a ser recebido no final do mês $f(x)$, varia a depender da quantidade de dias trabalhados (x), tal situação pode ser definida algebricamente por uma função linear $f(x) = 50x$. Os valores de x que se refere a quantidade de dias trabalhados, é o que chamamos de domínio da função, que se refere ao conjunto numérico a qual pertence os valores de x, nesse caso o conjunto IN. Já os valores de $f(x)$, o valor recebido pela quantidade de dias trabalhados é chamado de contradomínio da função, que também pertence ao conjunto IN. Desse modo, a regra que fundamenta a realização do conceito é a função linear.

Outra realização do conceito como **variação proporcional** é apresentado por Leite e França (2024): O preço de um acarajé custa 10 reais. Quanto pagarei por 5 acarajés? E por 10? E por 50 acarajés? Uma situação em que é possível relacionar os pares correspondentes das variáveis dependentes e independentes existe uma relação de correspondência (Magina; Molina,2023), essa relação pode ser expressa na figura 14:

Figura 14 – Correspondência entre quantidade de acarajés e valor a ser pago

Cálculo Relacional

Acarajé	Valor Final
1	10
5	?
10	?
50	?

Fonte: As autoras (2024).

Fonte: Leite e França (2024, p. 4).

O raciocínio funcional é expresso por uma relação proporcional, à medida que aumenta o número de acarajés a serem comprados, também aumentará o valor a ser pago. Para as autoras, para solucionar a questão, o estudante poderá buscar identificar a razão da comparação multiplicativa, que no exemplo é uma razão (×10). Ou seja, a metarregra que descreve tal ação discursiva seria multiplicar a quantidade de acarajés pelo valor unitário. Este exemplo, expressa o raciocínio funcional por meio da função f(x) = 10.x, em que x é a quantidade de acarajés, chamada variável independente e f(x), o valor a ser pago, também chamada de y, que é a varável dependente.

No entanto, existem algumas realizações do raciocínio funcional como variação proporcional, em as metarregras que descrevem a ação não são explicitas, observemos o exemplo de Magina e Molina (2023): se com dois reais se compram três bombons, quantos bombons se compram com 10 reais? estabelecendo a relação com a metade do valor, com um real compra-se 1,5 bombons. Existe uma variação entre o dinheiro que se tem e a quantidade de bombons que é possível comprar. Neste caso, uma a metarregra que seria possível descrever qualquer quantidade de bombons, seria considerar 1,5 bombons a cada real. Essa relação pode ser expressa por uma função linear dada por f(x)=1,5x, em que f(x) é a quantidade de bombons e x o valor em dinheiro. Além disso, é importante considerar que nesta relação existe um nível de complexidade tendo em vista que nesta relação de correspondência aparece um valor racional.

Dessa forma, observa-se que desde o raciocínio funcional pode ser comunicado como proporcionalidade, derivando-se de outros conceitos, como é o caso das operações básicas (Ponte; Branco; Matos, 2009). Nos dois primeiros exemplos, a relação é direta entre as variáveis que evidenciam uma função linear simples. Já no terceiro exemplo, a relação entre o dinheiro e a quantidade de bombons envolve um coeficiente racional, tornando a estrutura da função mais complexa.

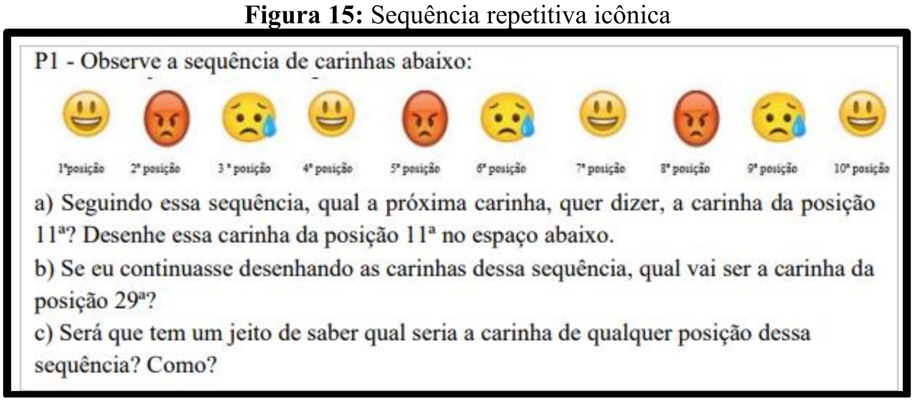
Diante do que foi apresentado, raciocínio funcional pode ser apresentado como proporcionalidade por meio da variação proporcional. A regra de realização que fundamentou a realização do conceito foi a função linear.

3.2.2 Segundo panorama- raciocínio funcional como generalização de padrões

Existem diversas maneiras de realizar o raciocínio funcional como generalização de padrões no contexto dos anos iniciais do Ensino fundamental, uma delas é apresentada por Santana (2024, p. 35) baseado em Blanton e Kaput (2005) que compreende o raciocínio funcional como sendo: “um procedimento utilizado para construir e generalizar relações e padrões, por meio de ferramentas linguísticas e representacionais”. Esta narrativa descreve o comportamento do raciocínio funcional, desse modo compreendemos esta narrativa como uma forma de realização do conceito (Sfard, 2008), tendo em vista que o compreende como uma estratégia para generalizar padrões.

As pesquisas de Souza (2020), Narváez e Cañadas (2023), Centella (2023), Torres e Cañadas (2021), Pinto e Cañadas (2021) comunicam o raciocínio funcional como uma generalização de padrões. Estas generalizações podem ocorrer por meio da construção e generalização de padrões em sequencias, sejam elas repetitivas ou crescentes. observemos o problema apresentado por Santana (2024), envolvendo uma sequência repetitiva icônica:

Figura 15: Sequência repetitiva icônica


P1 - Observe a sequência de carinhas abaixo:

1ªposição 2ª posição 3ª posição 4ª posição 5ª posição 6ª posição 7ª posição 8ª posição 9ª posição 10ª posição

a) Seguindo essa sequência, qual a próxima carinha, quer dizer, a carinha da posição 11ª? Desenhe essa carinha da posição 11ª no espaço abaixo.

b) Se eu continuasse desenhando as carinhas dessa sequência, qual vai ser a carinha da posição 29ª?

c) Será que tem um jeito de saber qual seria a carinha de qualquer posição dessa sequência? Como?

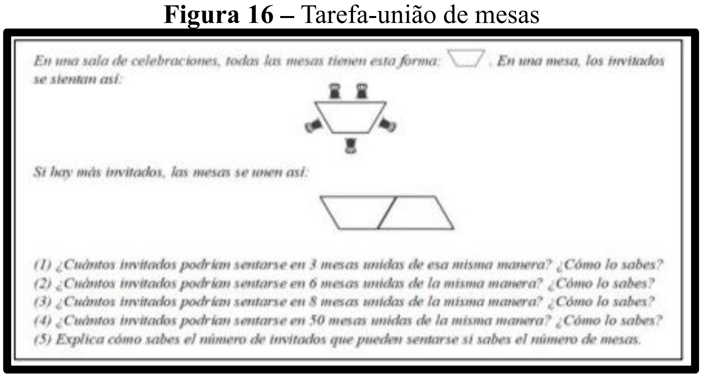
Fonte: Santana (2024, p. 2024).

Esta tarefa, é semelhante a que é apresentada por Silva e Magina (2024), utilizando uma sequência icônica com cores . Neste caso, o objetivo é que os estudantes dessem continuidade a sequência no item *a*, e a generalização no item *b* e *c*, estes domínios mobilizam o raciocínio funcional (Blanton; Kaput, 2005). Este objetivo pode ser alcançado se os estudantes observarem o padrão de repetição dos três *emojis* que formam a sequência. Encontrar o padrão de repetição de cada *emoji* se constitui uma metarregra.

Para Pinto e Cañadas (2021), a função é um conteúdo matemático que descreve uma generalização. Uma das possíveis realizações do conceito é a **divisão**. Notemos que neste problema que, para o *emoji* “triste” a posição ocupada será apenas por fatores múltiplos de 3, desse modo cada posição em que o resto da divisão por três for zero, teremos o *emoji* “triste”, este padrão pode ser comunicado por uma função afim linear, $F(x)=3x$. Já para o *emoji* “raiva”, basta observar que serão as posições em que o resto da divisão por 3 será igual a 2, função $g(x) = 3x - 2$. Já para o *emoji* “feliz”, ele ocuparia as posições em que o resto da divisão por 3 seria 1, o padrão pode ser representado por $h(x) = 3x - 1$. As funções apresentadas estão definidas com domínio e contradomínio pertencentes ao conjunto IN. A metarregra que descreve as ações discursivas seria observar o resto da divisão. A regra de realização que fundamentaria as metarregras seria a o teorema da divisão euclidiana.

Outro problema envolvendo generalização de padrões é proposto por Centella (2023), a atividade tinha como objetivo que os estudantes buscassem uma generalização da quantidade de pessoas que podem se sentar, ao juntar mesas em um espaço de festas. Conforme a figura abaixo:

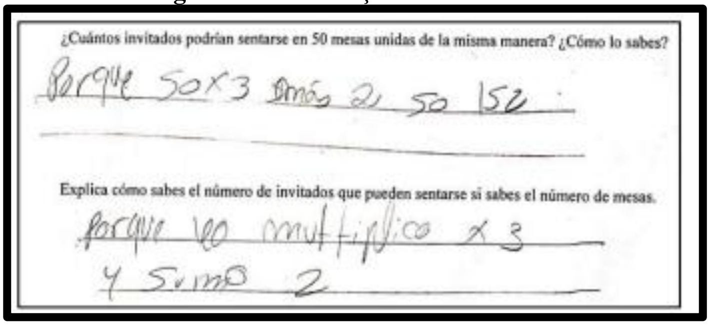
Figura 16 – Tarefa-união de mesas



Fonte: Centella (2023, p. 1283).

Nos itens 1, 2 e 3, a tarefa mobiliza uma generalização próxima, tendo em vista que os estudantes têm a possibilidade de encontrar a quantidade de pessoas que sentam em 3, 6 e 8 mesas por meio do registro pictórico. Para Vale (2013), a generalização próxima ajuda no processo de generalização distante, que é o que solicitada no item 4, e também a estabelecer uma lei que exprima este padrão, solicitada no item 5. Observemos a resolução de um estudante dos itens 4 e 5 da tarefa:

Figura 17 – Resolução do estudante-Itens 4 e 5



¿Cuántos invitados podrían sentarse en 50 mesas unidas de la misma manera? ¿Cómo lo sabes?

Porque 50x3 más 2 so 152

Explica cómo sabes el número de invitados que pueden sentarse si sabes el número de mesas.

porque lo multiplico x 3
y sumo 2

Fonte: Centella (2023, p. 1289).

