

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

***QUILTS DA LIBERDADE: UM ESTUDO DE
TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS UTILIZANDO
GEOGEBRA***

Fabiana Silva Lopes

Orientador: Prof. Dr. Maurício de Araújo Ferreira

Feira de Santana - Bahia
Dezembro de 2025

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

***QUILTS DA LIBERDADE: UM ESTUDO DE
TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS UTILIZANDO
GEOGEBRA***

Fabiana Silva Lopes

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre**.

Orientador: Prof. Dr. Maurício de Araújo Ferreira

Feira de Santana
Dezembro de 2025

L852 Lopes, Fabiana Silva

Quilts da Liberdade : um estudo de transformações geométricas
utilizando GeoGebra / Fabiana Silva Lopes. – 2025.
58 f.: il.

Orientador: Maurício de Araújo Ferreira.

Dissertação (mestrado) – Programa de Pós-Graduação Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Departamento
de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de
Santana, 2025.

1. Matemática – Ensino médio. 2. Quilts da Liberdade. 3. GeoGebra.
4. Sequência didática. 5. Etnomodelagem. I. Título. II. Ferreira, Maurício de
Araújo, orient. III. Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). IV. Departamento de Ciências
Exatas. V. Universidade Estadual de Feira de Santana.

CDU 51:371.3



Universidade Estadual de Feira de Santana
Departamento de Ciências Exatas
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



**Ata da Sessão pública de defesa de dissertação da discente Fabiana Silva Lopes
do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da
Universidade Estadual de Feira de Santana**

Aos onze dias do mês de dezembro de dois mil e vinte cinco, às 10 horas, na sala MT55 localizada no Módulo 5 - UEFS, ocorreu a defesa da dissertação apresentada sob o título **“QUILTS DA LIBERDADE: UM ESTUDO DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS UTILIZANDO GEOGEBRA”**, da discente **Fabiana Silva Lopes**, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: **Maurício de Araújo Ferreira** (Orientador, UEFS), **Darlan Ferreira de Oliveira** (UEFS) e **Jailson de Araújo Rodrigues** (IFBA). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pela discente e das arguições dos examinadores. Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito aprovado. Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT. Feira de Santana, 11 de dezembro de 2025.

Documento assinado digitalmente
gov.br MAURICIO DE ARAUJO FERREIRA
Data: 30/01/2026 17:32:01-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Prof. Dr. Maurício de Araújo Ferreira (Orientador, UEFS)

Documento assinado digitalmente
gov.br DARLAN FERREIRA DE OLIVEIRA
Data: 02/02/2026 15:02:17-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Prof. Dr. Darlan Ferreira de Oliveira (UEFS)



Documento assinado digitalmente
JAILSON DE ARAUJO RODRIGUES
Data: 09/02/2026 11:54:25-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Prof. Dr. Jailson de Araújo Rodrigues (IFBA)

Visto do Coordenador:



Documento assinado digitalmente
JEAN FERNANDES BARROS
Data: 09/02/2026 13:46:20-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Agradecimentos

A Deus, por iluminar meu caminho, concedendo-me saúde, força e serenidade para perseverar durante toda esta trajetória acadêmica. Obrigada por colocar tantas pessoas maravilhosas e especiais na minha vida que me acompanharam e participaram desta caminhada comigo.

Aos meus familiares, amigos e professores, por fazerem parte do encerramento desse ciclo, tenho muita gratidão por todo o apoio e suporte que recebi em toda essa jornada. Obrigada por serem pessoas tão especiais para mim.

Aos meus filhos Maria Antônia e Artur, fonte permanente de inspiração, razão maior da minha dedicação e esforço, além de serem a motivação diária para seguir em frente e buscar sempre o melhor.

Aos meus pais José e Solange, exemplos de amor, honestidade e trabalho, que sempre acreditaram em mim e me ensinaram o valor da educação e da persistência.

Aos meus irmãos Vanessa, Marcos, Maurício e Mariana, pelo amor, carinho, apoio e palavras de incentivo que me fortaleceram ao longo desta caminhada.

Ao meu companheiro Jurandir, pela compreensão, paciência e apoio incondicional ao longo desta caminhada. Sua parceria foi fundamental para que eu pudesse conciliar os desafios pessoais e acadêmicos e conseguir vencer esta etapa.

Aos colegas do PROFMAT/UEFS, pela convivência, troca de experiências e pelo companheirismo que tornaram esta trajetória mais leve e enriquecedora, em especial aos queridos Marcelo e Jociene.

Aos professores do PROFMAT/UEFS, pela dedicação, competência e por compartilharem seus conhecimentos com tanto zelo e entusiasmo, contribuindo de forma essencial para a minha formação acadêmica e profissional.

Ao meu querido orientador, Professor Dr. Maurício de Araujo Ferreira, sou grata por ter me incentivado, pela imensa paciência, pelo conhecimento compartilhado, pela compreensão nos momentos em que estive com dificuldades e pelo total apoio na orientação, na construção e conclusão do nosso trabalho.

Agradeço especialmente às minhas amigas Tatiane, Luciana, Daiane e ao

meu amigo Sidney, pelo apoio, carinho, dicas, incentivos e aprendizado. À querida Toninha, por contar sempre com seu apoio.

Obrigada a cada um de vocês por fazerem parte da minha vida e por me ajudarem a realizar mais este sonho. Que possamos continuar juntos em novas jornadas.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização desta dissertação, registro meu sincero agradecimento e reconhecimento.

Resumo

A matemática, no campo pedagógico, por vezes é compreendida como uma ciência árida e abstrata, centrada na produção de conhecimentos relacionados a fórmulas e números. Em contraposição a essa perspectiva, a etnomodelagem propõe-se a investigar a relação entre aspectos culturais e conceitos acadêmicos da matemática, possibilitando a análise de situações-problema presentes no cotidiano dos sujeitos. Nesse contexto, destacam-se os *Quilts da Liberdade*, pequenas colchas de retalhos utilizadas por afro-americanos escravizados antes da Guerra Civil dos Estados Unidos como instrumentos de comunicação, resistência e transmissão de mensagens codificadas a fugitivos que buscavam a liberdade por meio da Ferrovia Subterrânea. Esses artefatos culturais exploravam padrões simétricos e transformações geométricas, evidenciando a presença da matemática em manifestações culturais e em seus diferentes usos por grupos sociais distintos. Assim, este trabalho propõe o estudo das transformações geométricas a partir dos *Quilts da Liberdade*, bem como o desenvolvimento de um jogo educacional intitulado *Quilts da Liberdade*, com o objetivo de favorecer a visualização e a manipulação de objetos geométricos, potencializando uma aprendizagem matemática ativa, investigativa e contextualizada.

Palavras-chave: Etnomodelagem. Educação Matemática. Sequência Didática

Abstract

Mathematics, in the pedagogical field, is often perceived as an arid and abstract science, centered on the production of knowledge related to formulas and numbers. In contrast to this perspective, ethnomodeling seeks to investigate the relationship between cultural aspects and academic mathematical concepts, enabling the analysis of problem situations present in individuals' daily lives. In this context, the Freedom Quilts stand out as small patchwork quilts used by enslaved African Americans before the American Civil War as instruments of communication, resistance, and transmission of coded messages to fugitives seeking freedom through the Underground Railroad. These cultural artifacts explored symmetric patterns and geometric ideas, highlighting the presence of mathematics in cultural manifestations and in its diverse uses by different social groups. Thus, this study proposes an investigation of geometric concepts based on the Freedom Quilts, as well as the development of a homonymous educational game aimed at fostering the visualization and manipulation of geometric objects, promoting an active, investigative, and contextualized approach to mathematics learning.

Keywords: Ethnomodelling. Mathematics Education. Didactic Sequence.

Sumário

Agradecimentos	iv
Resumo	vi
Abstract	vii
Sumário	ix
Introdução	1
1 A Base Nacional Curricular Comum e as Transformações Geométricas	10
2 Transformações Geométricas	13
2.1 Transformações no plano	13
2.2 Isometrias no plano	14
2.3 Translação	15
2.4 Reflexão	19
2.5 Rotações	22
3 Sequência Didática	25
3.1 Conteúdos previstos	25
3.2 Metodologia	25
3.3 Objetivos	26
3.3.1 Objetivo geral	26
3.3.2 Objetivos específicos	26
3.3.3 Justificativa e relevância da pesquisa	26
3.4 Tempo destinado	27
3.5 Recursos didáticos	27
3.6 Cronograma	28
3.7 Avaliação	29

4 Produto Educacional no Geogebra	31
4.1 Jogo <i>Quilts da Liberdade</i> no Geogebra	33
4.2 Detalhamento e regras do jogo <i>Quilts da Liberdade</i>	34
4.3 Desafios propostos	37
4.3.1 Casos explorados nos desafios propostos do Jogo <i>Quilts da Liberdade</i>	39
Conclusão	43
Referências Bibliográficas	45
APÊNDICE A	48
APÊNDICE B	49
APÊNDICE C	53
APÊNDICE D	57

Lista de Figuras

1	<i>Quilt</i> Escada de Jacó da Estrada de Ferro Subterrânea	4
2	Blocos de <i>quilts</i> utilizados para envio de mensagens aos escravidados fugitivos nos Estados Unidos no século XIX	5
3	A chave inglesa	6
4	Rumo ao Canadá pela pata do urso	6
5	Trilha até a encruzilhada	6
6	Gravata borboleta de cetim	7
7	<i>Shoofly</i>	7
8	Gansos voadores ficam	7
9	Siga as estrelas	8
10	<i>Quilt Shoofly</i> confeccionado com nove blocos	8
2.1	A translação determinada pelo vetor v leva toda reta r numa reta paralela e transforma o sistema OXY no sistema $O'X'Y'$, cujos eixos são paralelos a, e têm o mesmo sentido de, OX e OY	16
2.2	Translação do polígono M	17
2.3	As coordenadas de $P_1 = T(P)$ no sistema $O'X'Y'$ são iguais as coordenadas de P no sistema OXY	18
2.4	Reflexão do polígono P	21
2.5	Etnomodelo ético da reflexão dos designs sobre a reta $y = -x$	22
2.6	A rotação de centro O e ângulo α leva P em P_1	23
4.1	Interface do GeoGebra acessada pelo site https://www.geogebra.org/classic	32
4.2	Cenário do jogo <i>Quilts da Liberdade</i>	34
4.3	Posições ocupada pelos triângulos retângulos isósceles no jogo <i>Quilts da Liberdade</i>	36
4.4	Bloco de <i>quilt</i> de quatro peças que apresenta simetria de rotação de 90° mas não possui reflexão em relação aos eixos horizontal e vertical.	39

4.5	Bloco de <i>quilt</i> de seis peças que apresenta simetria de rotação de 90° mas não possui reflexão em relação aos eixos horizontal e vertical.	39
4.6	Bloco de <i>quilt</i> de oito peças que apresenta simetria de rotação de 90° mas não possui reflexão em relação aos eixos horizontal e vertical.	40
4.7	Bloco de <i>quilt</i> de seis peças que apresenta reflexão em relação aos eixos horizontal e vertical, simetria de rotação de 90°	40
4.8	Bloco de <i>quilt</i> de oito peças que apresenta reflexão em relação aos eixos horizontal e vertical, simetria de rotação de 90°	41
4.9	Bloco de <i>quilt</i> de seis peças que apresenta simetria de reflexão em relação aos eixos horizontal e vertical, simetria de rotação de 180° sem a simetria de rotação de 90°	41
4.10	Bloco de <i>quilt</i> de oito peças que apresenta simetria em relação ao eixo vertical, mas sem simetria em relação ao eixo horizontal e sem simetria de rotação de 90° e simetria de rotação de 180° .	42

*

Introdução

Historicamente, a ciência matemática tem sido apresentada como uma formulação abstrata e centrada em figuras eurocêtricas. Na historiografia, esse modo de apreensão foi consolidado como oficial desde Eudemo de Rhodes, aluno da escola aristotélica, cujos relatos afirmavam que aritmética, geometria e a astronomia proviam de uma origem grega, ou no máximo, de uma criação nas terras mediterrâneas por volta de 335 a. C. (MIGUEL; MIORIM, 2002).

Atualmente, com mais de um milênio de diferença, é possível observar e afirmar que a matemática é uma construção cultural plural, marcada por diferentes usos e significados. O processo de ensino-aprendizagem dessa ciência vem sendo revisto na contemporaneidade, especialmente ao incorporar propostas contextualizadas de atividades e de resolução de problemas reais. Esse aspecto é fundamental, pois permite que os estudantes compreendam conceitos, fórmulas e raciocínios relacionados aos seus próprios contextos culturais. A ideia de que as práticas matemáticas locais são produtos contextuais, frutos de seus usos e sentidos socialmente compartilhados, demonstra que o conhecimento matemático pode ser estimulado de múltiplas maneiras (D'AMBROSIO, 1990).

Este estudo baseia-se na proposta da Etnomodelagem, uma abordagem que busca investigar as ideias, práticas e procedimentos utilizados por membros de diferentes grupos culturais, bem como compreender as maneiras pelas quais esses grupos elaboram e aplicam práticas matemáticas em seu cotidiano. Uma forma de ilustrar a aplicação da etnomodelagem ocorre por meio do uso dos *Quilts da Liberdade*. Os *quilts* são cobertores confeccionados em várias camadas, geralmente combinando motivos decorativos da arte têxtil, pontos e acolchoamentos. À primeira vista, podem parecer apenas colchas de retalhos mais elaboradas; contudo, essa arte possui significativo valor cultural e histórico.

Geralmente, um *quilt* é composto por três sobreposições: a parte superior, correspondente ao topo da colcha, é formada por pedaços de retalhos costu-

rados em padrões diversos; a camada intermediária, denominada manta, é destinada ao enchimento — produzido em algodão, lã, poliéster ou em misturas de tecidos — cuja função é conferir volume e aquecer o usuário; por fim, o forro constitui o acabamento do cobertor. Essa sobreposição presente na colcha é produzida por meio do pesponto, uma técnica de costura desenvolvida para criar linhas de pontos visíveis na peça, cujo objetivo é proporcionar um acabamento durável e resistente.

Os *quilts* contêm mensagens culturais de natureza qualitativa e quantitativa, que são significativas para os membros dos grupos culturais que realizam essa prática. Do ponto de vista qualitativo, essas colchas expressam significados simbólicos, históricos e identitários, refletindo saberes transmitidos por gerações e estratégias de resistência das comunidades afro-americanas escravizadas. Sob uma perspectiva quantitativa, os *quilts* revelam a presença de princípios matemáticos estruturais, como regularidade, simetria, padrão e medida. As composições formadas por triângulos, quadrados e outras figuras planas evidenciam relações que podem ser interpretadas em termos de transformações geométricas, tais como translações, rotações e reflexões. A construção de cada bloco demanda planejamento, contagem e cálculo, evidenciando processos de raciocínio matemático vinculados à prática artesanal.

Os padrões decorativos e simétricos exibidos nesses artefatos culturais constituem expressões de crenças, valores, comportamentos, tabus e religiões desenvolvidos por esses grupos ao longo de sua história (ROSA; OREY, 2009).

No que se refere ao seu valor histórico-social, os *quilts* foram utilizados como meio de comunicação entre afro-americanos escravizados antes da Guerra de Secessão (1861–1865). A Guerra Civil dos Estados Unidos configura-se como um marco fundamental na história política e social do país, evidenciando profundas contradições entre os estados do Norte e do Sul. Segundo McPherson (1988), o conflito teve como principal causa a disputa em torno da escravidão e do modelo econômico que deveria orientar o desenvolvimento nacional: enquanto o Norte, industrializado e abolicionista, defendia a expansão do trabalho livre, o Sul, agrário e escravagista, buscava preservar sua estrutura produtiva baseada na mão de obra escravizada.

A guerra teve início com a secessão de onze estados sulistas, que formaram os Estados Confederados da América, sob a liderança de Jefferson Davis. A vitória da União, liderada por Abraham Lincoln, resultou na abolição da escravidão, formalizada pela 13^a Emenda Constitucional, na reintegração dos estados confederados e na consolidação de um Estado nacional unificado. Esse

processo, conforme destaca Foner (2011), redefiniu os conceitos de liberdade, cidadania e democracia nos Estados Unidos.

Nesse contexto (DELFIOL; ROSA, 2021) apud (Burns & Bouchard, 2003) defende que a utilização dos *quilts* havia sido crucial, pois, esses cobertores indicavam códigos secretos com padrões geométricos particulares tracejando rotas de fuga, pontos de apoio ou sinais de alertas, utilizada na *Underground Railroad* (Estrada de Ferro Subterrânea). Esse termo chegou de uma história de um fazendeiro perseguindo um fugitivo que testemunhou que o escravizado desapareceu em algum tipo de ferrovia subterrânea.

A Estrada de Ferro Subterrânea foi um sistema de fuga organizado por afro-americanos alforriados e pelos brancos simpatizantes do movimento abolicionista, para que os escravizados encontrassem abrigo, comida, água potável, lugares seguros para se esconder e caminhos seguros a seguir enquanto se deslocavam das fazendas de algodão dos estados sulistas que resistiam a abolição da escravatura para os estados livres do norte e o Canadá. As casas seguras ao longo do caminho eram conhecidas como estações, aqueles que guiavam os fugitivos eram chamados de condutores e os próprios fugitivos eram chamados de passageiros (DELFIOL; ROSA, 2021) apud (Burns & Bouchard, 2003, pp. 32).

Os *quilts* eram chamados de *Quilts da Liberdade* e eram costurados para servir como um mapa codificado para os escravizados fugitivos memorizarem. Os *quilts* frequentemente eram pendurados em um varal, varanda ou balcão para simbolizar o que fazer ou onde ir, utilizando diferentes desenhos que indicavam segurança, perigo, pistas e marcos para guiá-los à liberdade. Esse método de comunicação foi muito eficaz, pois caçadores de recompensas aparentemente nunca perceberam os *quilts* e suas mensagens. A Figura 1 mostra o *quilt* Escada de Jacó da Estrada de Ferro Subterrânea, cujo desenho era utilizado para enviar a seguinte mensagem aos escravizados fugitivos: Prepare-se para subir para um lugar mais alto, mais seguro, ou seja, para seguir adiante no caminho da liberdade.

Ainda segundo (ROSA; OREY, 2017a), os padrões utilizados referenciavam um sistema sofisticado de codificações e deveriam ser lidos como expressões de alertas ou caminhos seguros. O que refutava a ideia racista propagada pelo sistema escravagista de que os afro-americanos eram intelectualmente inferiores. Segundo (HOOKS; bell, 2013) durante séculos, a educação foi negada às pessoas negras porque se acreditava que elas não possuíam mente racional. Essa negação fazia parte da estrutura ideológica do racismo. Pessoas escravizados eram proibidas de aprender a ler e escrever em muitos estados do sul

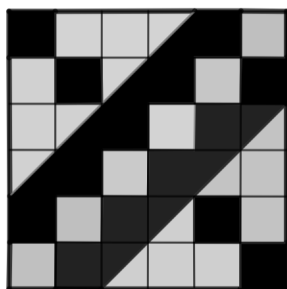


Figura 1: *Quilt* Escada de Jacó da Estrada de Ferro Subterrânea

Fonte: Elaborada pela autora com base em ROSA; OREY (2009)

dos EUA, justamente porque os senhores temiam que a educação incentivasse rebeliões e questionamentos. Apesar disso, muitos escravizados, criaram sistemas de comunicação próprios, músicas com mensagens codificadas (espirituais), e mostraram altos níveis de inteligência, criatividade e organização nas fugas, revoltas e redes de solidariedade. Escravizados alforriados viajavam de uma plantação para outra para ensinar os outros escravizados a tradução dos códigos constantes nos *quilts*. O sistema escravista impedia deliberadamente o acesso à educação e oportunidades, mas não a capacidade intelectual.

A Figura 2, ilustra alguns dos principais blocos e códigos geométricos produzidos para enviar mensagens aos escravizados que fugiam.

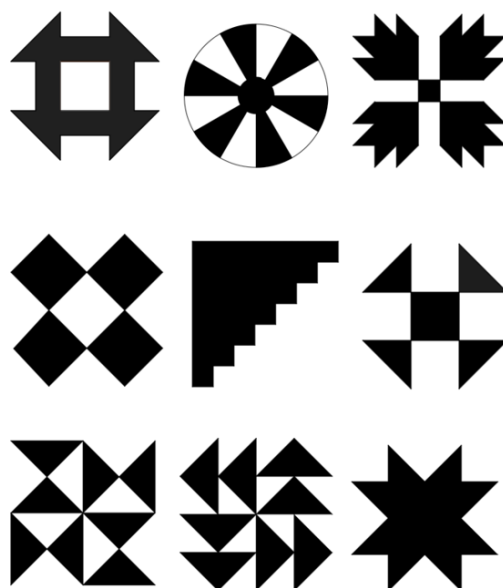


Figura 2: Blocos de *quilts* utilizados para envio de mensagens aos escravizados fugitivos nos Estados Unidos no século XIX

Fonte: Elaborada pela autora com base em ROSA; OREY (2009)

É importante enfatizar o trabalho de Ozella McDaniel Williams, uma mulher afro-americana, costureira que confeccionava e vendia esses cobertores na Carolina do Sul. A senhora Williams, em entrevista fornecida a um projeto de pesquisa (realizado nos anos 2000) acerca das Ferrovias Subterrâneas comentou aos turistas que visitavam sua cidade natal, Charleston, que tais códigos dos *quilts* confeccionados por ela sinalizava um ato específico a ser realizado pelo fugitivo no tempo certo. Além disso, podiam funcionar como elementos padronizados secundários de ações a serem performadas na fuga, uma espécie de estratégia geométrica (ROSA; Orey, 2018). Ela havia identificado pelo menos dez padrões utilizados no código dos *quilts*, os quais sinalizavam ações específicas destinadas às pessoas escravizadas em determinados momentos. Nas Figuras de 3 a 9, apresentadas nesta seção, identificamos a representação de alguns desses padrões. A Figura 10 apresenta *Quilt ShooFly* confeccionado com nove blocos.

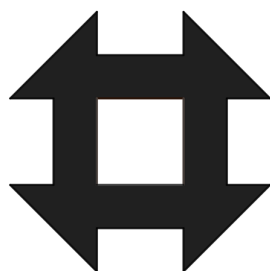


Figura 3: A chave inglesa

Fonte: Elaborada pela autora com base em ROSA; OREY (2009)

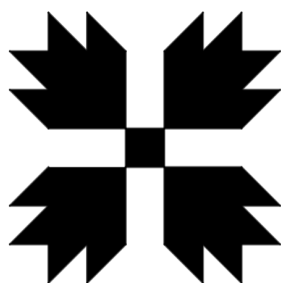


Figura 4: Rumo ao Canadá pela pata do urso

Fonte: Elaborada pela autora com base em ROSA; OREY (2009)

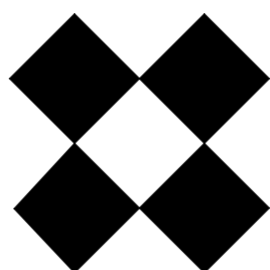


Figura 5: Trilha até a encruzilhada

Fonte: Elaborada pela autora com base em ROSA; OREY (2009)

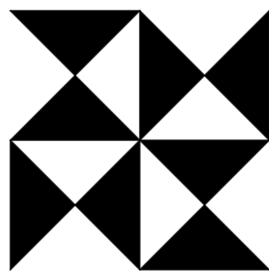


Figura 6: Gravata borboleta de cetim

Fonte: Elaborada pela autora com base em ROSA; OREY (2009)

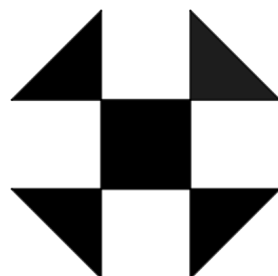


Figura 7: *Shoofly*

Fonte: Elaborada pela autora com base em ROSA; OREY (2009)

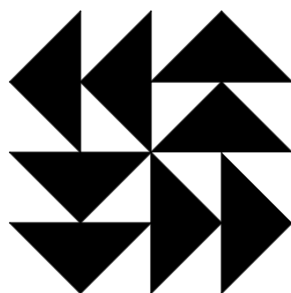


Figura 8: Gansos voadores ficam

Fonte: Elaborada pela autora com base em ROSA; OREY (2009)

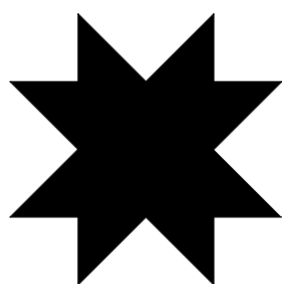


Figura 9: Siga as estrelas

Fonte: Elaborada pela autora com base em ROSA; OREY (2009)

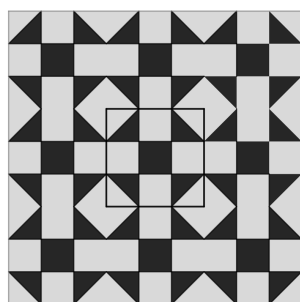


Figura 10: *Quilt ShooFly* confeccionado com nove blocos

Fonte: Elaborada pela autora com base em ROSA; OREY (2009)

Usar os *Quilts da Liberdade* para o desenvolvimento de uma sequência didática vai consistir em trabalhar os conceitos geométricos de simetria e as transformações geométricas presentes nesses artefatos culturais. Além do que, por suas características peculiares, esses artefatos são objetos interdisciplinares situados entre Arte, História e Matemática. A produção e o uso desses artefatos culturais demonstram habilidades sofisticadas de planejamento, abstração e simbolismo, evidenciando que a capacidade intelectual dos afrodescendentes sempre existiu, mas foi sistematicamente desvalorizada e invisibilizada. Assim, o estudo e a valorização desses objetos não apenas enriquecem a compreensão histórica e artística, mas também funcionam como prova concreta da resistência cultural e da inteligência criativa das populações negras, desafiando os discursos racistas que durante séculos legitimaram a opressão. Os códigos dos *Quilts da Liberdade* da Estrada de Ferro Subterrânea era uma forma engenhosa, altamente criativa e complexa de comunicação entre escravizados e casas seguras, e eram transmitidos aos

membros das famílias dos escravizados, por seus ancestrais, através das gerações.

Este estudo busca, por um lado, promover a valorização de saberes matemáticos presentes em diferentes tradições culturais e, por outro, ampliar a compreensão das práticas desenvolvidas por povos afro-americanos escravizados. Assim, as atividades de ensino-aprendizagem promovidas serão realizadas por meio do GeoGebra¹, o *software* permite a exploração, identificação e construção dos mesmos padrões geométricos presentes nos *quilts*. A ideia dessa proposta é funcionar como instrumento imersivo em que os estudantes do Ensino Médio podem apreender as transformações geométricas: reflexão, translação, simetria e manipular polígonos/blocos de modos variados, observando encaixes e investigando as singularidades dos padrões dos *quilts* e nesse contexto, foi desenvolvido um produto educacional digital no GeoGebra, intitulado jogo *Quilts da Liberdade*, que possibilita a experimentação interativa desses conceitos matemáticos em diálogo com a dimensão cultural e histórica dos *Quilts da Liberdade*. Tal recurso visa potencializar a aprendizagem ativa e investigativa, promovendo a articulação entre Matemática, Arte e História por meio da valorização de práticas culturais como expressões legítimas de conhecimento.

¹Para conhecer um pouco mais desse software, confira sua plataforma de recursos: <https://www.geogebra.org>

Capítulo 1

A Base Nacional Curricular Comum e as Transformações Geométricas

A chamada Base Nacional Curricular Comum (BNCC) aborda a questão das transformações geométricas em pelo menos três tipos principais:

- **Translação:** o movimento de uma figura ao longo de uma reta sem qualquer rotação ou alteração de forma.
- **Rotação:** é a transformação que gira a figura ao redor de um ponto fixo, denominado centro de rotação, esse é determinado por um ângulo. O ângulo e o sentido, seja ele horário ou anti-horário são essenciais para sua definição.
- **Reflexão (Simetria)** é a transformação geométrica que cria uma imagem simétrica de uma figura em relação a uma reta chamada eixo de simetria. A imagem refletida então é igual a figura originária, mas, encontra-se invertida quanto ao eixo.

Nas orientações gerais da BNCC para o Ensino Médio, no quesito de ensino da matemática, se enfatiza a importância do desenvolvimento de competências e habilidades possibilitadoras para que os alunos compreendam, analisem e apliquem os conceitos matemáticos e de outras áreas para resolver problemas complexos e se inserir socialmente.