A resolução da estudante se constitui como uma realização do conceito como **generalização aritmética**, uma vez que o procedimento utilizado utiliza a multiplicação e adição. No desenvolvimento de tarefas envolvendo o raciocínio funcional são predominantes a representação pictórica e a linguagem verbal (Torres; Cañadas, 2022). Neste caso, a narrativa do estudante indica uma generalização através de uma relação de correspondência entre a quantidade de mesas e quantidade de pessoas que se sentam, que pode ser traduzida em uma função afim, $f(x)= 3x + 2$, em que x é o número de mesas, a variável independente e $f(x)=$ ao número de pessoas que podem se sentar. Desse modo, a realização do conceito é fundamentada em uma função afim. Outro problema semelhante envolvendo a relação entre a quantidade de mesas e quantidade de assentos, foi apresentada por Magina e Molina (2023), em ambos estudos, este contexto baseado em uma situação corriqueira do cotidiano propiciou a comunicação do raciocínio funcional com estudantes dos anos iniciais.

Neste panorama, o raciocínio funcional foi comunicado como como divisão e como generalização aritmética. A realização como divisão foi fundamentada na divisão euclidiana. Já a realização como generalização aritmética é fundamentada por uma função afim.

3.2.3 Terceiro panorama- Raciocínio funcional como máquina de funções

Para Narváez e Cañadas (2023, p. 244), uma máquina de funções "É uma máquina onde a variável dependente é o número de bolas que entram em uma máquina e a variável independente é número de bolas que saem". Podemos considerar a narrativa como uma metarregra (Sfard, 2008), uma vez que a metáfora utilizada, pois comunica a interpretação do comportamento do raciocínio funcional.

Uma das realizações do conceito observada foi a **transformação de variáveis**, observemos a situação apresentada por Souza (2020), em uma tarefa proposta por uma professora, cujo objetivo era descobrir qual era a regra por trás da transformação, e a comunicação com seus estudantes, para explicar este tipo de realização:

Figura 18 – Tarefa -máquina de transformação 1 e realização do estudante

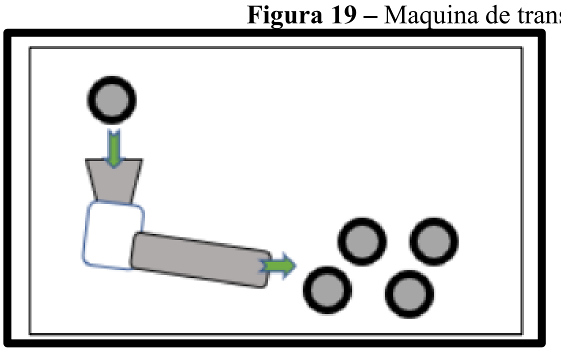
Professora: Isso mesmo, então o que aconteceu com os números quando entraram na máquina?
Estudante C30: A gente somou eles três vezes.
Professora: Acertou! Se quando a gente soma um número duas vezes, a gente tem o dobro, então, quando soma três vezes temos o?
Estudante C28: o triplo.
Professora: Então, temos aqui a função?
Estudante C28: A função tripla, professora. (alguns estudantes dão risada)
Professora: Tripla ou triplo?
Estudante C28: Triplo, é função triplo.

Fonte: Souza (2020, p. 158-159).

A comunicação do Estudante C38, "é uma função triplo", por meio da identificação da *comparação da razão multiplicativa*, que no exemplo é (x3) (Leite; França,2024). Então, a função (segredo) que está presente nessa situação é a função linear, (x)= 3x , do tipo f(x) = ax +b , em que f(x)= a quantidade de bolinhas que saem(valor dependente) e x= a quantidade de bolinhas que entram(variável independente) , e neste caso b=0 , tendo em vista que não há um termo independente. Além disso, de acordo com Santana (2024), esse tipo de função se aplica o conceito de proporcionalidade, desse modo, a realização desta função é fundamentada na função linear, f(x)=3x.

Outra tarefa é proposta por Narváez e Cañadas (2023), fundamentada na máquina de função, o estudo é realizado por meio de mediações dos pesquisadores com estudantes com idade entre 7 e 8 anos, uma lei que exprime a transformação da máquina é apresentada, observemos a tarefa e a mediação realizada pelo pesquisador:

Figura 19 – Maquina de transformação 2 e realização do estudante.



I: Pues es la alfa pero da igual, es un símbolo. Si metiéramos eso, ese número de bolas en la máquina… hay otro niño que nos ha dicho esto: a alfa, ese número, le sumamos tres, ¿Tú que crees?

E5: Yo…

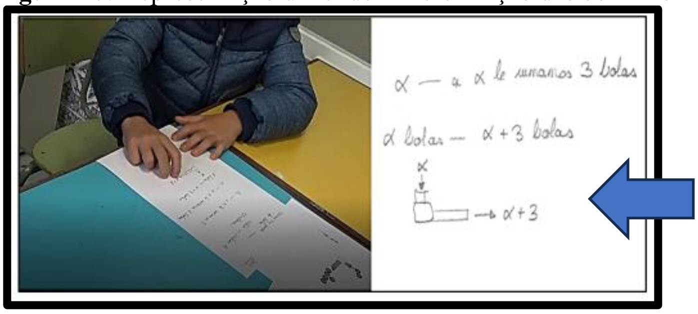
I: ¿Se te ocurre algo? Es que es muy difícil E5, yo lo sé. Esta pregunta es de los niños mayores, pero como lo has hecho muy bien en el resto quería, ver como hacías este.

E5: Uf, esto pues le metemos esto, un símbolo, te saldría tres bolas más.

Fonte: Narváez e Cañadas (2023, p. 245-257)

Na narrativa do estudante E5: Se colocamos um símbolo, sairia três bolinhas a mais, consiste em uma realização do conceito, uma vez que ação discursiva do estudante é fundamentada na metarregra: adicionar três bolinhas independentemente da quantidade de bolas que entram (Sfard, 2008). A realização do estudante é representada pelo pesquisar na figura 20:

Figura 20: Representação da lei de transformação das bolinhas



Fonte: Narváez e Cañadas (2023, p. 257).

A representação constitui-se como uma realização do conceito como **transformação de variáveis**, uma vez que a transformação de qualquer valor que entra na máquina é adicionada três unidades. Inicialmente, o pesquisador representa a lei de transformação das bolinhas, o elemento de entrada α, se refere a variável independente de uma função, e a representação da saída denotada por α+3, a variável dependente. A transformação realizada pela máquina é fundamenta pela regra de realização dada função afim F(α)= α+3.

Neste panorama, o raciocínio funcional como máquina de transformação foi comunicado como transformação de variáveis, cuja realização é validada a partir da função afim.

3.3 SÍNTESE DA MATEMÁTICA PARA O ENSINO DO RACIOCÍNIO FUNCIONAL A PARTIR DE ESTUDOS CORRELATOS POSSIVEIS VÍNCULOS

O modelo foi estruturado em termos de panoramas, que consistem em agrupamentos das realizações do raciocínio funcional com base em semelhanças de metarregras identificadas no discurso matemático. Os vínculos foram formados a partir das relações que cada realização possui com outros conceitos matemáticos, conforme o quadro 11:

Quadro 11 – Panorama, realizações e vínculos- A partir de estudos correlatos

Panorama	**O raciocínio funcional se realiza como.**	**Que se vincula a...**
Raciocínio funcional como proporcionalidade	Variação proporcional	Relações multiplicativas, regra de três simples sem a necessidade de regra de três, transformação de unidades de medida

generalização de padrões	Divisão	Múltiplos, divisores, subtração sucessiva.
	Generalização aritmética	Padrões numéricos, icônicos e operações.
	Progressão aritmética	Sucessores e antecessores de números naturais, sequências de padrão com crescimento constante.
Raciocínio funcional como máquina de funções	Transformação de variáveis	Associação entre dois conjuntos, identificação de padrões, introdução ao conceito de variável dependente e independente.

Fonte: elaboração própria.

Para ilustrar a síntese dos dados apresentados no quadro 11, tomemos como exemplo o panorama generalização funcional, ele foi delimitado a partir de um conjunto de realizações que comunicaram o raciocínio funcional a partir de ações discursivas que estabeleciam generalizações. As ações discursivas que descrevem estas realizações são chamadas de metarregras (Sfard, 2008). Para exemplificar, observemos uma realização neste panorama, o raciocínio funcional como divisão, cuja metarregra associada é observar o resto da divisão. Desse modo, que a partir da realização e a metarregra que a descreve é possível observar vínculos com outros conceitos matemáticos, como, múltiplos, divisores, subtração sucessiva

No próximo capítulo apresentaremos o raciocínio funcional, a partir do estudo realizado com professores.

4 REALIZAÇÕES DO RACIOCÍNIO FUNCIONAL A PARTIR DE UMA FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DOS ANOS INICIAIS

Neste capítulo, são apresentadas a análise e a discussão dos resultados do nosso estudo, cujo modelo teórico é baseado no Estudo do Conceito de Davis e Renert (2014) e a análise das narrativas matemáticas, fundamentada nos pressupostos de Sfard (2008). Inicialmente, apresentaremos as realizações do raciocínio funcional, a partir dos dados da formação continuada, como: as narrativas orais, escritas no planejamento e relatório de atividades, e análises de tarefas realizadas na formação continuada.

4.1 PANORAMAS PARA A REALIZAÇÃO DO RACÍOCINIO FUNCIONAL

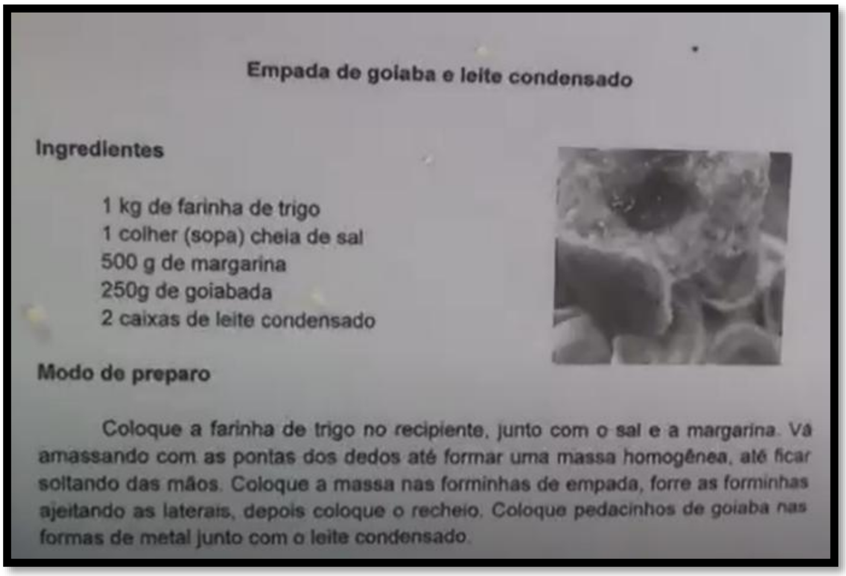
Neste estudo selecionamos as realizações do raciocínio funcional, que foram agrupadas em quatro panoramas, os quais identificamos, ao longo das discussões com o grupo de professores. As realizações foram definidas a partir de metarregras que descreveram as ações discursivas, que se referem a maneira que o conceito foi interpretado pelas participantes na comunicação (Sfard, 2008). A seguir, apresentaremos e discutiremos os quatro panoramas identificados na análise dos resultados e as respectivas realizações do conceito. A fim de possibilitar a melhor visualização, das diferentes realizações mencionaremos, no texto, em negrito.