Essa forma integrada de abordagem, interdisciplinar por sua natureza, aponta a tentativa de formar nos estudantes uma necessária consciência dos desafios da realidade histórica e nesse sentido promove a integração de conhecimento

por meio do raciocínio lógico, a reflexão crítica sobre a sociedade e a criatividade. As transformações geométricas são conceitos estratégicos no ensino da matemática, especificamente no Ensino Fundamental e Médio. Elas, se definem como um campo da geometria e são descritas com o objetivo de fomentar a resolução de problemas geométricos pela interpretação das figuras no plano. O assunto das transformações isométricas (movimentos que preservam a distância e os ângulos em um objeto geométrico) é viável por acreditar que: os conteúdos, em tese já foram estudados nas séries anteriores, e por consequência, constituem um ponto basilar para complexificar as competências aprendidas. Os conteúdos previstos já foram descritos nos parágrafos acima: Translação, Rotação e Reflexão (Simetria), esses estão presentes no conteúdo curricular do oitavo ano do Ensino Fundamental II, adscrito nas seguintes habilidades:

(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90° , 60° , 45° e 30° e polígonos regulares;

(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica, segundo consta na BNCC (Brasil, 2018, p. 200-204).

Esses saberes também se relacionam com as competências e habilidades do conteúdo curricular do Ensino Médio (EM13MA105 e EM13MAT505).

A exploração das transformações isométricas no contexto da BNCC pode ser potencializada pelo uso do *software* GeoGebra, que oferece um ambiente visual interativo para observar as propriedades de cada transformação, preservando distâncias e ângulos, como definem as isometrias.

Nesse contexto, foi desenvolvido o jogo *Quilts da Liberdade*, um produto educacional que permite aos estudantes do Ensino Médio aplicar reflexão, translação e rotação para construir composições geométricas inspiradas nos padrões dos *quilts*. Dessa forma, a proposta promove uma aprendizagem ativa, contextualizada e interdisciplinar, conectando Matemática, História e Arte por meio de objetos culturais significativos.

(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).

(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados. (Brasil, 2018, p. 533-541).

As habilidades e competências enfatizadas na BNCC relacionadas ao conhecimento geométrico no geral estão relacionadas à análise e compreensão dos efeitos das transformações supracitadas, a aplicação dessas transformações na construção e modificação de figuras, além do estudo de suas propriedades. Por exemplo, quando uma figura qualquer sofre translação, rotação ou reflexão ela mantém inalteradas suas propriedades de comprimento e área, mas pode ter sua orientação completamente modificada. Identificar as simetrias, as propriedades das figuras geométricas e desenvolver o raciocínio lógico para pensar os problemas relativos as transformações geométricas permite aos estudantes aplicar novos entendimentos sobre a realidade circundante, e por assim considerar, serve para aprofundar as noções geométricas previamente desenvolvidas na educação fundamental.

Capítulo 2

Transformações Geométricas

As transformações geométricas constituem um dos temas centrais da Geometria, pois permitem compreender as relações de movimento, forma e simetria no plano e no espaço. Estudar essas transformações é essencial para reconhecer as propriedades que se preservam sob operações como translações, rotações, reflexões. A Geometria não se restringe à descrição de figuras, mas envolve a análise das correspondências entre pontos e conjuntos, enfatizando as propriedades que caracterizam cada tipo de transformação. Assim, este capítulo dedica-se à apresentação e à discussão das transformações geométricas conforme a abordagem proposta por (LIMA, 2005), e evidenciando seus fundamentos teóricos e suas aplicações na compreensão das estruturas geométricas.

As transformações geométricas de figuras geométricas planas que preservam as medidas de comprimento dos lados e as medidas de abertura dos ângulos são chamadas transformações geométricas isométricas ou isometrias.

2.1 Transformações no plano

Uma transformação T no plano Π é uma função $T : \Pi \rightarrow \Pi$, isto é uma correspondência que associa a cada ponto P do plano outro ponto $P_1 = T(P)$ do plano, chamado sua imagem por T . A transformação $T : \Pi \rightarrow \Pi$ diz-se *injetiva* quando pontos distintos $P \neq Q$ em Π têm sempre imagens distintas $T(P) \neq T(Q)$. Em outras palavras, T é injetiva quando $T(P) = T(Q)$ implica $P = Q$. T diz-se *sobrejetiva* quando todo ponto P_1 em Π é imagem de pelo menos um ponto P , ou seja, para todo P_1 em Π existe P em Π tal que $T(P) = P_1$.

Uma transformação $T : \Pi \rightarrow \Pi$ chama-se *bijetiva*, ou uma *bijeção*, quando é ao mesmo tempo injetiva e sobrejetiva. Isto significa que para todo ponto P_1 em Π existe um único ponto P em Π tal que $T(P) = P_1$.

Uma transformação bijetiva $T : \Pi \rightarrow \Pi$ possui uma inversa $T^{-1} : \Pi \rightarrow \Pi$. Para todo P_1 em Π , sua imagem $T^{-1}(P_1)$ pela inversa T^{-1} é o único ponto P de Π tal que $T(P) = P_1$.

Dadas duas transformações $S, T : \Pi \rightarrow \Pi$, a *composta* $S \circ T : \Pi \rightarrow \Pi$ é uma transformação que associa a cada ponto P do plano Π o ponto $S(T(P))$. Portanto, por definição, $(S \circ T)(P) = S(T(P))$. Ou seja, $S \circ T$ consiste em aplicar primeiro T e depois S .

Uma vez que um sistema de coordenadas em Π tenha sido estabelecido, uma transformação T pode ser descrita por suas *equações*, isto é, pelas expressões das coordenadas (x_1, y_1) do ponto $P_1 = T(P)$, obtido pela aplicação de T ao ponto $P(x, y)$.

2.2 Isometrias no plano

Definição 2.1. Uma isometria do plano Π é uma transformação $T : \Pi \rightarrow \Pi$ que preserva distâncias. Mais precisamente, T é uma isometria quando se tem

$$d(T(P), T(Q)) = d(P, Q)$$

para quaisquer pontos P, Q no plano Π

No que se segue, veremos diversos exemplos de isometrias e tomando algumas propriedades fundamentais as quais algumas serão demonstradas e outras apenas mencionadas, temos:

Proposição 2.2. *Toda isometria $T : \Pi \rightarrow \Pi$ é injetiva.*

Com efeito, se $T(P) = T(Q)$ então

$$d(P, Q) = d(T(P), T(Q)) = 0,$$

logo $P = Q$.

Sejam $T : \Pi \rightarrow \Pi$ uma isometria e P, Q pontos distintos de Π . Se $T(P) = P_1$ e $T(Q) = Q_1$ então T transforma todo ponto R do segmento PQ num ponto R_1 do segmento P_1Q_1 .

Com efeito, como R pertence ao segmento PQ , temos

$$d(P, Q) = d(P, R) + d(R, Q) = 0.$$

Sendo T uma isometria, temos $d(P_1, Q_1) = d(P, Q)$, $d(P_1, R_1) = d(P, R)$ e $d(R_1, Q_1) = d(R, Q)$. Logo

$$d(P_1, Q_1) = d(P_1, R_1) + d(R_1, Q_1).$$

Portanto R_1 pertence ao segmento de reta P_1Q_1 .

A propriedade acima diz que toda isometria leva pontos colineares em pontos colineares e, mais ainda, preserva a ordenação desses pontos colineares. Daí resulta a propriedade seguinte.

Proposição 2.3. *A imagem de uma reta r por isometria T é uma reta $r_1 = T(r)$.*

Proposição 2.4. *Uma isometria transforma retas paralelas em retas paralelas.*

Proposição 2.5. *Toda isometria transforma um triângulo retângulo noutro triângulo retângulo.*

Com efeito, sejam $T : \Pi \rightarrow \Pi$ uma isometria e ABC um triângulo retângulo em A , Pondo $A_1 = T(A)$, $B_1 = T(B)$ e $C_1 = T(C)$, o Teorema de Pitágoras assegura que

$$d(B, C)^2 = d(A, B)^2 + d(A, C)^2.$$

Como T preserva distâncias, segue-se daí que

$$d(B_1, C_1)^2 = d(A_1, B_1)^2 + d(A_1, C_1)^2.$$

Em outras palavras, as isometrias transformam retas perpendiculares em retas perpendiculares, ou seja, preservam ângulos retos.

Mais geralmente, dado quaisquer ângulo $\widehat{BAC}$, sejam $A_1 = T(A)$, $B_1 = T(B)$ e $C_1 = T(C)$. Os triângulos ABC e $A_1B_1C_1$ têm lados iguais pois T preserva distâncias. Logo têm ângulos iguais. Em particular, $\widehat{BAC} = \widehat{B_1A_1C_1}$. Portanto:

Proposição 2.6. *Uma isometria preserva quaisquer ângulos.*

A translação, a reflexão e a rotação são exemplos de isometria.

2.3 Translação

As isometrias mais simples são as translações. A translação $T_v : \Pi \rightarrow \Pi$, determinada pelo vetor v , é a transformação que leva cada ponto P do plano Π no ponto $T_v(P) = P + v$. Como sabemos, se $v = \vec{AB}$ então $P + v = Q$ é o ponto tal que o segmento orientado PQ é equipolente a AB .

Se, num dado sistema de eixos ortogonais, as coordenadas de v são (α, β) então, para cada ponto $P = (x, y)$ tem-se $T_v(P) = (x + \alpha, y + \beta)$.

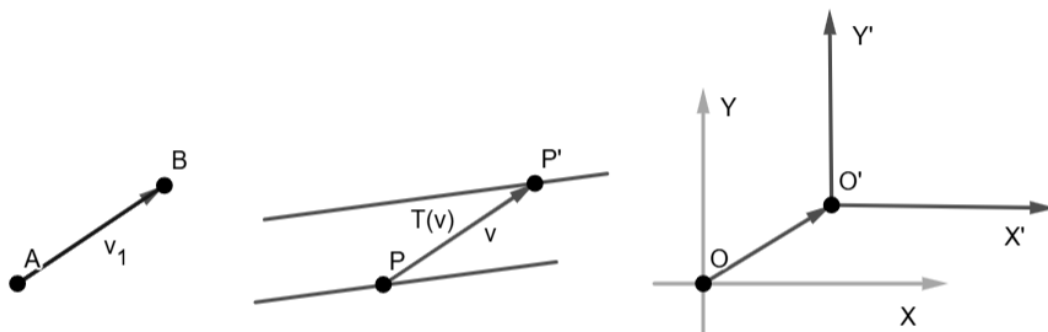


Figura 2.1: A translação determinada pelo vetor v leva toda reta r numa reta paralela e transforma o sistema OXY no sistema $O'X'Y'$, cujos eixos são paralelos a, e têm o mesmo sentido de, OX e OY .

Fonte: Elaborada pela autora com base em LIMA (2005, p. 142)

A translação T_v transforma toda figura F numa figura $T_v(F) = F'$, cujos pontos $P + v$ são obtidos, transladando-se os pontos P de F pelo mesmo vetor v . Em particular, uma reta r é transformada na reta

$$T_v(r) = r + v = \{P + v; P \in r\}$$

a qual é paralela a v . Um sistema de eixos ortogonais OX e OY é transformado por T_v no sistema $O'X'Y'$, cujos eixos paralelos a, e têm o mesmo sentido que OX e OY .

De um modo geral, qualquer isometria T transforma um sistema de eixos ortogonais OXY noutro sistema de eixos ortogonais $O'X'Y'$. Além disso, T transforma um ponto qualquer P do plano noutro ponto $P_1 = T(P)$, cujas coordenadas no sistema $O'X'Y'$ são as mesmas coordenadas de P no sistema OXY .

Segue-se imediatamente que toda isometria ou translação T é uma transformação sobrejetiva. Como já vimos que T é injetiva, concluímos que T é uma bijeção. Sua inversa T^{-1} é evidentemente uma isometria.

Exemplo 1: Construa o polígono M a partir das coordenadas de seus vértices: $A(0,1)$, $B(1,0)$, $C(2,1)$ e $D(1,2)$. Em seguida, realize as seguintes translações:

- Translação de 2 unidades para a esquerda;
- Translação de 2 unidades para baixo.

Na Figura 2.2, verifica-se o polígono M,

O ponto $A = (0, 1)$ e $v = (-2, -2)$ então $T_v(A) = (-2, -1) = A'$. E assim segue com B, C e D.

Assim, o polígono M, de vértices $A(0, 1)$, $B(1, 0)$, $C(2, 1)$ e $D(1, 2)$, ao ser submetido a uma translação de duas unidades para a esquerda e duas unidades para baixo, assume as seguintes coordenadas:

$A'(-2, -1)$, $B'(-1, -2)$, $C'(0, -1)$ e $D'(-1, 0)$

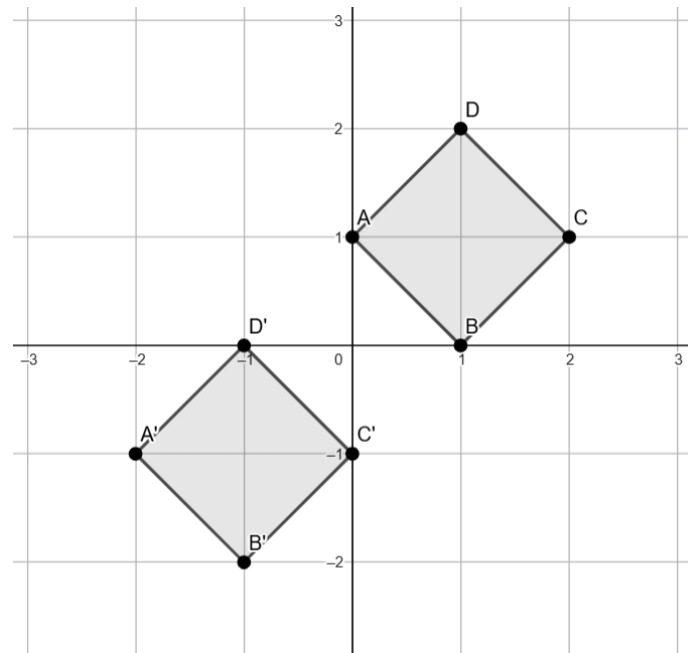


Figura 2.2: Translação do polígono M

Fonte: Elaborada pela autora

Sejam (a, b) as coordenadas de $O' = T(O)$ no sistema OXY e α o ângulo de OX para $O'X'$. Usando as equações de mudança de coordenadas, vemos que as coordenadas (x_1, y_1) do ponto $P_1 = T(P)$ no sistema OXY são dadas por

$$\begin{cases} x_1 = x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha + a \\ y_1 = x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha + b \end{cases} \quad (2.1)$$

ou

$$\begin{cases} x_1 = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha + a \\ y_1 = x \cdot \sin \alpha - y \cdot \cos \alpha + b \end{cases} \quad (2.2)$$

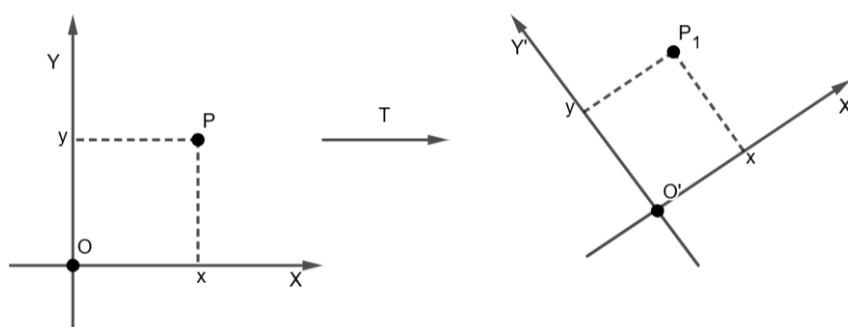


Figura 2.3: As coordenadas de $P_1 = T(P)$ no sistema $O'X'Y'$ são iguais as coordenadas de P no sistema OXY .