4.1.1 Primeiro panorama: Raciocínio funcional como proporcionalidade

As realizações do raciocínio funcional como proporcionalidade se dão quando existe uma relação de proporcionalidade direta que pode ser comunicada partir de uma função linear (Imenes; Lellis, 2005). Esta relação pode existir, pois, esta consiste na “taxa de variação de uma quantidade relativa à variação da outra quantidade [...]” (NCTM, 2010, p. 53). As narrativas que comunicam esse tipo de realização serão agrupadas neste panorama.

A realização de um conceito é dada pelas maneiras de comunicar esse conceito (Sfard, 2008). Neste panorama, as professoras comunicaram o raciocínio funcional como **variação proporcional**. Uma das realizações é apresentada na narrativa da professora Liz, no desenvolvimento de uma atividade com seus estudantes, durante o processo formativo, quando, inicialmente, faz uma receita de empadinha doce com seus alunos, que rende 18 unidades. Observe a receita:

Figura 21 – Receita das empadinhas doces



Empada de goiaba e leite condensado

Ingredientes

1 kg de farinha de trigo
1 colher (sopa) cheia de sal
500 g de margarina
250g de goiabada
2 caixas de leite condensado

Modo de preparo

Coloque a farinha de trigo no recipiente, junto com o sal e a margarina. Vá amassando com as pontas dos dedos até formar uma massa homogênea, até ficar soltando das mãos. Coloque a massa nas forminhas de empada, forre as forminhas ajeitando as laterais, depois coloque o recheio. Coloque pedacinhos de goiaba nas formas de metal junto com o leite condensado.

Fonte: Dados da pesquisa.

No desenvolvimento da atividade com estudantes do 5º ano, a professora Liz vai fazendo questionamentos, conforme o excerto apresentado por ela na formação:

> **Professora Liz:** Se utilizarmos 500g de margarina precisaríamos de quantos kg de farinha de trigo? E se fossem 3 kg de margarina?

No seu planejamento, ao estabelecer as expectativas da atividade a professora sinaliza:

> **Professora Liz**: o intuito era que os estudantes percebessem **a cada 500 g de margarina seria utilizado 1 kg de farinha de trigo**, além de estabelecer a relação entre unidade de massa

A realização do conceito pela professora Liz é fundamentada na metarregra a quantidade de farinha varia de acordo com a quantidade de margarina. Note que a atividade proposta poderia ser apenas de cunho aritmético, no entanto, é a intervenção da professora que faz com que se comunique um discurso algébrico, o qual comunica o raciocínio funcional, pois a quantidade de margarina e a quantidade de farinha crescem, utilizando a mesma razão de proporcionalidade.

Lins e Gimenez (1997) orientam que a ação pedagógica com a álgebra seja desenvolvida em paralelo com a aritmética. Além disso, a BNCC (Brasil, 2018) orienta que, nessa fase de escolaridade, a linguagem desenvolvida para o ensino da álgebra tenha um trabalho relacional muito grande com os números, e uma das possibilidades é uso de problemas envolvendo proporcionalidade direta, sem o uso da regra de três.

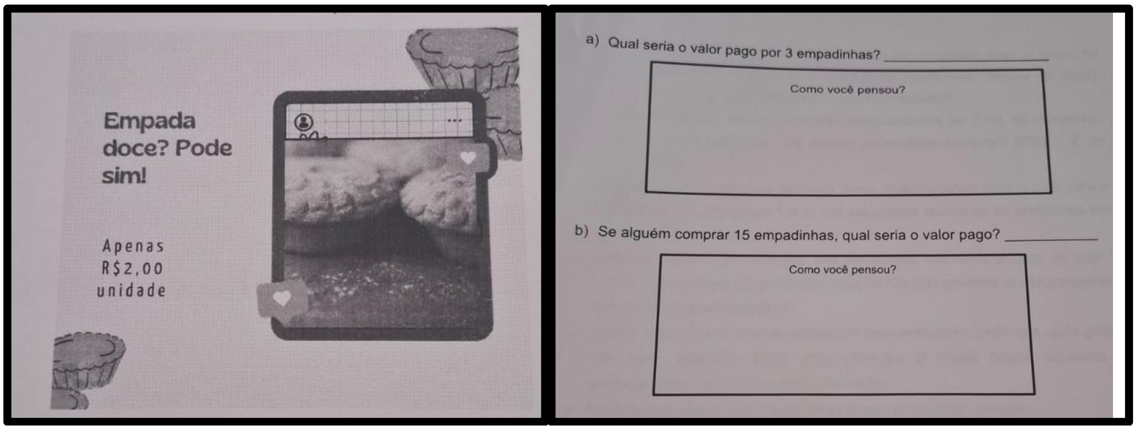
Outra realização do conceito acontece com a situação proposta pela professora Sol para estudantes do primeiro ano, com o contexto do projeto "Perola Negra", que estava acontecendo na sua instituição de ensino. Observe a realização, de acordo com o excerto:

> **Professora Sol:** Fizemos a construção de animais Silvestres de quatro patas com massinha de modelar, se 1 animal tem 4 patas, então quantas patas tem 3 animais, e 5 animais. **Até que eles perceberem que era só multiplicar o número de animais por 4.**

Consideramos a realização da professora Sol, que por meio da metarregra descreveu a ação do participante, que utilizou a multiplicação da quantidade de animais pelo número de patas. De acordo com Blanton (2008), esse raciocínio expressa um tipo de função dada por uma regularidade recursiva, que permite perceber como uma grandeza varia em relação a outra, nesse caso, o número de animais se relaciona com a quantidade de patas. Logo, poderíamos representar a função como y=4x, cujo domínio e contradomínio pertencem ao conjunto IN, em que x é a quantidade de animais e y a quantidade de patas.

Uma tentativa de realização deste raciocínio como uma variação proporcional é apresentada pela professora Liz ao planejar uma atividade sobre o raciocínio funcional. Conforme a figura 22:

Figura 22 – Atividade empadinhas-parte 2



Fonte: Dados da pesquisa

A atividade tinha como objetivo que os estudantes utilizassem a metarregra "multiplicar o valor pelo número de empadinhas", no entanto a atividade se torna apenas de cunho aritmético, pois não expande para a mobilização do raciocínio algébrico. Outra realização, também, como **variação proporcional**, é apresentada pela professora Ana, utilizando uma situação similar ao exemplo anterior, com o sistema monetário, conforme o excerto:

> **Professora Ana:** Eu preparei uma barraquinha de doces, tinha os doces, os valores e o dinheiro. Eu chamava o aluno, criava o problema para ele resolver, tipo se um pacote com pirulitos custa R$ 7,00, quanto vai custar 2 pacotes, e 7 pacotes, e 20 pacotes? **E para qualquer quantidade de pacotes?** E eles iam me dando o valor, de acordo com o problema.

A narrativa da professora Ana comunica uma situação que indica uma proporcionalidade direta sem uso da regra de três, que apresenta o raciocínio funcional, nesta situação consideramos que acontece uma realização deste raciocínio como **variação proporcional**, pois a metarregra consiste em multiplicar a variável, que é a quantidade de pacotes de pirulitos por 7, para encontrar o valor total.

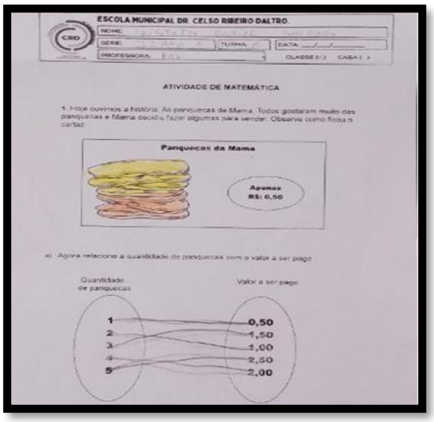
A tarefa apresentada pela professora Ana, apresenta similaridades com a tarefa elaborada pela professora Liz, uma vez que as duas tratam da venda de um produto, e estabelece a relação entre quantidade e valor a ser pago. Embora inicialmente a tarefa da professora Ana comunique um raciocínio aritmético, ela se diferencia da atividade proposta pela professora Liz, à medida que a professora busca ao final estabelecer um modo de encontrar o valor de qualquer quantidade de pacotes de pirulitos, que comunica um raciocínio algébrico. Note que a situação descrita relaciona o valor a ser pago, que podemos chamá-lo de y, e x a quantidade de pacotes de pirulitos, a função pode ser expressa como $y = 7{,}00x$. Nesse caso, o domínio e contradomínio da função pertencem ao conjunto IN.

Os dados da pesquisa corroboram com Spinillo (1994), que aborda a proporcionalidade como um apoio para o raciocínio funcional, pois neste panorama, o raciocínio funcional foi comunicado por meio das narrativas das discursantes, que exprimem funções lineares do tipo $y=ax$ (onde a é a constante de proporcionalidade e x a variável). Nesse sentido, o raciocínio funcional comunicado pela proporcionalidade teve como fundamento a lei de formação do tipo função linear. Mas, cabe ressaltar que o objetivo das realizações apresentadas não consiste na representação da lei de formação de uma função e sim estabelecer uma relação proporcional entre as variáveis.

4.1.2 Segundo panorama: Raciocínio funcional como diagrama

Uma das maneiras de comunicar o raciocínio funcional é por meio de diagramas. De acordo com Santos (2017, p. 63), “As relações funcionais passíveis de serem realizadas por diagramas são aquelas em que todos os elementos dos conjuntos domínio e contradomínio podem ser dispostos em diagramas”. A realização utilizada para comunicar este cenário foi a **correspondência**. A realização ocorreu por meio da narrativa da professora a respeito de uma atividade realizada por ela a respeito do raciocínio funcional. Observemos a atividade na figura 23 e logo a seguir a narrativa:

Figura 23 – Atividade função como diagrama



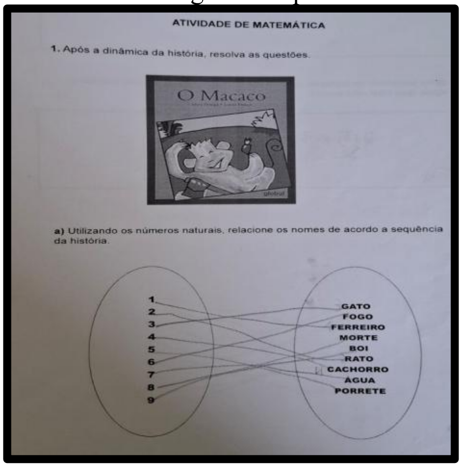
Fonte: Dados da pesquisa.

> **Professora Olivia:** Sabendo o valor de uma panqueca eu queria que eles ligassem o valor de uma, duas, e assim por diante.