Fonte: Elaborada pela autora com base em LIMA (2005, p. 143)

Conforme OXY e $O'X'Y'$ sejam igualmente orientados ou não. No primeiro caso, diz-se que T *preserva* e, no segundo, que T *inverte* a orientação do plano.

Assim, quando se fixa um sistema de eixos ortogonais OXY , uma isometria qualquer do plano transforma o ponto $P = (x, y)$ no ponto $T(P) = P_1 = (x_1, y_1)$ cujas coordenadas, neste mesmo sistema OXY , são dadas pelas equações (2.1) e (2.2) acima, onde (a, b) são as coordenadas de $T(O)$ e α é o ângulo entre OX e $O'X' = T(OX)$.

Em particular, vê-se mais uma vez que toda isometria ou rotação é sobrejetiva pois, as equações (2.1) e (2.2) acima podem ser invertidas: para todo ponto $P_1 = (x_1, y_1)$ existe um ponto $P = (x, y)$ tal que $T(P) = P_1$, as coordenadas de P sendo obtidas das de P_1 por meio das equações (2.1) e (2.2).

Observamos que as equações de uma isometria T têm uma das formas.

$$\begin{cases} x_1 = cx - dy + a \\ y_1 = dx + cy + b \end{cases} \quad (2.3)$$

ou

$$\begin{cases} x_1 = cx + dy + a \\ y_1 = dx - cy + b \end{cases} \quad (2.4)$$

No primeiro caso, a matriz da "parte linear" de T é

$$\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

e, no segundo caso, é

$$\begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}.$$

No primeiro caso, T preserva orientação e o determinante

$$\Delta = c^2 + d^2 = 1 > 0$$

enquanto que, no segundo caso,

$$\Delta = -c^2 - d^2 = -1 < 0.$$

Portanto, o sinal do determinante Δ permite distinguir as isometrias que preservam das que invertem a orientação do plano.

A representação de polígonos no plano cartesiano, com o propósito de determinar as transformações isométricas correspondentes, possibilita a análise das relações existentes entre as coordenadas dos vértices, conforme o tipo de transformação considerada.

Na construção de um *quilt*, conforme ilustrado na Figura 2.2, com o objetivo de analisar as transformações geométricas isométricas de polígonos no plano cartesiano, utiliza-se o software de geometria dinâmica GeoGebra. A escolha do software Geogebra para as construções é feita baseado no fato de que o programa escolhido apresenta todas as funcionalidades necessárias para o desenvolvimento das atividades propostas. Sendo considerada também o auxílio nas explorações iniciais do programa e na identificação das ferramentas e das configurações disponíveis, e na maneira de acessá-las.

2.4 Reflexão

A *reflexão* em torno de uma reta r é a transformação T que faz corresponder a cada ponto P do plano o ponto $P_1 = T(P)$, simétrico de P em relação a r . Tomando um sistema de eixos ortogonais OXY no qual o eixo OX coincida com a reta r em torno da qual se dá a reflexão T , para cada ponto $P = (x, y)$ tem-se $T(P) = P_1 = (x, -y)$.

Daí resulta que toda reflexão é uma isometria pois se $P = (x, y)$ e $Q = (x', y')$, pondo $P_1 = (x, -y)$ e $Q_1 = (x', -y')$, é óbvio que

$$d(T(P), T(Q)) = d(P_1, Q_1) = d(P, Q).$$

A expressão $T(P) = (x, -y)$ quando $P = (x, y)$ mostra também que a reflexão T inverte a orientação do plano, pois deixa o eixo OX fixo e inverte a orientação

OY. Em termos dos vetores unitários dos eixos, T transforma e_1 em si mesmo e e_2 em $-e_2$. Evidentemente, o sentido de rotação de e_1 para $-e_2$ é oposto ao sentido de e_1 para e_2 .

Seja OXY um sistema de eixos ortogonais no plano. A reflexão T, em torno da reta r, que passa pela origem e faz um ângulo α com o eixo OX, transforma este eixo noutro, OX_1 , obtido de OX por rotação de ângulo 2α e transforma OY no eixo OY_1 , tal que o ângulo de OY para OY_1 é $180^\circ + \alpha$.

Portanto, se e_1 , e_2 , f_1 e f_2 são respectivamente os vetores unitários dos eixos OX, OY, OX_1 e OY_1 , temos

$$f_1 = \cos 2\alpha \cdot e_1 + \sin 2\alpha \cdot e_2$$

e

$$f_2 = \sin 2\alpha \cdot e_1 - \cos 2\alpha \cdot e_2$$

A reflexão T, sendo uma isometria, transforma o ponto $P = (x, y)$ no ponto $P_1 = (x_1, y_1)$ tal que $P_1 = x f_1 + y f_2$. segue-se imediatamente que

$$\begin{cases} x_1 = x \cdot \cos 2\alpha + y \cdot \sin 2\alpha \\ y_1 = x \cdot \sin 2\alpha - y \cdot \cos 2\alpha \end{cases} \quad (2.5)$$

Estas são, portanto, as equações da reflexão em torno de uma reta que passa pela origem e faz ângulo α com o eixo OX.

Exemplo 2: Tomando o polígono M do Exemplo 1, realizar uma reflexão em relação ao eixo vertical.

Considerando as coordenadas dos vértices do polígono M, nos pontos A(0,1), B(1,0), C(2,1) e D(1,2) e realizando uma reflexão da figura em relação aos eixo coordenado OY permite observar como essa transformação modifica a posição e a orientação da figura no plano. Tem-se agora o polígono Q, com vértices nos pontos A'(0,1), B'(-1,0), C'(-2,1) e D'(-1,2). Comparando os polígonos M e Q, na Figura 2.4 podemos dizer que Q é uma reflexão de M em relação ao eixo y.

É possível perceber que na reflexão em relação ao eixo y, as abscissas dos vértices correspondente aos polígonos P e Q, têm mesmo valor absoluto com sinais opostos. As ordenadas dos vértices correspondente aos polígonos P e Q, são iguais.

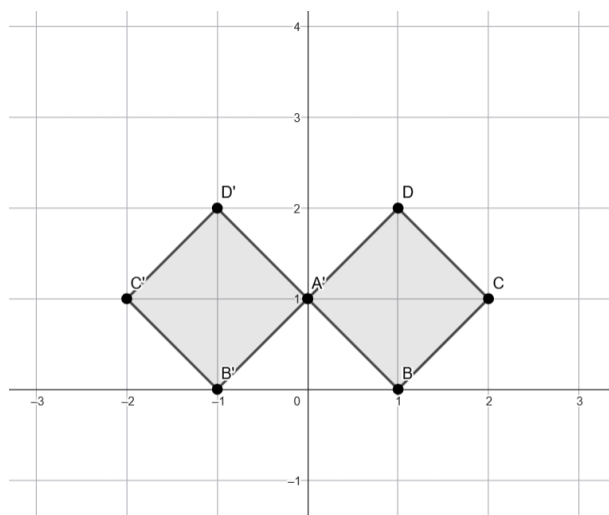


Figura 2.4: Reflexão do polígono P

Fonte: Elaborada pela autora

Considerando o etnomodelo ético da reflexão dos designs sobre a reta $y = -x$, de acordo com Rosa e Orey (2017a), a representação da reflexão dos pontos sobre a reta $y = -x$ é dada por $P(x, y) \rightarrow P'(-y, -x)$.

A Figura 2.5 mostra o etnomodelo ético da reflexão dos designs sobre a reta $y = -x$, para o bloco Trilha até a encruzilhada. Refletindo-se os pontos A, B, C e D sobre a reta através dos pontos A', B', C' e D', têm-se as seguintes reflexões com suas respectivas coordenadas:

$$A(0, 1) \rightarrow A'(-1, 0)$$

$$B(1, 0) \rightarrow B'(0, -1)$$

$$C(2, 1) \rightarrow C'(-1, -2)$$

$$D(1, 2) \rightarrow D'(-2, -1)$$

Assim, esse exemplo mostra que existem propriedades da Geometria Plana que podem ser estudadas através dos *Quilts da Liberdade*, como, por exemplo, as transformações envolvendo a translação, a rotação e a reflexão. Contudo, se os professores também planeja estudar ângulos, cálculo de área, razões trigonométricas, padrões e outras propriedades da geometria plana, esse tipo de artefato possibilitará o desenvolvimento da criatividade na elaboração de atividades em sala de aula dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio.

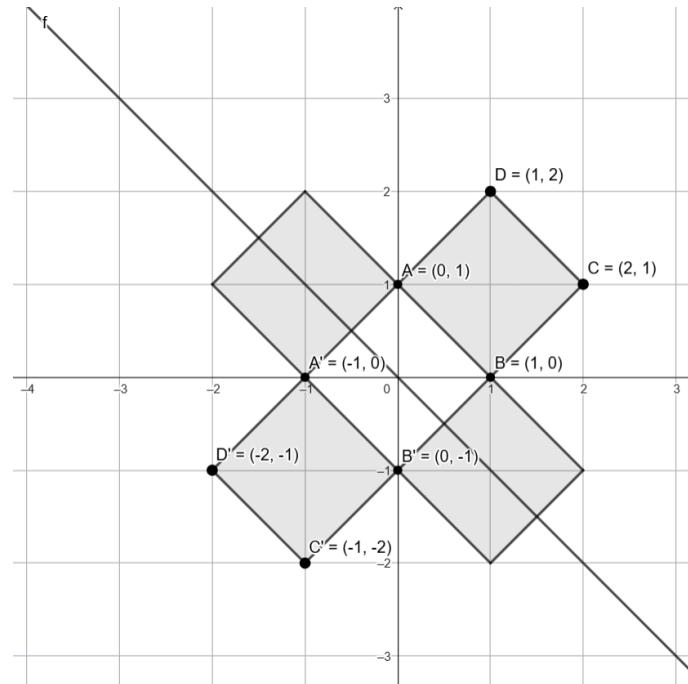


Figura 2.5: Etnomodelo ético da reflexão dos designs sobre a reta $y = -x$

Fonte: Elaborada pela autora

2.5 Rotações

Seja OXY um sistema de eixos ortogonais no plano. A rotação de centro O e ângulo α transforma o ponto $P = (x, y)$ no ponto $P_1 = (x_1, y_1)$ com

$$\begin{cases} x_1 = x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha \\ y_1 = x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha \end{cases} \quad (2.6)$$

Essa rotação leva o vetor unitário e_1 do eixo OX no vetor $f_1 = \cos \alpha \cdot e_1 + \sin \alpha \cdot e_2$ e leva o vetor unitário e_2 do eixo OY no vetor f_2 , que obtém de f_1 por uma rotação positiva de 90° , logo $f_2 = -\sin \alpha \cdot e_1 + \cos \alpha \cdot e_2$. Temos

$$\overrightarrow{OP} = x \cdot e_1 + y \cdot e_2$$

e

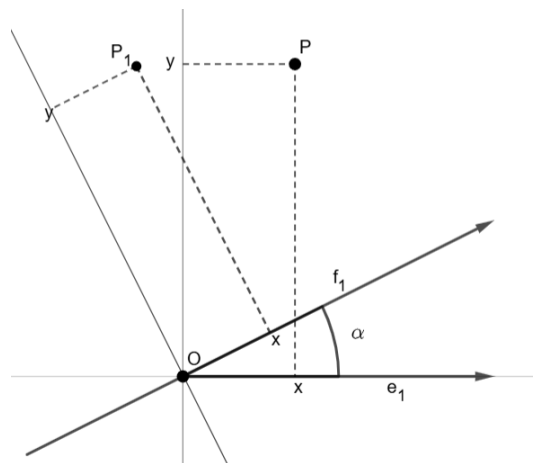


Figura 2.6: A rotação de centro O e ângulo α leva P em P_1

Fonte: Elaborada pela autora com base em LIMA (2005, p. 145)

$$\overrightarrow{OP_1} = x_1 \cdot e_1 + y_1 \cdot e_2 = x \cdot f_1 + y \cdot f_2$$

pois, no sistema de eixos ortogonais OX_1Y_1 , cujos vetores unitários são f_1 e f_2 , o ponto P_1 tem as mesmas coordenadas (x, y) que P tem no sistema OXY . Então

$$x_1 = \langle \overrightarrow{OP_1}, e_1 \rangle = \langle xf_1 + yf_2, e_1 \rangle = x\langle f_1, e_1 \rangle + y\langle f_2, e_1 \rangle = x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha$$

$$y_1 = \langle \overrightarrow{OP_1}, e_2 \rangle = \langle xf_1 + yf_2, e_2 \rangle = x\langle f_1, e_2 \rangle + y\langle f_2, e_2 \rangle = x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha$$

Em particular, uma rotação de 180° em torno do ponto O leva o ponto $P = (x, y)$ no ponto $P_1 = (-x, -y)$. Nesse caso, seja qual for o ponto P do plano, a origem O é o ponto médio do segmento PP_1 . Às vezes se diz que $P_1 = (-x, -y)$ é o simétrico do ponto $P = (x, y)$ em relação ao ponto O. A rotação de 180° em torno O coincide portanto com simetria central no centro O.

As equações (2.1) da seção 2.3 mostram que toda isometria T do plano, que preserva orientação, é uma rotação de centro O e ângulo α seguida da translação pelo vetor $v = \overrightarrow{OO_1}$, onde $O_1 = (a, b) = T(O)$.