A atividade planejada está em consonância com os estudos de Oliveira e Magina (2019), que mostram que a representação de correspondências e covariações são possíveis nos anos inicias. A realização comunicada pela professora é estabelecida a partir da metarregra, ligar os valores correspondentes, pois ela comunica a relação entre dois conjuntos, a quantidade de panquecas, e o valor a ser pago, por meio da metarregra, que ela espera que os estudantes realizem, em sala de aula. Na atividade, existe uma correspondência, que se estabelece a partir do crescimento proporcional entre a quantidade de panquecas e o valor a ser pago.

Outra narrativa é comunicada pelas professoras Olivia e Suely ao planejarem uma atividade envolvendo o raciocínio funcional. De acordo com o plano, a atividade tinha como objetivo ouvir a história “O macaco” e relacionar os personagens com a ordem em que cada um aparece na trama, por meio do diagrama. Conforme a figura 24:

Figura 24 – Atividade com diagramas a partir da história “O macaco”



Fonte: Dados da pesquisa

Ainda que a tarefa utilize o diagrama como mediador visual, a partir da narrativa comunicada pelas professoras no plano, nota-se que ela não comunica uma relação de correspondência, pois, os elementos dos diagramas se relacionam a partir de uma relação ordinal. De acordo com Alsina (2022, p. 8, *traduções nossa*), “as correspondências são uma lei que associa os elementos de um conjunto A com outro conjunto B”. Neste caso não existe uma lei, que pode ser descrita como uma função que associa os elementos dos dois conjuntos. Com isso, a narrativa não foi endossada pelos participantes da comunicação e não pode ser caracterizada como uma realização do raciocínio funcional como diagrama (Sfard, 2008).

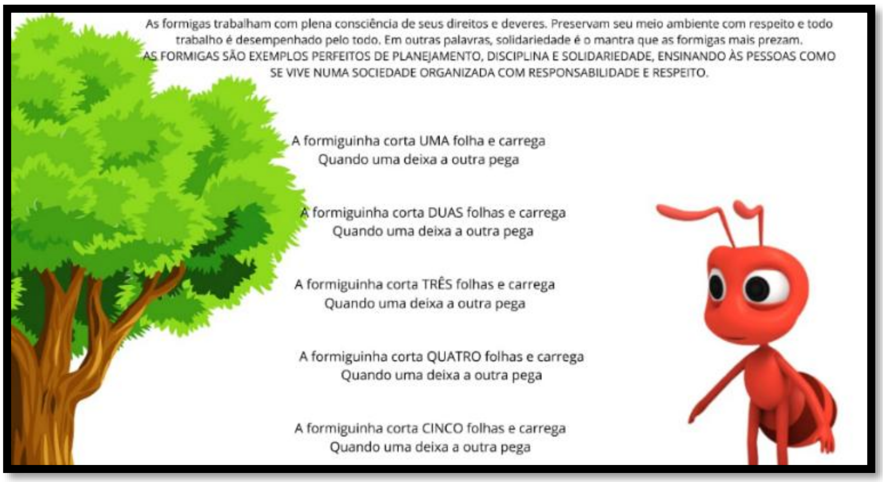
4.1.3 Terceiro panorama: Raciocínio funcional como generalizador de padrões

Este panorama é formado das realizações que comunicam o raciocínio funcional como uma generalização de padrões. Estamos considerando generalização de padrões as narrativas que envolvam identificar padrões algébricos e geométricos (Blanton; Kaput, 2005). Estas narrativas podem ser observadas em tarefas que mobilizem: descobrir o padrão da sequência para continuá-la; indicar um termo faltante da sequência, que pode começar pela posição da última figura da sequência mais próxima e ir se distanciando; ou que procure um termo numa posição qualquer, distante dentro da sequência (Jungbluth, 2020).

A primeira realização deste panorama é a **generalização de progressão aritmética**, que é descrita como uma sequência numérica em que a diferença entre termos consecutivos é constante, que é chamada de razão (Dante, 2019).

Na atividade 1, realizada no IV encontro formativo, as professoras produziram sequências a partir da temática do trabalho colaborativo das formigas, a partir da socialização da letra da canção projetada na imagem seguir:

Figura 25 – Atividade 1 – O trabalho das formiguinhas



Fonte: Dados da pesquisa

As narrativas produzidas pelas participantes (professoras) foram comunicadas ao estabelecerem generalizações representadas na linguagem natural e por meio de diferentes formas de comunicação (Sfard, 2008). A sequência é comunicada com a produção de folhas com massinha de modelar pela professora Ana e a realização do raciocínio funcional na narrativa da professora Lia, conforme a imagem a seguir:

Figura 26 – Sequência com folhas e realização de generalização como progressão aritmética

Narrativa da Professora Ana	Realização da professora Lia
	Professora Lia: a posição ou número da formiguinha é igual ao número de folhas.

Fonte: Dados da pesquisa.

A representação da narrativa da professora Ana pode ser visualizada por meio de um quadro, de acordo com Sfard (2008), os recursos como quadros, tabelas e gráficos, podem auxiliar na comunicação do discurso matemático, e são chamados de mediadores visuais. A realização feita pela professora Lia pode ser representada em linguagem algébrica, por exemplo, como no quadro 12:

Quadro 12 – Quantidade de folhas por posição

Posição (número da formiguinha)	Número de folhas
1	1
2	1+1=2
3	1+ 2=3
Qualquer posição	1+ n-1

Fonte: Elaborado pela autora

Consideremos esta realização como uma **generalização de progressão aritmética**, tendo em vista que a metarregra utilizada pela professora Ana consiste em adicionar uma unidade ao número de folhas da posição anterior, neste caso a razão é um. Essa ação discursiva por si só não se configura como uma generalização, mas a narrativa da professora Lia se configura como uma realização, que contempla a mesma metarregra, tendo em vista que ao realizarmos a operação: 1+ n-1 =n, ou seja, o número de folhas para qualquer posição é igual ao termo da sequência, destacamos que na generalização para qualquer posição, n-1, se refere ao número da posição anterior.

Em um contexto envolvendo generalização de padrões, ocorre a realização do raciocínio funcional quando se identifica e se representa uma regra que relacione ambas a quantidade desde a situações particulares a situações gerais (Ureña et al., 2019). No caso desta função a lei que permite descobrir o número de folhas de qualquer posição é dada pela função f(n)= n, em que n, a variável independente, é o número da posição e f(n), a variável independente é o número de folhas.

A segunda forma de realização da função como generalização **foi a de generalização com taxa fixa**. A primeira atividade em que as professoras apresentaram essa realização consistia em continuar a sequência crescente, e posteriormente encontrar para quantidade total de bolinhas de qualquer fileira de uma sequência, conforme a figura a seguir:

Figura 27– Material Manipulável para sequências crescentes

Fonte: Dados da pesquisa.

De acordo com Vieira (2022, p. 35) “os padrões de crescimento possibilitam uma maior diversidade no desenvolvimento do raciocínio funcional”. O padrão nesta sequência crescente apresenta uma distinção da anterior, uma vez que utiliza um elemento fixo. A realização do conceito nesta tarefa não ocorre de maneira imediata, ela é mobilizada a partir de uma problematização que ocorreu no processo formativo. Inicialmente a professora Ana se propõe a realizar a atividade. Então, uma questão disparadora é levantada pela Formadora Helmira, conforme o excerto a seguir:

> **Formadora Helmira:** Eu quero que você me diga, como é que seria a 7ª fileira desta sequência.

De acordo com Vale (2013) este é uma atividade que envolve uma generalização próxima, pois se refere à descoberta de um termo, que pode ser obtido por contagem, desenho ou por recurso a uma tabela, e que normalmente envolve relações recursivas. No entanto, no desenvolvimento da tarefa com o material manipulável no ambiente formativo, no primeiro momento, a professora não comunica a sequência, conforme o padrão estabelecido, observemos a figura 28:

Figura 28 – Sequência crescente com bolinhas - passo 1

Fonte: Dados da pesquisa.

> **Formadora Helmira:** Como você pensou para poder chegar a isso?
> **Professora Lua:** Primeira fila (1 vermelha, 1 azul, fui contando as fileiras, até perceber que na sete são 7 bolinhas azuis.
> **Formadora Helmira:** E se você não fizesse pictórica? Se fosse numérica?
> **Formadora Helmira:** E se fosse com letras?

Observemos as representações que a professora Ana realizou:

Figura 29 – Representação pictórica da sequência com bolinhas

Fonte: Dados da pesquisa.

A mesma sequência é representada na forma pictórica, em que a flor simboliza a quantidade de bolas vermelhas e os corações a quantidade de bolas azuis. Na representação numérica, o 7 representa a bola vermelha, e o 8 as bolas azuis. Para Alsina (2019), as representações das ideias matemáticas é um processo indispensável para a aprendizagem. Estas representações de uma generalização próxima, não envolve necessariamente um raciocínio algébrico, no entanto elas foram importantes para a construção da generalização da quantidade de bolinhas para qualquer posição, que envolve a compreensão do padrão e requer uma ação discursiva envolvendo o raciocínio funcional assim, o diálogo é prolongado, como mostra o excerto a seguir:

> **Formadora Helmira:** E se você fosse encontrar a 12ª posição? E se você fosse encontrar a 100ª posição?
> **Professora Olga:** 1 bola vermelha e 100 azuis.
> **Professora Liz:** Seriam 100 azuis?
> **Professora Liz:** 1 vermelho é sempre 1, posição sete, sete bolas azuis, posição vinte, vinte bolas azuis.
> **Professora Olivia: É como se tivesse um "x" e um "b" pra primeira fileira, um "x" e um "b", seria um fixo e sempre acrescentando um mais um. Só que aqui tem duas cores diferentes, o fixo é um e o que se repete é o outro.**
> **Formadora Bia:** E quem se repete depende de quem? Do que?
> **Grupo de professoras:** Dá posição.
> **Formadora Elis:** O que seria fixo o "x "ou "b".
> **Professora Olivia:** Eu pensei que aí existe uma função, mas não sei como seria isso.

No enxerto é possível notar uma tentativa de realização do raciocínio funcional envolvendo uma taxa fixa, na narrativa da professora Olivia, ao considerar uma taxa fixa, e uma tentativa em descrever o padrão em linguagem algébrica, mas que não é findada. Além disso, o grupo de professoras comunicam a sequência como uma relação de dependência, em que o número total de bolinhas depende da posição. Já a realização acontece com a narrativa da professora Lia, destacada em negrito, conforme o excerto:

> **Formadora Elis:** Se fossemos apenas contabilizar a quantidade total de bolinhas em cada fileira, o que não muda.
> **Professora Lia**: **A bolinha vermelha, em todas as fileiras só uma.**
> **E a quantidade de bolinhas azuis é igual a posição, é justamente esse o raciocínio funcional.**

Note que a generalização algébrica da sequência é produzida e não adivinhada, conforme a proposição de Radford (2014). A realização do conceito acontece, pois, a professora utiliza a metarregra, encontrar a parte fixa (a bolinha vermelha) e a variável (quantidade de bolas azuis) e comunica oralmente como raciocínio funcional. O raciocínio funcional pode ser comunicado por outros mediadores visuais, como por exemplo no quadro 13:

Quadro 13 – Generalização da quantidade de bolinhas

Posição	Número de bolinhas vermelhas	Número de bolinhas azuis	Total de bolinhas
1	1	1	2
2	1	2	3
3	1	3	4
Qualquer posição	1	O número da posição	O número da posição mais um

Fonte: Elaborado pelas autoras.