Efetuar uma rotação de centro O e ângulo $\alpha \neq 0$ e, em seguida, uma translação no plano é o mesmo que efetuar uma única rotação, de mesmo ângulo α , com centro noutro ponto do plano.

Proposição 2.7. *Consequentemente, as únicas isometrias do plano que preservam orientação são as rotações (com centros em pontos arbitrários do plano) e as translações (que correspondem a uma rotação de ângulo $\alpha = 0$, seguida de uma translação).*

Demonstração:

Tomando todas as coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY pré-fixado. Temos uma isometria T que consiste na rotação de centro O e ângulo α , seguida de uma translação pelo vetor $v = (a, b)$. Determinaremos um ponto $O' = (c, d)$ tal que T seja a rotação de centro O' e ângulo α .

Ora, a rotação de centro $O' = (c, d)$ e ângulo α transforma o ponto $P = (x, y)$ no ponto $P' = (x', y')$ tal que

$$\begin{cases} x' = (x - c) \cos \alpha - (y - d) \sin \alpha + c \\ y' = (x - c) \sin \alpha + (y - d) \cos \alpha + d \end{cases}$$

A explicação para as equações acima é simples: o ponto P' se obtém girando o vetor $\overrightarrow{O'P} = (x - c, y - d)$ do ângulo α , obtendo-se o vetor $\overrightarrow{O'P'} = (\bar{x}, \bar{y})$, onde

$$\begin{cases} \bar{x} = (x - c) \cos \alpha - (y - d) \sin \alpha \\ \bar{y} = (x - c) \sin \alpha + (y - d) \cos \alpha \end{cases}$$

e depois tomando sua extremidade

$$P' = O' + \overrightarrow{O'P'} = (\bar{x} + c, \bar{y} + d)$$

Queremos determinar as coordenadas (c, d) do ponto O' de tal maneira que o ponto P' coincida com $T(P)$. Levando em conta as equações (2.1) da seção 2.3, devemos ter

$$\begin{cases} (x - c) \cos \alpha - (y - d) \sin \alpha + c = x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha + a \\ (x - c) \sin \alpha + (y - d) \cos \alpha + d = x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha + b \end{cases}$$

Simplificando:

$$\begin{cases} (1 - \cos \alpha) \cdot c + \sin \alpha \cdot d = a \\ -\sin \alpha \cdot c + (1 - \cos \alpha) \cdot d = b \end{cases}$$

O determinante deste sistema (cujas incógnitas são c e d) é igual a $(1 - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha$, portanto é diferente de zero, salvo quando $\alpha = 0$, cujo caso T é a translação pelo vetor $v = (a, b)$. Nos demais casos ($\alpha \neq 0$), o sistema possui uma única solução (c, d) , formada pelas coordenadas do ponto O' que procuramos.

O uso do GeoGebra neste contexto possibilita a visualização dinâmica das transformações geométricas, favorecendo a compreensão dos conceitos de isometria e de translação de figuras no plano cartesiano. Essa abordagem promove uma aprendizagem significativa, ao integrar recursos tecnológicos ao estudo da Geometria, em consonância com as diretrizes atuais para o ensino de Matemática.

Capítulo 3

Sequência Didática

Transformações geométricas representam um campo fundamental da Geometria, pois permitem compreender as relações de simetria, movimento e padrões presentes nas figuras do plano. Nesse sentido, este capítulo propõe uma sequência didática voltada ao ensino das transformações geométricas, tomando como eixo central os *Quilts da Liberdade*, artefatos culturais que, além de sua relevância histórica e simbólica, possibilitam a exploração de conceitos matemáticos por meio de padrões, simetrias e composições geométricas. A proposta fundamenta-se em princípios da Educação Matemática e em referenciais teóricos que nos permite introduzir o jogo *Quilts da Liberdade* produto educacional da pesquisa desenvolvida.

3.1 Conteúdos previstos

As transformações geométricas; História e uso dos *Quilts da Liberdade*; jogo *Quilts da Liberdade*.

3.2 Metodologia

A pesquisa fundamenta-se no uso da ferramenta tecnológica GeoGebra, possibilitando que os estudantes construam os padrões fundamentais dos *Quilts da Liberdade* e desenvolvam um senso geométrico por meio da aprendizagem dos conceitos de translação, reflexão e rotação.

Nas atividades exploratórias, o *software* GeoGebra é utilizado como um recurso didático de imersão, permitindo que o aluno manipule e observe os polígonos e blocos dos *quilts* de maneira interativa. Essa abordagem proporciona um contato mais concreto com as formas geométricas, favorecendo a

visualização e a compreensão dos conceitos em um contexto mais palpável.

O procedimento metodológico consiste na execução dos planos de aula, com registro da apropriação e da interação dos estudantes tanto com os conceitos geométricos quanto com a ferramenta tecnológica. Ao final da sequência didática, será aplicado um questionário com perguntas abertas, com o objetivo de identificar os modos de apreensão e aprendizagem dos estudantes em relação aos conteúdos abordados.

3.3 Objetivos

3.3.1 Objetivo geral

Intervir pedagogicamente acerca do processo de ensino-aprendizagem das transformações geométricas através dos *Quilts da Liberdade*, e, assim, contextualizar modos de apropriação culturais e históricos de conceitos matemáticos envolvendo as transformações geométricas, principalmente, reconhecendo o valor histórico de grupos sociais e políticos como os afro-americanos dentro uma proposta interdisciplinar.

3.3.2 Objetivos específicos

- (I). Reconhecer o valor histórico-cultural dos *Quilts da Liberdade*.
- (II). Identificar os padrões geométricos básicos dos *quilts*.
- (III). Construir padrões isométricos tendo os *quilts* como inspiração.
- (IV). Interpretar os registros artísticos e culturais presente nas apropriação dos padrões geométricos.
- (V). Utilizar o *software* GeoGebra em classe para se apropriar das transformações geométricas.
- (VI). Simular a produção dos *Quilts da Liberdade* utilizando o jogo *Quilts da Liberdade* como mecanismo de imersão na matemática presente na história de um grupo social.

3.3.3 Justificativa e relevância da pesquisa

Nenhuma escolha de investigação é neutra, no sentido de que, não existem, como afirma o sociólogo Pierre Bourdieu (1996) “atos sociais desinteressados” (p.62). Uma pesquisa em ensino da matemática cujo eixo temático são *Quilts da Liberdade* baseia-se na importância de reconhecer e valo-

rizar práticas culturais em que a matemática se apresenta como instrumento político-simbólico de grupos marginalizados, ou, fora dos centros de poder. Ao trazer esse assunto ao escopo dos processos de ensino-aprendizagem por meio de uma etnomatemática (uma prática de ensino da matemática situado por uma abordagem socialmente situada) se objetiva produzir um tensionamento pedagógico acerca dos modos que a escola pública brasileira enxerga a apropriação do conhecimento produzido em sala de aula no seu cotidiano.

De outro lado, o uso do GeoGebra na proposta didática vincula-se a possibilidade de comunicação docente-discente mais clara em sua potencialidade. O *software* serve como mecanismo de visualização dos polígonos e outros objetos geométricos, potencializa-se sua manipulação pelos alunos enquanto o professor explicita os objetivos da aprendizagem e contextualiza a história dos *quilts*. A ideia é aliar uma aprendizagem significativa com a aplicação prática dos conceitos matemáticos. No geral, a pesquisa contribui para o debate acerca do ensino da matemática em um olhar interdisciplinar crítico e culturalmente sensível. Ao permitir que os discentes criem, explorem e apresentem seus *quilts* digitais eles e elas ressignificam parte de um passado histórico e fomentam o protagonismo juvenil através de um pensamento reflexivo centralizado, ou pelo menos, motivado pelo conhecimento matemático escolar.

3.4 Tempo destinado

Serão necessária uma carga horária de 6 horas divididas em 8 aulas.

3.5 Recursos didáticos

Serão utilizados materiais impressos para a aula expositiva inicial contendo uma síntese sobre a história dos *Quilts da Liberdade*; um computador (idealmente para cada estudante, mas em caso negativo se farão duplas/grupos); uso de internet para acessar o *software* Geogebra; laboratório de matemática e/ou informática com pincel, quadro branco, apagador e projetor multimídia.

3.6 Cronograma

As atividades serão desenvolvidas conforme o Apêndice A, B, C e D produzidos pela autora. No sequenciamento didático as etapas consistirão em:

Etapa	Descrição
1 ^o	Apresentação da história dos <i>Quilts da Liberdade</i> e da pesquisa. Identificação de padrões geométricos nos <i>quilts</i> .
2 ^o	Exploração digital das transformações geométricas no software Geogebra. Construções de <i>quilts</i> .
3 ^o	Exploração digital e fundamentação matemática. Resolução de questões.
4 ^o	Prática de jogo <i>Quilts da Liberdade</i> desenvolvido no software Geogebra e aplicação questionário e roda de conversa com os estudantes.

1^a ETAPA: a aula inicia com a atividade que está no Apêndice A, apresentando os *Quilts da Liberdade*, usando como referência o artigo dos pesquisadores Daniel C. Orey e Milton Rosa intitulado: *Symmetrical freedom quilts: the ethnomathematics of ways of communication, liberation, and art* e publicado em 2009. Os estudantes irão ser instigados a reconhecer a história da Ferrovia Subterrânea e aprender acerca da comunicação expressa nos padrões geométricos.

2^a ETAPA: execução da atividade contida no Apêndice B que aborda o processo de familiarização dos estudantes com o *software* GeoGebra relacionado aos conteúdos das transformações geométricas, ensinando seu passo a passo na construção de *quilts* como o bloco *ShooFly* (um dos padrões geométricos mais simples utilizados nas Ferrovias subterrâneas). Os discentes deverão relembrar os conteúdos curriculares trabalhados no 9^o ano. Aqui, a proposta didática ganha robustez ao se inserir os conceitos previstos de transformações isométricas: reflexão, translação e rotação com aula expositiva.

3^a ETAPA: Na aula, os estudantes serão convidados a realizar uma exploração digital no GeoGebra sobre o tema transformações geométricas, utilizando o *software* para manipular figuras e observar, de forma dinâmica, os efeitos de translações, rotações e reflexões no plano cartesiano. Durante a atividade, os alunos serão orientados a relacionar as representações gráficas com a funda-

mentação matemática, analisando as expressões algébricas que descrevem cada transformação. Em seguida, os alunos aplicarão esses conhecimentos na resolução de questões semelhantes às do ENEM (Apêndice B), nas quais precisarão interpretar gráficos, identificar tipos de simetria.

4^a ETAPA: nessa aula irá se realizar o acompanhamento da atividade conforme o Apêndice C. Os alunos deverão explorar como as formas refletem, transladam e giram usando os padrões e praticando no jogo *Quilts da Liberdade* usando o *software* GeoGebra, e desenvolvido na pesquisa. O intuito é identificar as transformações geométricas que ocorrem e criar por tentativa um novo código com os triângulos presentes no jogo. Como ponto de partida teremos 5 minutos de exploração das peças e apresentação do jogo para os grupos acessando o arquivo que contém um espaço vazio em formato quadrado e até oito triângulos no GeoGebra. Explicitando o objetivo do jogo que é formar figuras ou códigos maiores. A partir daí serão 30 minutos de construção com transformações geométricas e desafios crescentes de formar figuras simétricas, padrões e blocos maiores com translação, reflexão e rotação. No final teremos 15 minutos de socialização com apresentação dos *quilts* digitais criado e debate coletivo. Considerando que essa aula seja desenvolvida no laboratório de matemática e/ou informática. E finalizando com o momento de avaliação da sequência didática, os estudantes serão reunidos em uma sala e serão solicitados a responder o questionário e após isso, em um momento mais livre poderão tecer considerações sobre as aulas e o que aprenderam (Apêndice D).

3.7 Avaliação

O estudo desenvolvido tem uma abordagem qualitativa, isto é, interessa pensar os modos de apropriação do conhecimento matemático em termos de usos, práticas e significação para o aluno. Tratando-se de uma perspectiva das aprendizagens significativas (FARIAS, 2022), a escolha pelo viés qualitativo se justifica pela necessidade de apreender essas formas quase sutis que o corpo discente mobiliza no aprendizado. Além disso, utiliza-se a técnica da observação-participante como meio de coleta de dados e de imersão no processo de ensino-aprendizagem. É importante apontar que o uso da observação-participante ocorre utilizando meios de objetificação da participação, isso requer que a pesquisadora construa um diário de campo para mapear suas percepções, impressões e detalhe as atividades que realiza, o que entra

em jogo na produção dos dados é o contexto real e as dinâmicas de interação pesquisadora e o sujeito da pesquisa. Alguns pesquisadores do campo educacional como Menga Lüdke e Marli André afirmaram: “[...] a observação-participante é uma técnica que consiste em o pesquisador inserir-se no ambiente e conviver com o grupo, buscando compreender a realidade a partir da perspectiva dos próprios sujeitos” (p. 37, 1986).

Capítulo 4

Produto Educacional no Geogebra

É importante destacar o papel do *software* GeoGebra, cuja utilização será essencial para o desenvolvimento da pesquisa. É um software livre, disponível gratuitamente no link <www.geogebra.org> escrito em linguagem Java, linguagem esta orientada a objetos. Foi criado por Markus Hohenwarter para ser utilizado em ambiente de sala de aula em todos os níveis de ensino. O projeto foi iniciado na Universidade de Salzburg, e tem prosseguido em desenvolvimento na Universidade Atlântica da Flórida, além de ser traduzido para inúmeros países, incluindo o Brasil.(BASNIAK; ESTEVAM, 2014).

No software é possível adquirir uma melhor compreensão do conteúdo discutido em sala de aula. A escolha do GeoGebra justifica-se, sobretudo, por sua natureza gratuita e de código aberto, o que viabiliza sua utilização no contexto escolar sem a necessidade de aquisição de licenças comerciais, além de favorecer sua disseminação em ambientes educacionais diversos. Ademais, o software dispõe de uma comunidade online ativa, na qual professores compartilham materiais, atividades e experiências pedagógicas, o que contribui para o planejamento e a implementação das ações desenvolvidas nesta pesquisa.

Dentre as potencialidades, algumas se destacam para uma contribuição mais efetiva ao ensino da matemática: os jogos. Eles facilitam a apreensão conceitual, por consequência, motivam o alunado (BRETAS, 2020). Porém, vale ressaltar que é imprescindível que o professor tenha claro seus objetivos de ensino, pois, o uso do *software* e sua adaptação pedagógica deve ter um direcionamento para o domínio e nível de compreensão do público ao qual é destinado.