Vieira, Magina e Luna (2021), ao desenvolverem um estudo com sequências crescentes, observaram que esse tipo de atividade apresenta um grau de complexidade maior e destacam a importância que o professor compreenda os conceitos que estão inseridos na atividade, para poder orientar as crianças. Na tarefa proposta é necessário compreender o padrão, e a variação que ocorre a depender do termo da sequência. Ampliando o conceito, este raciocínio pode ser expresso por uma função do tipo, $F(x)= ax + b$. Em que a bolinha vermelha é uma constante que vai aparecer em todas as fileiras, e a variável, os números de bolinhas azuis que são iguais ao número da fileira. Sendo F(x)= Total de bolinhas, na figura 30; o a é neutro, neste caso e equivale a 1, x = quantidade de bolinhas azuis, b = quantidade de bolinhas vermelhas = 1. Dessa forma, podemos generalizar a quantidade de bolinhas de cada fileira com a função:

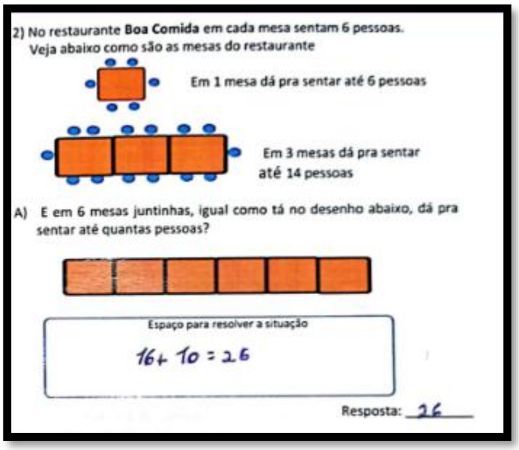
Figura 30: Lei de Formação

$$\boxed{F(x)= x +1}$$

Fonte: Elaborado pelas autoras.

Ainda que este tipo de representação não seja adequado para os anos iniciais, é importante que o professor compreenda outras formas de comunicação do raciocínio funcional, e os conceitos relacionados a ele, que neste caso é o conceito de função. Outra realização da **generalização com taxa fixa,** em que a taxa fixa representa o termo independente (coeficiente linear da função afim) , que ocorreu no quarto encontro formativo. Nesse sentido, o grupo de professoras, ao analisarem as estratégias de resolução de uma tarefa do diagnóstico, que envolvia o raciocínio funcional, que foi realizada por crianças que participaram do projeto de pesquisa interinstitucional[4]. A proposta teve como intuito analisar a realização do raciocínio funcional nas narrativas das professoras. Observemos a tarefa analisada pelas participantes da comunicação na figura 31:

Figura 31 – Produção discursiva da criança 4



Fonte: Dados da pesquisa.

A respeito da produção discursiva da criança 4, na figura 32, a professora Lia realiza o raciocínio funcional como generalização com taxa fixa no excerto:

> **Professora Lia: Ele considerou que nas mesas da ponta sentam 5 pessoas, que é fixo, então 5 x 2=10**, **nas mesas do meio sentam 4 pessoas**, então 4x4= 16. Somando tudo 26.

A metarregra que comunica a ação discursiva da professora, é dada pela metarregra ao considerar 10 como valor fixo, adicionando à quantidade de mesas do meio vezes 4. Luna, Souza e Menduni-Bortoloti (2018, p.66) orientam que "neste nível de ensino não se encerra em ver o mesmo ou o que se repete, mas, sobretudo, notar nas variações constantes o que se mantém ou não, em qual parcela e como influi no valor da sequência em questão". Ampliando a metarregra das professoras, considerando F(x) = número de assentos e x = número de mesas dos meios, a sequência poderia ser descrita como a função que relaciona a quantidade de cadeiras e quantidade de mesas do meio:

[4] O Raciocínio Algébrico: do diagnóstico do Estudante à Formação do Professor da Educação Infantil e dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Figura 32 – Representação algébrica da sequência numérica

$$\boxed{F(x) = 10 + 4x}$$

Fonte: Elaborado pela autora

A regra apresentada pela função afim, só é válida quando o número de mesas juntas for maior ou igual a três, para que tenhamos no mínimo uma mesa no meio. Ainda que as professoras não tenham comunicado o raciocínio funcional na forma algébrica descrita por uma função, é possível observar que elas expressam essa relação de maneira verbal. Ainda cabe destacar, que a metarregra utilizada por elas está adequada ao desenvolvimento do raciocínio funcional nos anos iniciais, uma vez que a BNCC (Brasil, 2018) não orienta o uso de letras nesta fase de escolaridade.

As realizações relacionadas foram desenvolvidas a partir da ação pedagógica com sequências crescentes, que favoreceu os processos investigativos para a produção do raciocínio funcional, no espaço formativo. De modo geral, as realizações como da generalização uma **generalização de progressão aritmética** e **generalização de padrões com fixa**, comunicaram o raciocínio funcional fundamentando-se na função do tipo afim.

4.1.4 Quarto panorama: Raciocínio funcional como representação algébrica

O panorama raciocínio funcional como representação algébrica é composto de realizações que comuniquem a relação entre as variáveis dependentes e independentes de uma função. Para Araki, Roski e Silva (2019, p. 79), "o elemento central do raciocínio funcional é a relação existente entre duas grandezas particulares, por meio de uma lei de formação capaz de indicar tal correspondência". No que se refere aos anos iniciais, essas relações podem ser expressas por uma lei, uma fórmula, a partir de palavras, tabelas, gráficos ou símbolos (Blanton et al., 2011).

De acordo com os enunciados falados ou escritos pelos professores, apresentamos as realizações como representação algébrica a primeira realização foi **a variação proporcional**. Observemos a problemática apresentada no diálogo entre a professoras e a formadora Helmira e a realização do conceito:

Quadro 14 – Problemática com preço do feijão e realização

Problemática	Realização da professora Lia
Formadora Helmira: Considere o preço fixo de um pacote de feijão de R$6,50, como podemos escrever uma expressão para encontrar qualquer valor de qualquer quantidade de pacotes de feijão.	P(q)=f.q

Professora Ana: Quando fala taxa fixa já lembro de função no Ensino Médio. Formadora Helmira: Podemos sim, escrever essa situação como uma função do tipo: F(x) =ax +b (e registra na lousa). O valor de F(x) aqui é quem? E ax? e b? Professora Olivia: Não tem b, porque não tem nada fixo. Formadora Helmira: Podemos utilizar uma letra para simbolizar algo que se associa coma utilização da função. Professora Lia**: f de preço do feijão, p(q) de preço a se pagar e q de quantidade de feijão.** Formadora Helmira: Como podemos escrever essa relação?	

Fonte: Dados da pesquisa.

Na problemática, a narrativa da professora Lia destacada em negrito, comunica uma representação das variáveis quantidade de feijão e preço por letras, e a realização do conceito acontece uma vez que a metarregra utilizada foi a variação entre e o preço e quantidade, comunicada por p(q) , esta é uma função linear do tipo *F(x)=ax +b*, em que a é o valor do feijão e x a quantidade de feijão , e o b que é o coeficiente angular é nulo. Em que o valor a ser pago varia a depender da quantidade de feijão.

Conforme a pesquisa de Santos (2017, p. 117), ao investigar a produção de um modelo teórico para o ensino do conceito de função, mas que não tem como objeto de estudo o conceito nos anos iniciais, ela apresenta que "a realização de uma função como expressão algébrica é, frequentemente, reconhecida e realizada pelo texto *y=F(x)*". Notemos que essa relação também é estabelecida no ambiente de formação dos Anos Iniciais. No entanto esta narrativa não é compreendida por uma professora, e isso faz com que a professora Lia comunique esta realização com outra representação, observemos a seguir:

Quadro 15 – Segunda realização-problemática do preço do feijão

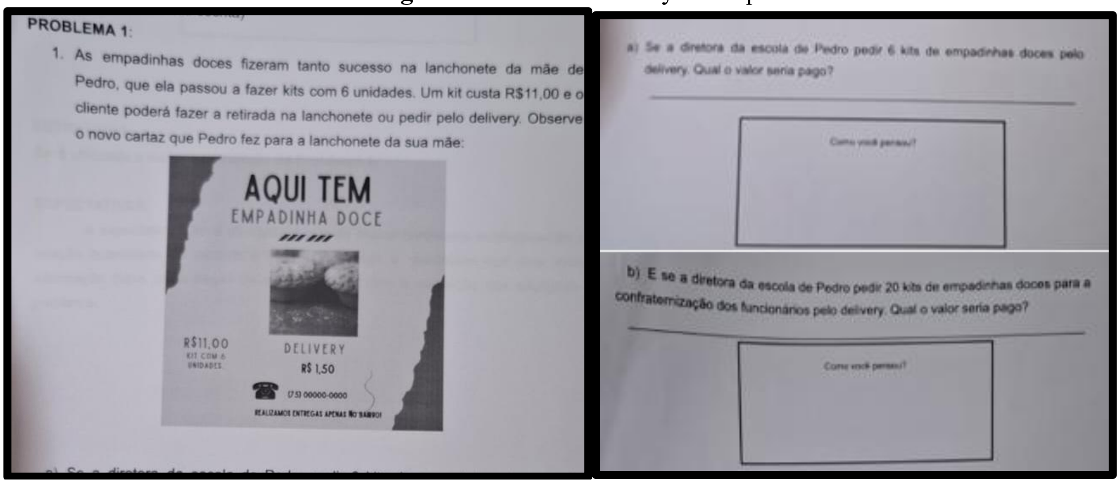
Problematização	Realização da professora Lia -Representação 2
Professora Vanda: O que seria P(f). **Professora Olivia:** P (f) seria o preço do feijão. **Formadora Helmira:** Podemos utilizar uma representação escrita dessa situação com os meninos, devido à dificuldade de compreender essa linguagem.	O preço do feijão = quantidade de pacotes de feijão x preço do feijão

Fonte: Dados da pesquisa

Ainda que Carraher, Martinez e Schliemann (2008) orientem que as realizações algébricas não são alternativas viáveis para estudantes que estão nos primeiros anos de escolaridade, devido a não familiaridade com a linguagem simbólica. Na formação continuada, encontramos maneiras de comunicar a função como expressão algébrica de forma adequada para esta fase de escolaridade. Nesse caso, a representação algébrica realizada, na última representação, por meio da álgebra retórica, viabiliza o entendimento da representação algébrica, no contexto formativo

O outro tipo de realização observado nesse panorama foi a do raciocínio funcional como **variação com taxa fixa**, essas realizações podem ser representadas por funções Afim de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, do tipo $f(x) = ax + b$, com a e b $\in \mathbb{N}$. Observemos a tarefa proposta pela professora Liz com seus estudantes e a realização do conceito:

Figura 33 – Tarefa delivery de empadinhas



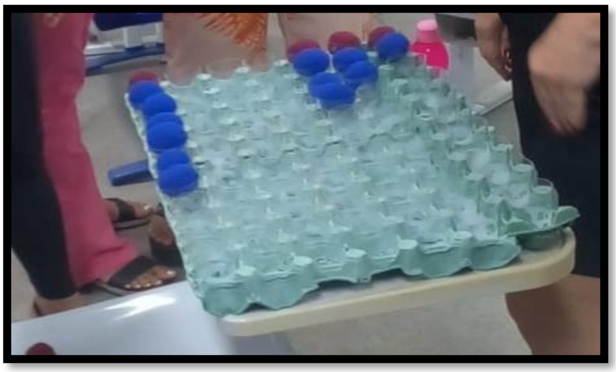
Fonte: Dados da pesquisa

Para Schliemann (2016), a função pode ser representada verbalmente e percebida em situações do cotidiano, como a descrita na tarefa, a realização do conceito acontece quando a professora coloca as expectativas a respeito da tarefa no plano de aula, conforme podemos observar no excerto:

> **Professora Liz:** A expectativa com a atividade pé que os estudantes continuem estabelecendo a relação entre quantidade de produto e o valor a ser pago e percebam uma nova informação a taxa de entrega (valor fixo) que deve ser incluída na situação problema. **Nesse caso o total será o preço do kit vezes a quantidade mais a taxa de entrega.**

A metarregra que descreve a ação da participante foi identificar uma lei para encontrar o valor total, considerando uma taxa fixa. Neste entendimento, Silva e Magina (2024) a importância de se saber a função por trás de um exercício matemático mesmo que não se aborde diretamente a questão algébrica. No entanto, afim de expandir o conceito, o raciocínio funcional realizado pode ser expresso pela função afim, f*(x)= 11x +1,50,* que exprime a dependência entre o valor a ser pago "f(x)" e a quantidade de kits "x" nesta função 11 seria o coeficiente angular e 1,50 o coeficiente angular que é o valor fixo nessa função. Outra tentativa de realização é comunicada pela professora Olivia, em uma atividade com material manipulável proposta ao grupo de professores. Observemos o material na figura 34:

Figura 34 – Sequência crescente com bolinh**as**



Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Inicialmente a atividade tinha como propósito que as participantes da comunicação continuassem a sequência formada de bolinhas azuis e vermelhas, na seguinte ordem: no primeiro termo, era posicionada uma bolinha vermelha, em seguida, uma azul; no segundo termo, uma bolinha vermelha e duas azuis; no terceiro termo, uma bolinha vermelha e três azuis; e, deveria ser dada continuidade, da mesma forma, assim por diante. Para Santana (2024) todas as sequências de padrão, seja ela icônica ou numérica, repetitiva ou crescente, é possível determinarmos qual o elemento em qualquer posição, a partir da generalização. E a relação entre a posição e o elemento que a ocupa é uma relação funcional.

No contexto apresentado, a formadora Helmira questionou: Qual o total de bolinhas que teria no 100º termo? A partir daí a professora Olivia realizou a tentativa de comunicar o raciocínio funcional como uma variação com taxa fixa, conforme o excerto a seguir:

> **Professora Olivia:** É como se tivesse um “x” e um “b” pra primeira fileira, um “x” e um “b”, seria um fixo e sempre acrescentando um mais um. Só que aqui tem duas cores diferentes, o fixo é um e o que se repete é o outro.
> **Formadora Bia:** E quem se repete depende de quem? Do que?
> **Grupo de professoras:** Da posição.
> **Formadora Elis:** O que seria fixo o “x “ou “b”.
> **Professora Olivia:** Eu pensei que aí existe uma função, mas não sei como seria isso.

Na tentativa de generalização da sequência crescente ocorre também uma tentativa de realização do conceito uma vez o processo de generalização é um componente chave para o desenvolvimento do raciocínio funcional (Blanton et al., 2011). A realização aconteceria se a professora comunicasse de alguma uma metarregra que comunicasse a lei de formação da sequência. A expressão algébrica que comunica esta função é dada por F(x)= x +1, sendo F(x)= Total de bolinhas; x= número da fileira =quantidade de bolinhas azuis, 1=bolinha vermelha. Que poderia ser interpretado pela metarregra adicionar o número do termo da sequência mais, nesse caso ainda é possível perceber a relação de dependência na função, pois o total de bolinhas depende do termo da sequência.

A partir das realizações como **variação proporcional** e **variação com taxa fixa** as professoras comunicaram narrativas que expressam o raciocínio funcional como representação algébrica. Estas representações ocorrem por meio de generalizações que estabelecendo a relação entre as variáveis, de modo que não há uma representação sem que haja generalização.

4.2 SÍNTESE DA MATEMÁTICA PARA O ENSINO DO RACIOCÍNIO FUNCIONAL A PARTIR DE UMA FORMAÇÃO CONTINUADA COM PROFESSORES DOS ANOS INICIAIS

O modelo foi estruturado em termos de panoramas, constituídos de agrupamentos de realizações do raciocínio funcional que portam semelhanças referentes às metarregras utilizadas pelas participantes da comunicação. As metarregras são importantes pois descrevem as ações discursivas das participantes, ou seja, a maneira que o raciocínio funcional é interpretado, que permitem estabelecer as realizações do raciocínio funcional, de acordo com a maneira que este raciocínio é comunicado (Sfard, 2008).

No quadro abaixo destacaremos as implicações a partir dos vínculos estabelecidos entre as realizações e vínculos dos panoramas

Quadro 16 – Panorama, realizações e vínculos-Estudo com professores

Panorama	**O raciocínio funcional se realiza como.**	**Que se vincula a...**
Raciocínio funcional como proporcionalidade	Variação proporcional	Relações multiplicativas, regra de três simples sem a necessidade de regra de três, transformação de unidades de medida
Generalização de padrões	Progressão aritmética	Sucessores e antecessores de números naturais, sequências de padrão com crescimento constante.
	Generalização com taxa fixa	Sequência de padrões crescentes, crescimento ou decrescimento de grandezas que podem ser representados por uma função afim do tipo f(x)=ax +b.
Diagrama	Correspondência	Grandezas diretamente proporcionais e relação entre dois conjuntos.

Representação algébrica	Generalização com taxa fixa	Sequência de padrões crescentes, crescimento ou decrescimento de grandezas que podem ser representados por uma função afim do tipo f(x)=ax +b.
	Variação proporcional	Relações multiplicativas, regra de três simples sem a necessidade de regra de três, transformação de unidades de medida

Fonte: Elaboração própria

Para ilustrar a síntese dos dados apresentados no quadro 16, tomemos como exemplo o panorama Diagrama, ele foi delimitado a partir de um conjunto de realizações que comunicaram o raciocínio funcional a partir de ações discursivas que comunicaram um diagrama, por representações escritas ou pela comunicação oral. As ações discursivas que descrevem estas realizações são chamadas de metarregras (Sfard, 2008). Para exemplificar, observemos uma realização neste panorama, o raciocínio funcional como correspondência, cuja metarregra descrita pela participante da comunicação foi ligar os valores correspondentes. Desse modo, a partir da realização e a metarregra que a descreve é possível observar vínculos com outros conceitos matemáticos, como grandezas diretamente e inversamente proporcionais, relação entre dois conjuntos.

No capitulo a seguir, apresentaremos as considerações finais a partir dos dois estudos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

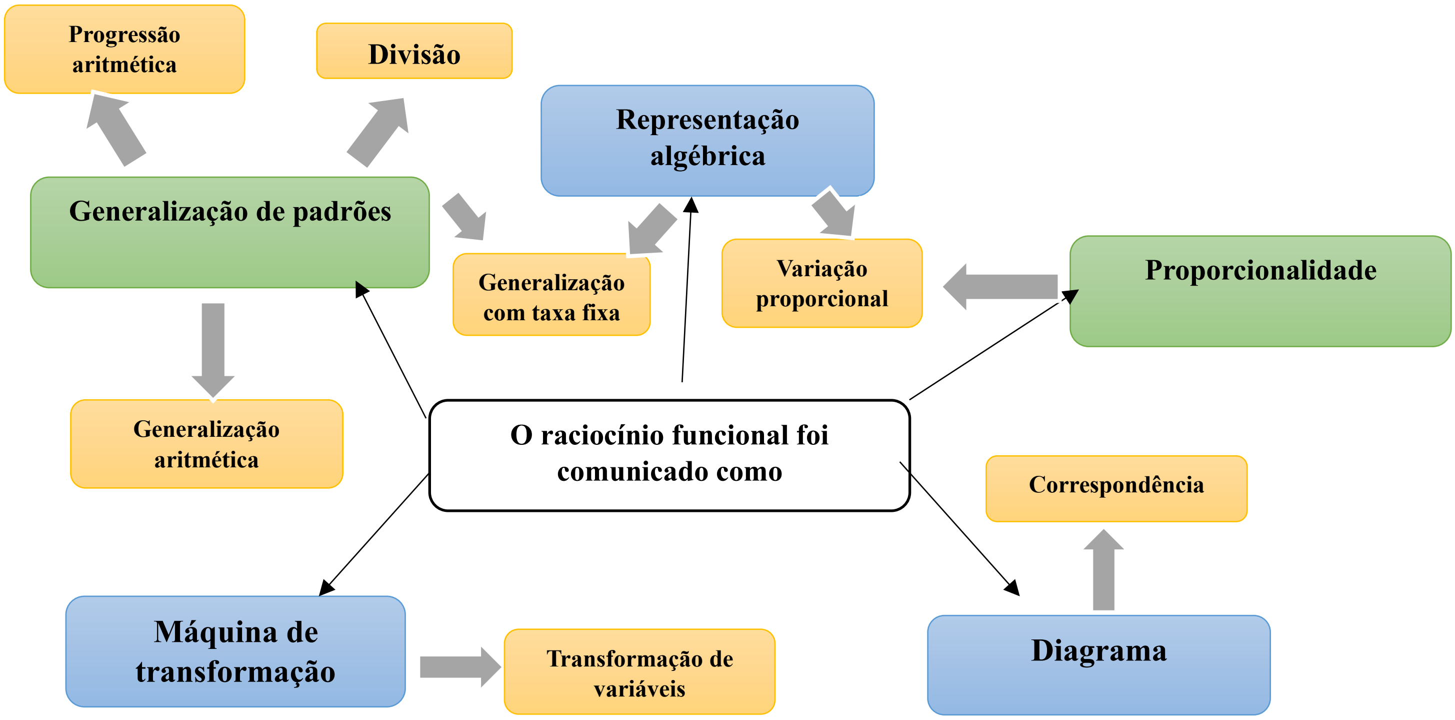
Neste estudo, tivemos como objetivo construir uma matemática para o ensino nos anos iniciais a partir das realizações do raciocínio funcional por meio de diferentes contextos. Para isto, utilizamos os pressupostos teóricos de Sfard (2008), e o Estudo do Conceito de David e Renert (2014). Para tanto utilizamos duas fontes: estudos correlatos ao raciocínio funcional no contextos dos anos inicias e uma formação continuada para professores que ensinam matemática para esta fase de escolaridade. Estes contextos foram utilizados para identificar as realizações do raciocínio funcional, ou seja, as maneiras de comunicar este conceito (Sfard, 2008).

O primeiro estudo, exposto no capítulo 3, apresenta uma síntese de uma matemática para o ensino do raciocínio funcional para os anos iniciais a partir de estudos correlatos. A partir da estrutura metodológica do Estudo do conceito de David e Renert (2014), apresentamos as realizações que foram definidas de acordo com as rotinas identificas (Sfard, 2008). Estas realizações foram agrupadas em três panoramas, a saber: generalização, proporcionalidade e máquina de transformação. Os vínculos foram estabelecidos de acordo com as relações que cada realização e as metarregras que as descrevem estabelecem com outros conceitos da Educação Básica.

O segundo estudo, apresentado no capítulo 4, teve como objetivo construir uma matemática para o ensino do raciocínio funcional em uma formação continuada com professores dos anos iniciais. A partir da estrutura metodológica do Estudo do conceito de David e Renert (2014), identificamos e analisamos as realizações que foram comunicadas pelo grupo de professoras, estas realizações foram definidas de acordo com as rotinas identificas (Sfard, 2008). Estas realizações foram agrupadas em quatro panoramas a saber: generalização, proporcionalidade, diagrama e representação algébrica. Os vínculos foram estabelecidos de acordo com as relações que cada realização e as metarregras que as descrevem estabelecem com outros conceitos da Educação Básica.

O modelo apresentado na figura 35, sintetiza as realizações do raciocínio funcional identificadas nos dois estudos. Cabe ressaltar que dois panoramas (raciocínio funcional como proporcionalidade e como generalização de padrões), foram identificados nos dois contextos apresentados, por isso foram destacados na cor verde, os demais diferem. Além disso, as realizações não fixas em um panorama podem se movimentar a depender das metarregras e regras de realização (Menduni-Bortoloti, 2016). A realização do raciocínio funcional como generalização com taxa fixa perpassa por dois panoramas, a representação algébrica e generalização de padrões.

Figura 35 – Síntese de uma matemática para o ensino do raciocínio funcional



Fonte: Elaboração própria

A partir do modelo, é possível observar que o panorama, generalização de padrões, apresenta uma maior diversidade de realizações, o que é esperado tendo em vista que autores como Blanton, Kaput (2011) e Smith (2006), já discutem sobre o raciocínio funcional como um processo para estabelecimento de relações, que possibilitam a generalização de padrões. O panorama, proporcionalidade foi identificado nos dois estudos, o que está em consonância com os resultados de investigações como as de, Magina e Molina (2023), Souza (2020), Silva e Luna (2024), Santana (2024), Leite e França (2024), que abordam sobre a mobilização do raciocínio funcional por meio de situações que envolvem uma constante de proporcionalidade.

Em relação aos pressupostos teóricos de Sfard (2008), eles contribuíram para a compreensão de como acontece a construção do conhecimento matemático por meio da interação e da linguagem. Nesse sentido, a matemática deve é vista como um discurso, no qual diferentes formas de comunicação envolvem regras, rotinas e metarregras específicas.

No que diz respeito ao contexto da formação continuada, as realizações identificadas possuem relação com as tarefas e matérias selecionadas pelos formadores. Com isso, sugere-se que sejam apresentadas nesses ambientes uma diversidade de tarefas que mobilizem diferentes formas de comunicação do raciocínio funcional, que implicam em diferentes rotinas e regras de realização que são descritas por diferentes metarregras (Sfard, 2008). Desse modo, ressaltamos que aprender matemática não é apenas adquirir conceitos prontos, mas participar ativamente de um discurso matemático, o que é fundamental para a formação de professores e o ensino da matemática nos anos iniciais.

Assim como toda pesquisa, tivemos limitações, durante a coleta de dados na pesquisa empírica, o tempo atribuído para cada encontro inviabilizou que as participantes explorassem alguns matérias manipuláveis, como foi o caso do gráfico móvel. Assim como, outras tarefas que não foram discutidas. Este fato limitou a comunicação do raciocínio funcional, e de outras possíveis realizações do conceito.

Este modelo traz contribuições para o campo da Educação matemática, uma vez que apresenta uma diversidade de realizações do raciocínio funcional, que pode favorecer para que professores ou futuros professores que ensinam matemática nos anos iniciais tenham uma visão panorâmica das diferentes formas de comunicar o conceito. Além disso, visualizar as vinculações do conceito com outros conteúdos da Educação Básica. No entanto, consideramos que este modelo pode ser ampliado futuramente, como exemplo, identificar realizações e outros panoramas em cursos de formação inicial de professores, por meio de documentos curriculares, em livros didáticos, ou em qualquer outro contexto em que seja possível comunicar conceitos matemáticos.

Além disso, essa pesquisa pode contribuir para os estudos que problematizam o ensino da Matemática no campo da Educação Matemática, sobretudo ao propor uma abordagem voltada para os anos iniciais do Ensino Fundamental. Dado que esse modelo ainda é pouco explorado nessa etapa da escolarização. De modo que, sugere-se que os outros conceitos que são voltados para os anos iniciais sejam explorados por meio do Estudo do conceito de Davis e Renert (2014).

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L.S.A.; LUNA, A. V. A. As rotinas identificadas por professores dos Anos Iniciais de Feira de Santana: A análise de tarefas com o raciocínio funcional. In.: **IX Seminário internacional de Pesquisa em Educação Matemática,** Natal, Rio Grande do Norte, 2024.

ÀNGEL ALSINA, **Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (3-6 años)**. Barcelona, GRAÓ, 2022.

ARAKI, P.; ROGOSKI, K.; SILVA, K. Raciocínio funcional mobilizado em atividades de modelagem matemática: um encaminhamento envolvendo a experimentação investigativa. **Ensino e tecnologia em Revista**. v. 3, n. 1, 2019.

BALL, DEBORAH LOEWENBERG; HILL, HEATHER C.; BASS, HYMAN**. Knowing mathematics for teaching**: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide?. 2005.

BALL, DEBORAH LOEWENBERG; THAMES, MARK HOOVER; PHELPS, GEOFFREY. Content knowledge for teaching what makes it special?. **Journal of teacher education**, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BARBOSA, J. C. Uma abordagem discursiva para a matemática para o ensino. In.: **Núcleo temático: IV – Formación del professorado en Matemáticas Modalidad: CP/CR.** Actas, 2017, p. 59-67.

BERNARDES, A. C. da S. **História e Ensino de matrizes**: Promovendo reflexões sobre o discurso matemático. 286f. Tese (Doutorado em Engenharia de Sistemas e Computação), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016. Disponível em: https://www.cos.ufrj.br/uploadfile/publicacao/2606.pdf Acesso em 05 de mai. 2024.

BLANTON, M. **Algebra and the elementary classroom**: Transforming thinking, Transforming Practice. Portsmouth, NH: Heinemann, 2008.

BLANTON, M. et al. **Essential Understanding of Algebraic Thinking for Teaching Mathematics in Grades 3-5. Reston**, VA: NCTM, 2011.

BLANTON, M.; KAPUT, J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 36, n. 5, p. 412-446, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018.

BRUNER, J. S. **The Culture of Education**. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1996.

CALLEJO, M. L.; ZAPATERA, A. Prospective primary teachers’ noticing of students’ understanding of pattern generalization. **Journal of Mathematics Teacher Education,** Netherlands, v. 20, n. 4, p. 309-333, aug. 2017.

CANAVARRO, A. P. **O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos**. Quadrante, v. 16, n. 2, 2007.

Carraher, D. W.; Martinez, M. V.; Schliemann, A. D. Early algebra and mathematical generalization. **ZDM Mathematics Education**, v. 40, p. 3-22, 2008.

CENTELLA, E. L. Pensamiento funcional de estudiantes de tercero de primaria: un estudio bajo el enfoque del early algebra. **BOLEMA: Boletim de Educação Matemática**, v. 37, n. 77, p. 1277-1298, 2023. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a17.

CROTTY, M. **The Foundations of Social Research**: meaning and perspective in the research process. Thousand Oaks: Sage. 1998.

DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e Aplicações**. São Paulo: Ática, 2019.

DAVIS, B.; RENERT, M. **The Math Teachers Know: profound understanding of emergent mathematics**. NY:Routledge, 2014.

DENZIN, N.; LINCOLN, Y. Introduction: the discipline and practice of qualitative re-search. In: N. Denzin, & Y. Lincoln, **Handbook of qualitative research**, 2. ed., p. 1-28, Thousand Oaks: Sage, 2000.

GIRALDO, Victor Augusto; RANGEL, Letícia; MACULAN, Nelson. Matemática Elementar e Conhecimento de Matemática para o Ensino: um estudo colaborativo sobre Números Racionais. In: **XIV Conferência Interamericana de Educación Matemática**. 2015.

GÓMEZ, O. **Um Modelo Teórico Da Matemática Para O Ensino Do Conceito De Variável.** Tese (Doutorado em Ensino, Filosofia E História Das Ciências). Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2017.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. Livro didático, Porcentagem, Proporcionalidade: uma crítica da crítica. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, ano 18, n. 24, p. 1-30, 2005.

KAPUT, J. What is algebra? What is algebraic reasoning? In.: KAPUT, J.; CARRAHER, D.; BLANTON, M. (Eds.), **Algebra in the Early Grades**.New York: Lawrence Erlbaum Associates, 2008, p. 5-17.

LEITE, V. F. A.; FRANÇA, S. de M. O. Resolução de Situações Multiplicativas e o Pensamento Funcional: um estudo com estudantes do 3º e 5º ano do Ensino Fundamental de Niterói. In.: **Seminário Internacional De Pesquisa Em Educação Matemática**, p. 1-15, 2024. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/eventos/index.php/sipem/article/view/161

LINS, R.C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

MAGINA, S. M. P.; PORTO, R. S. O. É possível se ter raciocínio funcional no nível dos anos iniciais? Uma investigação com estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental. In.: **VII Seminário internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, Foz do Iguaçu, Paraná, 2018.

MAGINA, S..; SANTANA, E. S. R.; SANTOS, A.; MERLINI, V. L. Espiral RePARe: um modelo metodológico de formação de professor centrado na sala de aula. **Revista REAMEC**, Cuiabá: MT, v. 6, n. 2, jul-dez 2018.

MAGINA, S.; MOLINA, M. Enfoque funcional en early algebra en las aulas brasileñas: ¿De dónde partimos? **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 13, n. 4, p. 1-17, 30 set. 2023.

MENDUNI-BORTOLOTI, R. A. **Um estudo sobre a Matemática para o Ensino de Proporcionalidade.** Tese (Doutorado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2016.

MESTRE; C. **O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade**: Uma experiência de ensino. Tese (Doutoramento em Educação na especialidade de Didática da Matemática), Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014.