O GeoGebra pode ser obtido gratuitamente por meio do site oficial da plataforma, no qual é possível realizar o download para instalação local ou acessar

a versão on-line sem necessidade de instalação. O programa está disponível em diferentes versões, incluindo a versão desktop, compatível com os principais sistemas operacionais, a versão web, acessível diretamente pelo navegador de internet, e versões para dispositivos móveis, destinadas a smartphones e tablets com sistemas Android e iOS. Sua interface inicial é intuitiva e organizada, apresentando uma área central destinada à construção geométrica e algébrica, acompanhada de janelas que permitem a visualização simultânea de representações gráficas, algébricas e numéricas, além de uma barra de ferramentas com ícones para criação, edição e manipulação de objetos matemáticos, facilitando a interação do usuário com os recursos do software. Observe na Figura 4.1 uma janela de visualização em que é apresentado o plano cartesiano onde o aluno poderá interagir com gráficos e objetos. Estes, por sua vez, são inseridos através da barra de ferramentas ou campo de entrada, usando comando específicos.

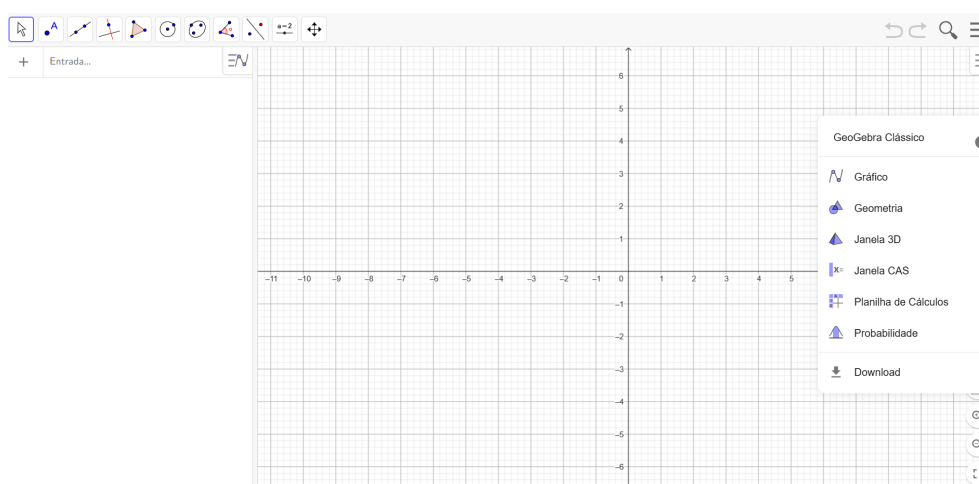


Figura 4.1: Interface do GeoGebra acessada pelo site <https://www.geogebra.org/classic>

O perfil dos estudantes do século XXI é diferente dos quadros educacionais que formavam a maioria na história recente da escolarização brasileira. Esses alunos possuem um contato imersivo e substantivo com as tecnologias telemáticas, acesso a aparelhos digitais e tem habilidades tecnológicas nativas de sua contemporaneidade. No caso dos docentes, também contextualizados no mundo digital, esses avanços vêm sombreados de preocupação acerca de suas práticas de ensino. A presença de recursos educacionais tecnológicos como o GeoGebra abre um caminho de interação entre as Tecnologias Digitais (TD), a sala de aula e os objetivos de aprendizagem. Por exemplo, o uso

de jogos virtuais no ensino da matemática propicia um conhecimento quase-tátil aos estudantes e oferece um processo dinâmico e, evidentemente, mais prazeroso ao processo de subjetivação daquela aprendizagem (SILVA, 2019).

Do ponto de vista cognitivo algumas pesquisas sugerem o desenvolvimento de estímulos ao desenvolvimento do raciocínio lógico, a habilidade de resolução de situações-problema, criatividade, sociabilidade, competências de expressão, comunicação e colaboração em equipe (HOMA; GROENWALD, 2020). Portanto sendo o software GeoGebra livre, uma ferramenta gratuita e amplamente disseminada devido a sua facilidade de utilização e criação de modelos matemáticos interativos, tais, característica ainda se torna mais atrativa quando se pensa os desafios de produzir um ensino de matemática interdisciplinar e integrado como no caso da pesquisa envolvendo os *Quilts da Liberdade*.

Os estudantes podem identificar algumas técnicas de inserção das atividades lúdicas na produção dos *quilts*, a ideia é auxiliar o desenvolvimento de uma percepção positiva sobre a matemática descomplicada e eficaz.

4.1 Jogo *Quilts da Liberdade* no Geogebra

A proposta consiste em um jogo no GeoGebra em que os estudantes criam padrões geométricos inspirados nos *Quilts da Liberdade*, utilizando transformações geométricas (translação, reflexão e rotação). O jogo pode ser acessado no link <<https://www.geogebra.org/m/sx9g9dcm>>.

É fornecido figuras iniciais tais como, triângulos que podem ser movimentados sem distorções de tamanho ou forma em torno de um ponto, atravessando uma linha para cobrir um plano, nesse contexto, imagine uma colcha como um plano e os estudantes manipulam essas figuras, podendo ser até em grupos, aplicando transformações geométricas. Cada desafio consiste em realizar combinações específicas de transformações geométricas, entre as quais se destacam a translação, a reflexão e a rotação, os alunos devem montar blocos com variadas quantidades de peças que formam padrões semelhantes aos *quilts* tradicionais. Ao final, cada grupo cria seu próprio *quilt* digital, apresentando-o à turma e descrevendo quais transformações utilizou.

4.2 Detalhamento e regras do jogo *Quilts da Liberdade*

O jogo *Quilts da Liberdade* tem como objetivo construir blocos que contem padrões geométricos. Por isso, são disponibilizadas triângulos para serem movimentados aplicando as transformações geométricas. Ao final do jogo, o estudante cria seu próprio *quilt* digital. O desenvolvimento do jogo, apelidado de “jogo *Quilts da Liberdade*”, foi construído durante o trabalho de orientação, no curso. Durante o trabalho de realização dessa atividade, tivemos acesso a vários jogos no repositório do GeoGebra, um local com diversos materiais compartilhados por pessoas que possuem um perfil no site do GeoGebra. Por meio dessa consulta veio a inspiração na ideia do jogo.

A Figura 4.2 apresenta as imagens inseridas que compõem o cenário que estrutura o ambiente do jogo. Essa interface dialoga com o contexto temático proposto e disponibiliza oito triângulos retângulos isósceles, além de um quadrado que delimita a área destinada à construção do *quilt*. A composição visual do plano de fundo foi desenvolvida com o auxílio de ferramentas de inteligência artificial, com o objetivo de proporcionar melhor adequação estética e funcional ao ambiente interativo.

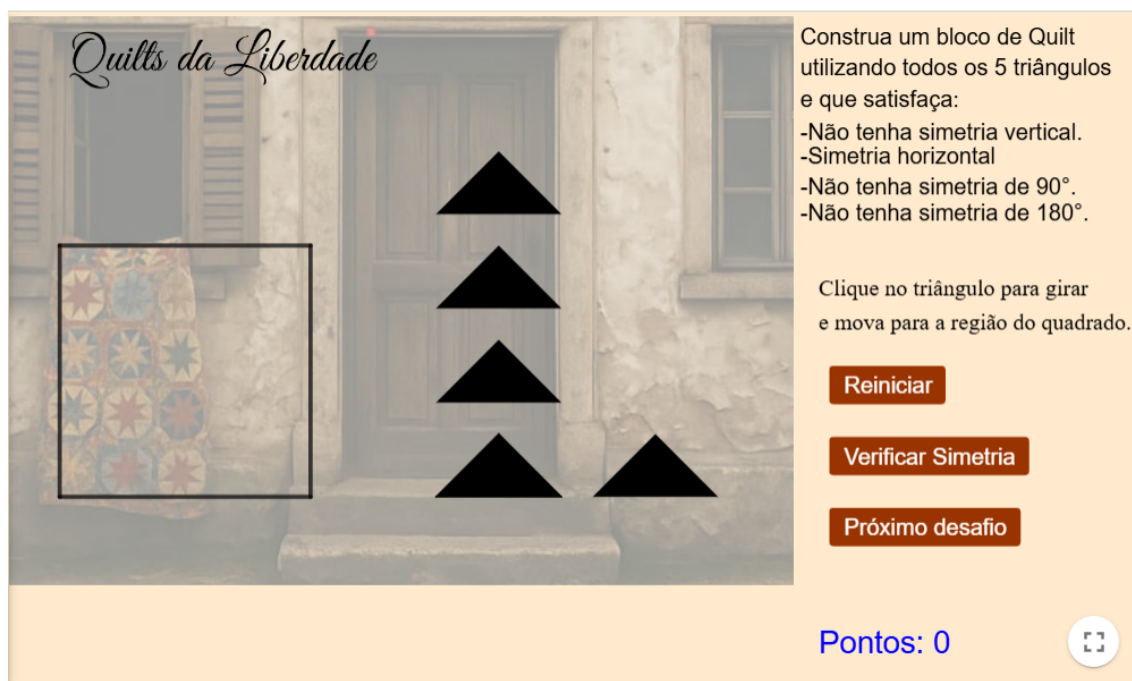


Figura 4.2: Cenário do jogo *Quilts da Liberdade*

Fonte: Elaborada pela autora

Serão inseridos três botões: Reiniciar, Verificar Simetria e Próxima Atividade, cada um com uma função específica:

- O botão Reiniciar permite que o usuário recomece a construção do *quilt*, restaurando as peças à posição inicial;
- O botão Verificar Simetria possibilita a conferência da simetria das figuras montadas, fornecendo retorno sobre o cumprimento das condições propostas;
- O botão Próxima Atividade permite avançar para a etapa seguinte do jogo, conduzindo o usuário a novos desafios ou exercícios.

(A) No primeiro momento teremos:

- Cada jogador(aluno) ou grupo recebe no GeoGebra até oito triângulos isósceles iguais;
- Os triângulos já estão construídos no arquivo inicial e não podem ser alterados em tamanho.

O triângulo retângulo isósceles foi selecionado em razão de suas propriedades de simetria. Seu eixo de simetria é uma reta que o divide em duas regiões congruentes, de modo que, ao ser dobrado sobre esse eixo, ambas as partes coincidem perfeitamente. Ressalta-se que os triângulos isósceles apresentam apenas um eixo de simetria, correspondente à bissetriz do ângulo do vértice, que o separa em dois ângulos de mesma medida.

(B) Movimentos permitidos:

- Só podem ser usadas rotações ou translações;
- Só é permitido rotacionar o triângulo em torno de um ponto fixo, que é o baricentro desse triângulo;
- As rotações devem ser de 90° , 180° ou 270° .

As posições ocupadas pelo triângulo retângulo do jogo, apresentadas na Figura 4.3, são obtidas por meio de rotações em torno do seu baricentro, que corresponde ao ponto de equilíbrio do triângulo. O baricentro é o ponto de encontro das três medianas, ou seja, dos segmentos que ligam cada vértice

ao ponto médio do lado oposto. Esse ponto é de grande importância na Geometria, pois representa o centro de equilíbrio da figura e, em transformações como as rotações, é frequentemente utilizado como centro de rotação, garantindo a simetria e a estabilidade do triângulo durante o movimento. Não é possível esticar, redimensionar ou deformar os triângulos.

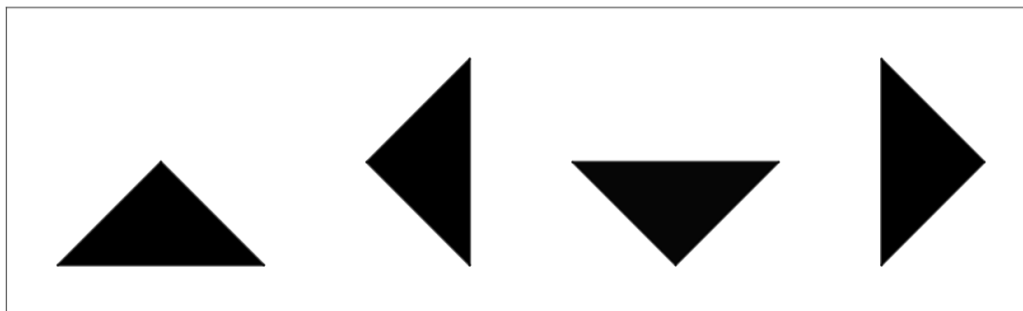


Figura 4.3: Posições ocupada pelos triângulos retângulos isósceles no jogo *Quilts da Liberdade*

Fonte: Elaborada pela autora

(C) Meta do jogo:

- O jogador(aluno) ou grupo deve combinar até 8 triângulos de forma que o resultado forme uma figura ou componha um padrão simétrico, típico dos *quilts* tradicionais, atendendo as condições exigidas.

(D) Critérios de sucesso:

- O aluno completa o desafio quando consegue organizar até oito triângulos em uma composição que apresenta todos os critérios solicitados;
- Ocupa um espaço coeso (sem peças fora da área de construção ou sobrepostas).

(E) Desafio avançado:

- Construir diferentes blocos de *quilts* utilizando um número crescente de peças, de modo a observar como diferentes rotações podem gerar novos padrões. À medida que a quantidade de peças aumenta, passando de quatro para oito, a complexidade da atividade também se eleva, exigindo maior atenção na identificação das simetrias e na composição do desenho final.

As possibilidades para a composição de um bloco de *quilt* são ilimitadas porque podem depender de escolhas pessoais. Mas as possibilidades para a repetição dos designs simétricos são limitadas pelas leis da formação de padrões e estão sujeitas às restrições dessas regras de simetria (ROSA; OREY, 2009).

4.3 Desafios propostos

Considerando o conjunto de até oito triângulos retângulos isósceles fornecidos, propõe-se organizá-los por meio da aplicação de transformações geométricas - rotação, reflexão e translação - com o objetivo de compor uma figura obtida pela justaposição dessas peças, de modo que a configuração resultante satisfaça as condições de simetria e composição previamente estabelecidas. Na elaboração do jogo busca-se contemplar as quatro simetrias que são: simetria em relação ao eixo vertical, simetria em relação ao eixo horizontal, simetria de rotação de 90° e simetria de rotação de 180° juntamente com quantidade diferente de peças. Verificou-se a inviabilidade de alguns casos:

- **Caso 1.** Exigências que consistiam em construir um bloco de *quilt* com simetria de rotação de 90° , mas não tem simetria de rotação de 180° .