MINAYO, M. C. de S. (org.). **Pesquisa Social**: Teoria, método e criatividade. 18 ed. Petrópolis: Vozes, 2001.

NARVÁEZ, R.; CAÑADAS. M. C. Mediaciones realizadas a estudiantes de segundo de primaria en una tarea de generalización. **PNA**, v. 17, n. 3, p. 239-264, 2023. DOI: https://doi.org/10.30827/pna.v17i3.24153

NASCIMENTO DA SILVA, V.; De ALMEIDA LUNA, A. V. A produção de atividades com o texto do discurso funcional algébrico na prática pedagógica: olhares atentos a estudantes com síndrome de down. **Diálogos E Diversidade**, v. 4, e20310, 2024. Disponível: https://revistas.uneb.br/index.php/rdd/article/view/20310

NATIONAL COUNCIL of TEACHERS of MATHEMATICS. **Princípios e Normas para a Matemática Escolar**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2010.

OLIVEIRA, A. S. **Matemática para o ensino do conceito de polinômios sob lentes da recontextualização pedagógica**. Dissertação (Mestrado em Educação).Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, 2024.

OLIVEIRA, C.; MAGINA, S. **1, 1, 2, 3, 5...:** Padrões na Formação de Professores. XVIII Encontro Baiano de Educação Matemática. Ilhéus, BA., p. 1-19, 2019.

ORLIKOWSKI, W.; BAROUDI, J. Studying information technology in organizations: research approaches and assumptions. **Information Systems Research**, v. 2, n. 1, p. 1-28, March 1991.

PINTO, E.; CAÑADAS, M. C. Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. **Mathematics Education Research Journal**, v. 33, p. 113-134, 2021. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00300-2.

PONTE, J.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no Ensino Básico. Ministério da Educação, Portugal**. Direção Geral de Integração e de Desenvolvimento Curricular (DGIDC). Portugal, 2009.

RADFORD, L. The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. **Mathematics Education Research Journal**, Australasia, v. 26, p. 257-277, 2014.

RIPARDO, Ronaldo Barros. **Escrever bem aprendendo matemática**: tecendo fios para uma aprendizagem matemática escolar. 314f. Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014. Disponível em: https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-25062015-130813/pt-br.php.

SANTANA, Rita de Cássia Calazans Lemos; MAGINA, Sandra Maria Pinto. Raciocínio funcional: análise do desempenho apresentado por alunos do 4º e 6º anos do Ensino Fundamental. In: **3º Colóquio Alagoano de Educação Matemática nos Anos Iniciais**, Maceió: AL, 2023. Disponível em: https://doity.com.br/anais/caedmais/trabalho/296587

SANTOS, G. L. D. **Um modelo teórico de matemática para o ensino do conceito de função**. 2017. Tese (Doutorado em Educação Científica e Formação de professores). Universidade Federal da Bahia. Salvador, 2017.

SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D. W.; BRIZUELA, B. M. Bringing out the algebraic character of arithmetic: From children’s ideas to classroom practice. **Mahwah**, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 2007.

SFARD, A. **Thinking as communicating:** human development, the growth of discourses, and mathematzing. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2008.

SHULMAN, Lee. **Knowledge and teaching**: Foundations of the new reform. Harvard educational review, v. 57, n. 1, p. 1-23, 1987.

SILVA, L.R. MAGINA, S. M. O raciocínio funcional de estudantes com Síndrome de Down, a partir de interações com sequências de padrões repetitivas em diferentes ambientes. In.: **IX Seminário internacional de Pesquisa em Educação Matemática,** Natal, Rio Grande do Norte, Brasil, 2024.

SOUZA, Alex Almeida de. **O ensino Hibrido na formação continuada e a recontextualização pedagógica dos textos produzidos por professores dos anos inicias em Early Algebra:um enfoque na relação funcional.** /Alex de Souza- Ilhéus, BA, UESC,2020.

SOUZA, A. A. de; CARNEIRO, I. de J. A early algebra, o pensamento funcional e a recontextualização pedagógica dos textos produzidos por professoras dos anos iniciais: um estudo de caso. **Em Teia: Revista De Educação Matemática E Tecnológica Iberoamericana**, v. 12, n. 3, 2021. https://doi.org/10.51359/2177-9309.2021.250278.

SOUZA, J. R de; PATARO, P. R. M. Vontade de Saber Matemática. São Paula: FTD, 2012d.
TEIXEIRA, C.; MAGINA, S.; MERLINI, V. L. A introdução do raciocínio funcional para estudantes do 5 ano do Ensino Fundamental. In: **XII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA -XII ENEM**, São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2016.

UREÑA, J., RAMÍREZ, R. y MOLINA, M. Representations of the generalization of a functional relationship and the relation with the interviewer's mediation. **Infancia y Aprendizaje**, v. 42, n. 3, p. 570-614, 2019. https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1604020.

VALE, I. Padrões em contextos figurativos: um caminho para a generalização em matemática. **Revemat**, Florianópolis, v. 8, n. 2, p. 64-81, 2013. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/download/1981-1322.2013v8n2p64/26020/106402. Acesso em 14 jan. 2025.

VALE, I.; BARBOSA, A. Pensamento algébrico: contributo da visualização na construção da generalização**. Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 21, n. 3, p. 398-418, 2019. DOI: http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019vol21i3p398-418.

VALE, I.; BARBOSA, A.; FONSECA, L.; PIMENTEL, T., BORRALHO, A.; CABRITA, I.; BARBOSA, E. **Padrões em Matemática**: uma proposta didática no âmbito do novo programa para o ensino básico. Lisboa: Texto, 2011.

VIEIRA, F; MAGINA, S.; LUNA, A. V. Formação inicial do raciocínio funcional na educação infantil. **REnCiMa**: **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 12, p. 81-98, 2021.

WILSON, P. H.; MOJICA, G; CONFREY, J.Learning trajectories in teacher education: supporting teachers'understanding of students' mathematical thinking. **Journal of Mathematical Behavior**, Amsterdam, v. 32, n. 2, p. 103-121, jun. 2013.

APÊNDICES

APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - PPGE-UEFS

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)

Prezada professora você está sendo convidada para participar da pesquisa "Matemática para o ensino: a construção do conceito de função a partir de uma formação continuada para professores dos Anos Iniciais" que tem como pesquisadora responsável a mestranda Larissa Santana de Almeida, sob orientação do Profª Drª. Ana Virginia de Almeida Luna, do Departamento Ciências Exatas da UEFS. Esta pesquisa faz parte de um projeto interinstitucional, O Raciocínio Algébrico: do diagnóstico do Estudante à Formação do Professor da Educação Infantil e dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, que em Feira de Santana, coordenado por Sandra Maria Pinto Magina, está sendo desenvolvida pelo Grupo de Pesquisa, Núcleo de Estudos em Educação Matemática de Feira de Santana (NEEMFS).Todo o processo de pesquisa será pautado pelas Resoluções CNS 510/2016 e CNS nº 466/2012.A pesquisa terá início em março de 2024 com observações e desenvolvimento de atividades, com previsão de término em abril de 2024. A pesquisa se desenvolverá em espaço formativo, na Universidade Estadual de Feira de Santana, aos sábados, com cronograma previamente acordado com os participantes, para a realização desta pesquisa, será necessário gravar (em áudio e/ou vídeo) todos os momentos, ,realizar registros fotográficos; feitos pela pesquisadora ,bem como acessar fonte dados dos participantes. Como esta pesquisa envolve a produção imagética, individual ou coletiva, informamos que é possível que sua identidade seja revelada em caso deseje. Contudo, esclarecemos que será respeitado o direito ao anonimato, na divulgação dos resultados deste estudo, utilizaremos o pseudônimo escolhido por você ,informações que possam identificá-lo(a) não serão mostradas ou publicadas. Desse modo, caso você concorde em divulgar imagem, solicitamos que assine o termo de autorização de uso de imagem, que segue anexado a este documento. <u>Destacamos que o anonimato só será quebrado caso o termo de autorização de uso de imagem seja assinado.</u> Quanto aos riscos que você poderia sentir esses seriam: a) o desconforto pela presença da pesquisadora durante a formação continuada , que será amenizado pela presença de outros formadores; b) o desconforto em estar sendo filmado, que será amenizado pelo posicionamento da câmera que não colocará em foco rosto do participante c) o constrangimento com eventuais erros ao expressar sua opinião ou entendimento de algum conceito matemático durante a formação ,que será amenizado pela condução da pesquisadora que enfatizará que o participante deverá se expressar caso se sinta confortável, o que debelaremos pela garantia do sigilo absoluto sobre o desempenho do participante .Para a sua segurança , todo o material produzido nesta pesquisa será consultado apenas por integrantes do NEEMFS ,e guardado por cinco anos, nos arquivos pessoais da pesquisadora, bem como nos arquivos do grupo de pesquisa NEEMFS . Dentre os benefícios dessa pesquisa está sua contribuição na apropriação e expansão do conceito de função por parte dos professores. Informamos que esta pesquisa não terá nenhum custo e você terá direito de buscar indenização no caso de eventual dano decorrente da mesma, conforme o disposto na Res. 466/12 item IV.3 letra g. Você tem direito de se recusar a participar da pesquisa e de desistir e retirar o seu consentimento em qualquer momento da pesquisa sem que isto traga qualquer penalidade ou represálias de qualquer natureza e sem que haja prejuízo para você. Ressaltamos ainda que o/a participante da pesquisa receberá assistência integral e imediata, de forma gratuita, pelo tempo que for necessário, em caso de danos decorrentes da pesquisa (Resolução CNS nº 510, de 2016, Capítulo I, Art. 2º, Inciso II; e Capítulo III, Seção II, Artigo 17º, Inciso V. Resolução CNS nº 466/2012, item II.2 letras o, item IV.3 letra c, item V.6. Ao fim da pesquisa, será realizada uma mostra para divulgação e devolução dos resultados. Solicitamos a autorização para publicação em revistas, congressos e outros meios dos resultados encontrados a partir desse estudo. Desde já nos disponibilizamos a esclarecer dúvidas antes, durante e após a realização desta pesquisa. Se você concorda em participar, assine conosco este termo, em duas vias (após a aprovação do CEP): uma é sua e a outra ficará sob nossos cuidados e será mantida também nos nossos arquivos da pesquisa. Caso você se recusar a participar, não será penalizado de forma alguma. Em caso de dúvida em relação aos princípios éticos desta pesquisa, indicamos contato com o Comitê de Ética da UEFS, pelo endereço eletrônico (cep@uefs.br) ou pelo ou pelo telefone: (75) 3161-8124, de Segunda a Sexta, de 13h30 á 17h30, no módulo 1, MA 17, Av. Transnordestina S/N, Novo Horizonte – Feita de Santana/BA.

Pseudônimo:_____________________

- ○ Sim, autorizo a minha participação nessa pesquisa.
- ○ Não autorizo a minha participação nessa pesquisa.

Feira de Santana- Ba, _______ de _____________ de __________

____

Pesquisadora Responsável

____

Nome do Participante

____

Assinatura do Responsável