Considere um ponto $P = (x, y)$ no plano cartesiano e uma figura que possua simetria de rotação de 90° em torno da origem.

Ao girar o ponto P em 90° no sentido anti-horário em torno da origem, suas coordenadas transformam-se em: $P' = (-y, x)$.

Assim, cada ponto (x, y) é transformado para $(-y, x)$.

E, aplicando uma nova rotação de 90° ao ponto P , obtemos: $P'' = (-x, -y)$

Essa é exatamente a rotação de 180° do ponto original P .

Conclusão: Como a rotação de 180° é o resultado da composição de duas rotações de 90° , qualquer figura que apresente simetria de 90° automaticamente apresenta também simetria de 180° .

- **Caso 2.** Exigências que consistiam apresentar simetria em relação ao eixo horizontal, simetria de rotação de 90° , simetria de rotação de 180° e não tem simetria em relação ao eixo vertical.

Considere um ponto $P = (x, y)$ no plano cartesiano e uma figura que possua simetria em relação ao eixo horizontal.

O P tem suas coordenadas transformadas em $P'(x, -y)$.

Rotacionando em 90° no sentido anti-horário o ponto P' , obtemos $P'' = (-y, x)$.

E aplicando uma rotação de 180° ao ponto P , obtemos $P''' = (-x, -y)$.

Então automaticamente ela também possui simetria vertical.

A combinação das rotações e da reflexão horizontal implica automaticamente simetria vertical. Portanto, não é possível satisfazer o conjunto de condições propostas.

Vale ressaltar que qualquer figura que apresente simultaneamente rotação de 90° e reflexão vertical inevitavelmente também possui reflexão horizontal, pois a composição dessas simetrias gera todos os pontos refletidos em relação ao eixo horizontal. Da mesma forma, uma figura que tenha rotação de 90° e reflexão horizontal necessariamente terá reflexão vertical.

- **Caso 3.** Exigências que consistiam em construir um bloco de *quilt* que apresente simetria em relação ao eixo horizontal e simetria em relação ao eixo vertical mas não possua simetria de rotação de 90° e não possua simetria de 180° .

Considere um ponto $P = (x, y)$ no plano cartesiano e uma figura que possua simetria em relação ao eixo horizontal.

P tem suas coordenadas transformadas em $P' = (x, -y)$.

E se a figura possui simetria em relação ao eixo vertical $(x, y) \rightarrow (-x, y)$.

A composição $(x, y) \rightarrow (x, -y) \rightarrow (-x, -y)$ representa uma rotação de 180° em torno da origem.

Portanto, o conjunto de condições propostas não é possível.

- **Caso 4.** Exigências que consistiam em construir um bloco de *quilt* que apresente simetria em relação ao eixo horizontal, simetria de rotação de 180° mas não possua simetria de rotação de 90° e simetria em relação ao eixo vertical.

Considere um ponto $P = (x, y)$ no plano cartesiano e uma figura que possua simetria em relação ao eixo horizontal.

P tem suas coordenadas transformadas em $P' = (x, -y)$.

E aplicando uma rotação de 180° ao ponto P' , obtemos $P'' = (-x, y)$

A composição $(x, y) \rightarrow (x, -y) \rightarrow (-x, y)$ representa uma simetria em relação ao eixo vertical.

Portanto, o conjunto de condições propostas não é possível logo, não existindo um padrão que as satisfaça simultaneamente.

4.3.1 Casos explorados nos desafios propostos do Jogo *Quilts da Liberdade*

Para alguns dos casos explorados nos desafios propostos do Jogo *Quilts da Liberdade*, será apresentada uma figura correspondente, conforme as diferentes configurações analisadas.

1. Montar um bloco de *quilt* que apresente simetria de rotação de 90° mas não possua reflexão em relação aos eixos horizontal e vertical.
 - (a) Use 4 peças (configuração apresentada na Figura 4.4)
 - (b) Use 6 peças (configuração apresentada na Figura 4.5)
 - (c) Use 8 peças (configuração apresentada na Figura 4.6)

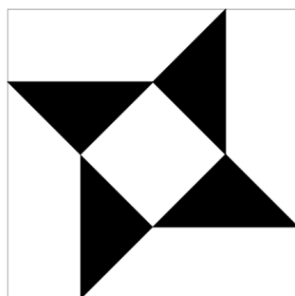


Figura 4.4: Bloco de *quilt* de quatro peças que apresenta simetria de rotação de 90° mas não possui reflexão em relação aos eixos horizontal e vertical.

Fonte: Elaborada pela autora

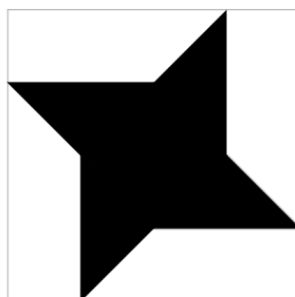


Figura 4.5: Bloco de *quilt* de seis peças que apresenta simetria de rotação de 90° mas não possui reflexão em relação aos eixos horizontal e vertical.

Fonte: Elaborada pela autora

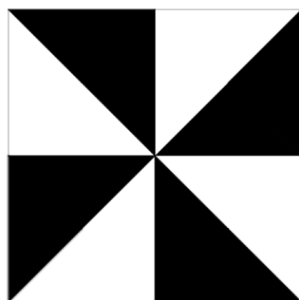


Figura 4.6: Bloco de *quilt* de oito peças que apresenta simetria de rotação de 90° mas não possui reflexão em relação aos eixos horizontal e vertical.

Fonte: Elaborada pela autora

2. Montar um bloco de *quilt* que apresente reflexão em relação aos eixos horizontal e vertical, simetria de rotação de 90° .
 - (a) Use 4 peças
 - (b) Use 6 peças (configuração apresentada na Figura 4.7)
 - (c) Use 8 peças (configuração apresentada na Figura 4.8)

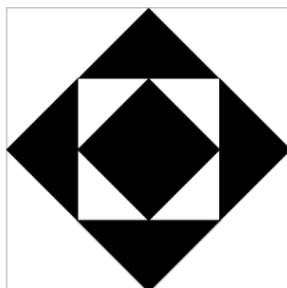


Figura 4.7: Bloco de *quilt* de seis peças que apresenta reflexão em relação aos eixos horizontal e vertical, simetria de rotação de 90°

Fonte: Elaborada pela autora

3. Montar um bloco de *quilt* que apresente simetria em forma da letra H (presente na letra H), ou seja, reflexão em relação aos eixos horizontal e vertical, simetria de rotação de 180° mas não tem simetria de rotação de 90° .
 - (a) Use 4 peças
 - (b) Use 6 peças (configuração apresentada na Figura 4.9)

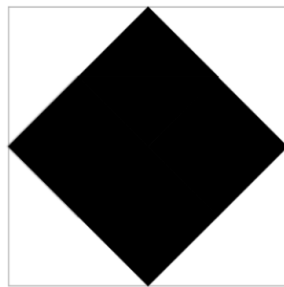


Figura 4.8: Bloco de *quilt* de oito peças que apresenta reflexão em relação aos eixos horizontal e vertical, simetria de rotação de 90°

Fonte: Elaborada pela autora

(c) Use 8 peças

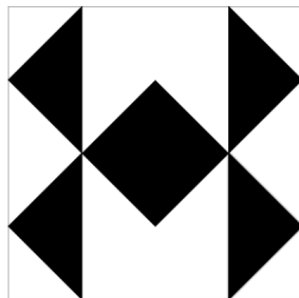


Figura 4.9: Bloco de *quilt* de seis peças que apresenta simetria de reflexão em relação aos eixos horizontal e vertical, simetria de rotação de 180° sem a simetria de rotação de 90° .

Fonte: Elaborada pela autora

4. Montar um bloco de *quilt* que apresente simetria em forma de letra S (presente na letra S), ou seja, simetria de rotação de 180° mas não tem simetria em relação aos eixos horizontal e vertical e simetria de rotação de 90°
 - (a) Use 4 peças
 - (b) Use 6 peças
 - (c) Use 8 peças
5. Montar um bloco de *quilt* que apresente simetria em forma de letra M, ou seja, simetria em relação ao eixo vertical, mas não tem simetria em relação ao eixo horizontal, não tem simetria de rotação de 90° e não tem simetria de rotação de 180° .

- (a) Use 4 peças
- (b) Use 5 peças
- (c) Use 6 peças
- (d) Use 7 peças
- (e) Use 8 peças (configuração apresentada na Figura 4.10)

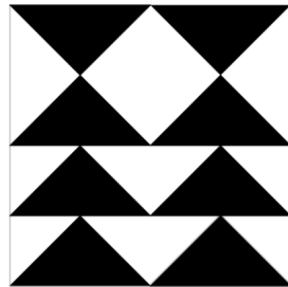


Figura 4.10: Bloco de *quilt* de oito peças que apresenta simetria em relação ao eixo vertical, mas sem simetria em relação ao eixo horizontal e sem simetria de rotação de 90° e simetria de rotação de 180°

Fonte: Elaborada pela autora

6. Montar um bloco de *quilt* que apresente simetria em forma de letra B, ou seja, simetria em relação ao eixo horizontal mas não tem simetria em relação ao eixo vertical, simetria de rotação de 90° e simetria de rotação de 180° .

- (a) Use 4 peças
- (b) Use 5 peças
- (c) Use 6 peças
- (d) Use 7 peças
- (e) Use 8 peças

Na Figura 4.8, temos seis peças, o bloco é simétrico em relação os eixos, se girando o bloco 180° ele permanece igual mas se girando 90° ele não deve coincidir com o original.

Conclusão

A presente dissertação teve como objetivo investigar o potencial pedagógico do uso de elementos culturais na aprendizagem da Geometria, por meio do estudo dos *Quilts da Liberdade* e da elaboração de um jogo educacional desenvolvido no *software* GeoGebra. A proposta busca articular aspectos históricos e culturais da tradição afro-americana dos *quilts* com os conceitos matemáticos de transformações geométricas: translação, reflexão e rotação, promovendo uma abordagem interdisciplinar no contexto da Educação Matemática.

O desenvolvimento do produto educacional no Geogebra, jogo *Quilts da Liberdade* possibilita a construção de um ambiente de aprendizagem dinâmico e interativo, em que é possível visualizar e manipular figuras geométricas, compreendendo, de forma concreta, as propriedades das isometrias no plano. O jogo contribui para o fortalecimento do raciocínio espacial, da percepção de simetrias e da compreensão das relações entre forma, movimento e padrões geométricos. A utilização do GeoGebra mostra-se um recurso tecnológico eficaz, ao permitir que a exploração de diferentes transformações e experimentação de combinações diversas de figuras, simulando o processo artístico de confecção dos *quilts*.

Ao associar os padrões dos *quilts* às transformações geométricas no plano, o estudante pôde perceber a presença da Matemática em manifestações culturais historicamente relevantes, valorizando saberes que emergem de práticas sociais e históricas de resistência. Ao reconhecer nos *quilts* não apenas expressões artísticas, mas também representações simbólicas de liberdade, identidade e luta contra a opressão, o ensino das transformações geométricas ganha uma dimensão crítica, permitindo o enfrentamento de teorias racistas que historicamente negaram a capacidade intelectual dos povos negros. Essa abordagem evidencia a complexidade, a criatividade e o pensamento lógico presentes entre os negros escravizados, demonstrando que suas produções culturais envolviam raciocínios geométricos sofisticados e formas próprias de conhecimento. Assim, o ensino se torna um espaço de valorização

da diversidade, promovendo uma aprendizagem inclusiva, interdisciplinar e socialmente comprometida. O jogo desenvolvido constitui uma ferramenta didática capaz de aliar tecnologia, arte e história à prática docente, promovendo aprendizagens mais amplas e significativas.

Como encaminhamento futuro, este trabalho será submetido à apreciação do Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS), a fim de obter a devida autorização para a aplicação da atividade em sala de aula com estudantes do Ensino Médio do Instituto Federal da Bahia - Campus Feira de Santana. Tal procedimento garantirá que a execução da pesquisa siga os princípios éticos exigidos para estudos envolvendo seres humanos, assegurando a integridade e a responsabilidade científica do processo investigativo. Para tanto, será realizada a submissão do projeto ao Comitê de Ética em Pesquisa (CEP), com o devido Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) assinado pelos participantes, conforme as normas da Resolução nº 510/2016 do Conselho Nacional de Saúde. Além disso, os resultados obtidos poderão subsidiar a produção de um artigo científico, contribuindo para a divulgação e o avanço do conhecimento na área.

Como perspectivas para pesquisas futuras, destaca-se a ampliação da proposta para outros contextos educacionais, investigando a aplicação do jogo Quilts da Liberdade em diferentes níveis de ensino, como os anos finais do Ensino Fundamental, a Educação de Jovens e Adultos (EJA) e a formação inicial e continuada de professores de Matemática. O material produzido apresenta potencial para adaptações metodológicas e curriculares, podendo contemplar outros conteúdos matemáticos, bem como diferentes manifestações culturais, fortalecendo abordagens interdisciplinares fundamentadas na Etnomatemática e na Educação Matemática Crítica. Além disso, a proposta desenvolvida abre possibilidades para desdobramentos pedagógicos que favorecem práticas inclusivas, o uso consciente de tecnologias digitais e a valorização de saberes historicamente marginalizados, contribuindo para a construção de um ensino de Matemática socialmente comprometido, culturalmente contextualizado e alinhado às demandas contemporâneas da educação.

Referências Bibliográficas

BASNIAK, M. I.; ESTEVAM, E. J. *GeoGebra e a matemática da educação básica: frações, estatística, círculo e circunferência*. Curitiba: Ithala, 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. 3. ed. Brasília, DF: MEC, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/imagens/BNCC-EI-EF-110518-versao-final-site.pdf>. Acesso em: 23 maio 2025.

BRETAS, Adriane Muraro Rode. *O uso do software educacional GeoGebra para a aprendizagem do conteúdo matemático de quadriláteros*. 2020. Monografia (Especialização em Inovação e Tecnologias na Educação) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2020.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Etnomatemática: arte ou técnica de explicar e conhecer*. São Paulo, SP: Ática, 1990.

DELFIOL, T.; Rosa, M. Etnomodelagem em sala de aula através dos Quilts da Liberdade. *Revista Interdisciplinar em Ensino de Ciências e Matemática*, vol. 01, n. 02, p. 94 – 108, 2021.

FARIAS, Gabriela Belmont de. Contributos da aprendizagem significativa de David Ausubel para o desenvolvimento da competência em informação. *Perspectiva em Ciência da Informação*, Belo Horizonte, v. 27, n. 2, p. 58-76, 2022.

FONER, Eric. *Reconstruction: America's Unfinished Revolution, 1863–1877*. New York: Harper & Row, 2011.

GERÔNIMO, J. R.; BARROS, R. M. O.; FRANCO, V.S. *Geometria euclidiana – um estudo com o software GeoGebra*. Maringá: EDUEM, 2010.

HOMA, Agostinho Iaqchan Ryokiti; GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira. Jo-

gos didáticos e tecnologias digitais: uma integração possível no planejamento didático do professor de Matemática. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, São Paulo, v. , n. 3, p. 30-45, 2020.

HOOKE, bell. *Ensinando a transgredir: a educação como prática da liberdade*. São Paulo: Martins Fontes, 2013.

LIMA, E.L. *Coordenadas no plano com soluções de exercícios*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A. *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU, 1986.

MCPHERSON, James M. *Battle Cry of Freedom: The Civil War Era*. New York: Oxford University Press, 1988.

MIGUEL, A.; MIORIM, Maria Aparecida. História da matemática: uma prática social de investigação em construção. *Educação em Revista*, Belo Horizonte, n. 36, p. 177-203, 2002.

OREY, D. C.; Rosa, M. Explorando a abordagem dialógica da etnomodelagem: traduzindo conhecimentos matemáticos local e global em uma perspectiva sociocultural. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, v. 11, n. 1, p. 179-210, 2018.

BOURDIEU, Pierre. *Razões práticas: sobre a teoria da ação*. Campinas: Papi-rus, 1996.

ROSA, M.; OREY, D. C. *Etnomodelagem: a arte de traduzir práticas matemática locais*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017a.

ROSA, M.; Orey, D. C. Symmetrical freedom quilts: the ethnomathematics of ways of communication, liberation, and art. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática Perspectivas Socioculturales de la Educación Matemática* . August 2009.

SILVA, Adna Leile A. D. *Equações diofantinas lineares com N variáveis e aplicação em sala utilizando o GeoGebra*. 2019. Dissertação. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, 2019.

Wilson, S.S. The secret quilt code. *Traditional Quiltworks*, v. 79, p. 6–9, 2002.

APÊNDICE A



Instituto Federal da Bahia
Docente: Fabiana Lopes
Data: / /

Campus Feira de Santana
Disciplina: Matemática
Turma:

Estudante:

ATIVIDADE 1: Introdução à história dos *Quilts* e significados

1. Por que os escravizados usavam colchas para comunicação, em vez de outras formas de comunicação?
2. As pessoas ainda desenvolvem e usam símbolos ou sinais secretos?
3. Como formas, padrões e simetrias em uma colcha podem comunicar informações?
4. Como os *quilts* representavam a resistência e a luta pela liberdade?
5. Quais figuras geométricas são identificadas no *quilt*?
6. Qual(ais) transformação(ões) geométrica(s) é possível identificar (simetrias, reflexão e rotação) e destacar as coordenadas cartesianas.

APÊNDICE B



Instituto Federal da Bahia
Docente: Fabiana Lopes
Data: / /

Campus Feira de Santana
Disciplina: Matemática
Turma:

Estudante:

ATIVIDADE 2: Exploração digital no software GeoGebra relacionada ao conteúdo de transformações geométricas

1. Em grupos de três estudantes, escolher entre os nove padrões que era utilizado como forma de comunicação e construir no plano cartesiano esse padrão no Geogebra. A Figura 2 é reapresentada a seguir para facilitar a leitura deste apêndice.

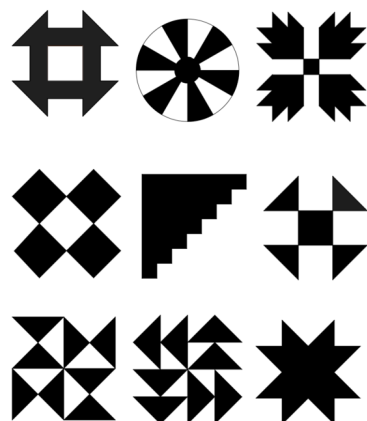
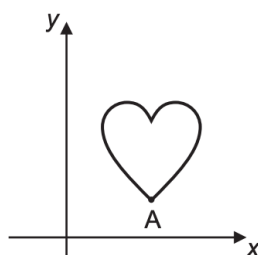


Figura 2: Blocos de *quilts* utilizados para envio de mensagens aos escravizados fugitivos nos Estados Unidos no século XIX

2. Identificar os eixos de reflexão em relação a origem (significa que cada ponto (x, y) da figura vai para o ponto $(-x, -y)$).
3. Identificar os eixos de reflexão em relação a uma reta (destacá-la desenhando uma linha, geralmente, tracejada) que mostre onde a figura se “espelha”).
4. Destacar uma linha de simetria. Quantas linhas de simetria esse *quilt* possui?
5. Reconhecer e determinar a transformação geométrica que ocorre quando um ponto de coordenadas (x, y) é transformado em $(-x, y)$.
6. Escolher pontos específicos no *quilt* elaborado e identificar as novas coordenadas obtidas após a realização de uma determinada transformação geométrica.
7. (ENEM/2018) Isometria é uma transformação geométrica que, aplicada a uma figura, mantém as distâncias entre pontos. Duas das transformações isométricas são a reflexão e a rotação. A reflexão ocorre por meio de uma reta chamada eixo. Esse eixo funciona como um espelho, a imagem refletida é o resultado da transformação. A rotação é o “giro” de uma figura ao redor de um ponto chamado centro de rotação. A figura sofreu cinco transformações isométricas, nessa ordem:

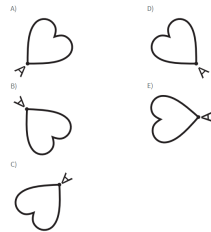


- 1^a) Reflexão no eixo x ;
- 2^a) Rotação de 90 graus no sentido anti-horário, com centro de rotação no ponto A ;
- 3^a) Reflexão no eixo y ;

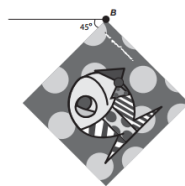
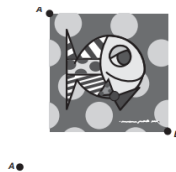
4ª) Rotação de 45 graus no sentido horário, com centro de rotação no ponto A;

5ª) Reflexão no eixo x;

Qual a posição final da figura?



8. A imagem apresentada na figura é uma cópia em preto e branco da tela quadrada intitulada O peixe, de Marcos Pinto, que foi colocada em uma parede para exposição e fixada nos pontos A e B. Por um problema na fixação de um dos pontos, a tela se desprendeu, girando rente à parede. Após o giro, ela ficou posicionada como ilustrado na figura, formando um ângulo de 45° com a linha do horizonte.



Para recolocar a tela na sua posição original, deve-se girá-la, rente à parede, no menor ângulo possível inferior a 360° . A forma de recolocar a tela na posição original, obedecendo ao que foi estabelecido, é girando-a em um ângulo de

- A) 90° no sentido horário.
- B) 135° no sentido horário.
- C) 180° no sentido anti-horário.
- D) 270° no sentido anti-horário.

E) 315° no sentido horário.

APÊNDICE C



Instituto Federal da Bahia
Docente: Fabiana Lopes
Data: / /

Campus Feira de Santana
Disciplina: Matemática
Turma:

Estudante:

ATIVIDADE 3: Jogo Quilts da Liberdade no Geogebra

Atividade prática de aplicação da transformação geométrica: simetria, reflexão e rotação:

Objetivo: Construir blocos de *quilts* explorando a simetria.

Regras do jogo Quilts da Liberdade

Peças fornecidas:

- Cada jogador(aluno) ou grupo recebe no GeoGebra 8 triângulos isósceles iguais.
- Os triângulos já estão construídos no arquivo inicial e não podem ser alterados em tamanho.

Movimentos permitidos:

- Só podem ser usadas rotações ou translações.
- Só é permitido rotacionar os triângulos em torno de pontos fixos que é o Baricentro desse triângulo.
- As rotações devem ser de 90° , 180° ou 270° .

- O jogador(aluno) ou grupo pode escolher o ponto de rotação (um vértice do triângulo, o centro de uma figura).

Não é permitido/possível esticar, redimensionar ou deformar os triângulos nem apagar peças.

Meta do jogo:

- O jogador(aluno) ou grupo deve combinar até 8 triângulos de forma que o resultado forme uma figura ou componha um padrão simétrico, típico dos *quilts* tradicionais.

Critérios de sucesso:

1. O aluno completa o desafio quando consegue organizar os triângulos em uma composição que apresenta simetria de rotação ou de reflexão visível, de acordo com as transformações solicitadas;
2. Ocupa um espaço coeso (sem peças soltas ou sobreposições excessivas).

Desafio final (nível avançado):

- Criar dois *quilts* diferentes usando a mesma quantidade de peças, mostrando que diferentes rotações podem levar a padrões distintos.

A Figura 4.1 é reapresentada a seguir para facilitar a leitura deste apêndice.

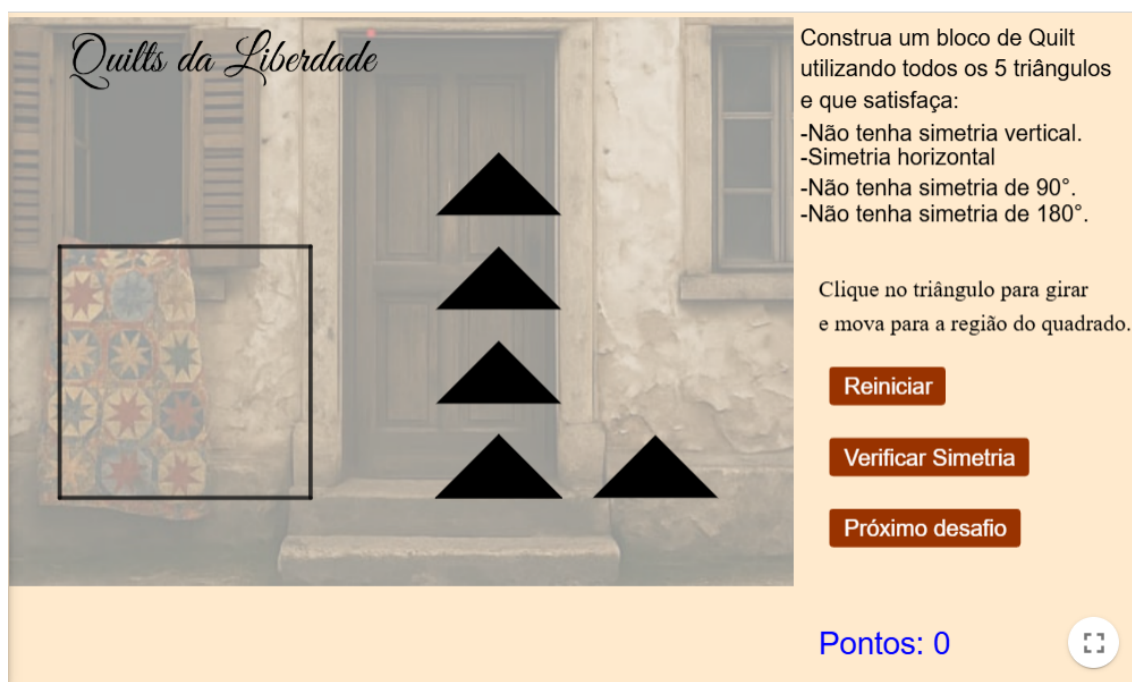


Figura 4.1: Interface do jogo *Quilts da Liberdade*

Desafios Propostos:

1. Montar um bloco de *quilt* que apresente simetria de rotação de 90° mas não tem simetria em relação aos eixos horizontal e vertical.
 - (a) Use 4 peças
 - (b) Use 6 peças
 - (c) Use 8 peças
2. Montar um bloco de *quilt* que apresente reflexão em relação aos eixos horizontal e vertical, simetria de rotação de 90° .
 - (a) Use 4 peças
 - (b) Use 6 peças
 - (c) Use 8 peças
3. Montar um bloco de *quilt* que apresente simetria em forma da letra H(ou presente na letra H), ou seja, reflexão em relação aos eixos horizontal e vertical, simetria de rotação de 180° e não tem simetria de rotação de 90° .
 - (a) Use 4 peças
 - (b) Use 6 peças
 - (c) Use 8 peças
4. Montar um bloco de *quilt* que apresente simetria em forma de letra S, ou seja, simetria de rotação de 180° , não tem simetria em relação aos eixos horizontal e vertical e não tem simetria de rotação de 90° .
 - (a) Use 4 peças
 - (b) Use 6 peças
 - (c) Use 8 peças

5. Montar um bloco de *quilt* que apresente simetria em forma de letra M, ou seja, simetria em relação ao eixo vertical, mas não tem simetria em relação ao eixo horizontal e não tem simetria de rotação de 90° e não tem simetria de rotação de 180° .
- (a) Use 4 peças
 - (b) Use 5 peças
 - (c) Use 6 peças
 - (d) Use 7 peças
 - (e) Use 8 peças
6. Montar um bloco de *quilt* que apresente simetria em forma de letra B, ou seja, simetria em relação ao eixo horizontal mas não tem simetria em relação ao eixo vertical e não tem simetria de rotação de 90° .
- (a) Use 4 peças
 - (b) Use 5 peças
 - (c) Use 6 peças
 - (d) Use 7 peças
 - (e) Use 8 peças

APÊNDICE D



Instituto Federal da Bahia
Docente: Fabiana Lopes
Data: / /

Campus Feira de Santana
Disciplina: Matemática
Turma:

Estudante:

ATIVIDADE 4: Roteiro da Atividade 3

1. Como foi possível desenvolver um novo código com os polígonos no jogo?
2. O uso do software facilitou sua compreensão das transformações geométricas? (Justifique sua resposta)
3. O GeoGebra permite visualizar mais claramente o movimento das figuras gráficas? (Justifique suas respostas)
4. O que mais chamou atenção na história dos *Quilts da Liberdade*? Aliar história e matemática ajudou na compreensão do conteúdo?
5. Como formas, padrões e simetrias em uma colcha podem comunicar informações? Os *quilts* despertaram sua atenção para os usos sociais da matemática?

6. Teve dificuldades em utilizar o GeoGebra durante as atividades?
7. Você reconhece que após a aula sobre os *quilts* e a utilização do GeoGebra ficou mais confiante em relação as suas habilidades e competências em matemática?