



Universidade Estadual de Feira De Santana
Programa de Pós-Graduação em Computação Aplicada

Manobras Evasivas Subótimas em LEO Sujeitas à Força de Arrasto Atmosférico e a Colisões Com Detritos Espaciais

Eduardo Mendes Oliveira

Feira de Santana

2016



Universidade Estadual de Feira De Santana
Programa de Pós-Graduação em Computação Aplicada

Eduardo Mendes Oliveira

**Manobras Evasivas Subótimas em LEO Sujeitas à
Força de Arrasto Atmosférico e a Colisões Com
Detritos Espaciais**

Dissertação apresentada à Universidade Estadual de Feira de Santana como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Computação Aplicada.

Orientador: Dr. Antônio Delson Conceição de Jesus

Feira de Santana

2016

Está página deverá ser substituída por uma folha contendo a ficha catalográfica.

Está página deverá ser substituída por uma folha contendo as assinaturas dos membros da banca, e deve ser posta após a ficha catalográfica.

Abstract

In this research we studied evasive maneuvers to avoid collisions in an environment with debris, enabling missions to the space. When a collision occurs, usually the space vehicle is completely damaged and destroyed, thus ensuring that the satellite avoids this collision will preserve the objective of the mission. In this study, we will see how a space vehicle can perform an evasive maneuver through the driveline under the effect of the atmospheric drag force, whose efficiency will be established through the settings of technological parameters, which are the amount of fuel in the space vehicle and the ability to eject the propellant through the propulsion system. The purpose of the evasive maneuver is to avoid the collision but to keep the vehicle in its nominal orbit. At first we found several initial conditions of collision with the space vehicle under the influence of Earth's gravitational force, to ensure that there would be a collision between objects, from that on, the propulsion force was applied, after that, considering only the effect of atmospheric drag on the objects and right after the two collisional objects were brought under the effect of both forces, the force of the atmospheric drag and the propulsion together. In search of the most economical maneuver, from the point of view of fuel consumption, maneuvers were performed with lower propulsion drive time, and at different times of the trajectory of the vehicle and also at random times with the use of the propulsion force . The maneuvers were found through numerical simulations for each mathematical model of disturbances added to the orbital dynamics under the influence of the gravitational force.

Keywords: Space debris, evasive maneuvers, propulsion system, atmospheric drag, Computer applied mathematical modeling

Resumo

Neste trabalho, fizemos o estudo de manobras evasivas para evitar colisões em ambiente de detritos, viabilizando as missões espaciais. Quando ocorre uma colisão, normalmente o veículo espacial fica totalmente danificado e destruído, portanto, garantir ao satélite o desvio da colisão, preservará o objetivo da missão. Neste estudo, veremos como um veículo espacial pode executar uma manobra evasiva, através do sistema propulsor, sob o efeito da força de arrasto atmosférico, cuja eficiência será estabelecida através das configurações dos parâmetros tecnológicos, sendo estes, a quantidade de combustível do veículo espacial e a capacidade de ejetar propelente pelo sistema propulsor. O objetivo da manobra evasiva é evitar a colisão, mas, mantendo o veículo em sua órbita nominal. A princípio foi encontrado um conjunto de condições iniciais de colisão com o veículo espacial sob o efeito da força gravitacional da Terra, para garantir que haveria a colisão entre os objetos e, a partir disto, foi aplicada a força de propulsão, depois considerando somente o efeito do arrasto atmosférico sobre os objetos e logo após, o veículo espacial e o detrito foram postos sob o efeito de ambas da força de propulsão e do arrasto atmosférico, juntas. Em busca da manobra mais econômica, do ponto de vista do consumo de combustível, foram executadas manobras com tempo de acionamento de propulsão menor, e em diferentes momentos da trajetória do veículo e também por tempos aleatórios de acionamento de força de propulsão. As manobras foram determinadas através de simulações numéricas para cada modelo matemático das perturbações adicionadas à dinâmica orbital sob o efeito da força gravitacional.

Palavras-chave: Detritos espaciais, Manobras evasivas, Sistema de propulsão, Arrasto atmosférico, Computação aplicada, Modelagem matemática.

Prefácio

Esta dissertação de mestrado foi submetida à Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS) como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Computação Aplicada.

A dissertação foi desenvolvida dentro do Programa de Pós-Graduação em Computação Aplicada (PGCA) tendo como orientador o Professor Dr. **Antônio Delson Conceição de Jesus**.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, por todas as bênçãos que tem me ofertado durante minha trajetória de vida e especialmente pela conclusão deste trabalho. Só Ele sabe o quanto foi difícil.

Agradeço também a minha família: à minha esposa, Dalila, que sonhou comigo e acreditou. Hoje podemos ver este sonho se tornar realidade. Agradeço ao meu filho Lucas Eduardo, todo o esforço é por você meu filho. Vocês têm sido a força que me falta nos momentos mais difíceis e a motivação quando surgia a vontade de desistir. Agradeço à minha mãe, Joseni Mendes (*in memoriam*), infelizmente não se faz mais presente e não pode ver nem o seu segundo neto, mas sei que ela sempre acreditou em mim, sempre me incentivou aos estudos, aos jogos matemáticos e lógicos e ficaria muito orgulhosa do seu filho caçula. Mãe sua educação foi fundamental para esta conquista. Estou ansioso para reencontrá-la na volta de Cristo, por enquanto, sinto muito a sua falta. Este trabalho é dedicado a você.

Como não agradecer à Família Bergamo: Jandimar, Sandra, Bruno, Fábio, Alana, Fabinho e Vinícius, obrigado a todos pelo apoio. Mas quero ressaltar o Jandimar Bergamo, de quem eu menos esperava, foi você quem apostou em minha carreira acadêmica; à Sandra Bergamo pelos conselhos e palavras de ânimo; e ao Fábio Bergamo, uma das mentes mais brilhantes e invejáveis que já conheci. Obrigado pela amizade sincera, você é uma pessoa inspiradora.

Agradeço também aos meus amigos Naassom e Lígia, genuínos irmãos nos momentos mais difíceis e também nos mais alegres, vocês são especiais na vida da minha família.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Antônio Delson, por tudo que fez por mim: a paciência, os conselhos, as orientações e principalmente pela compreensão nos vários momentos difíceis que tive. Saiba que o considero como um grande amigo, por quem tenho forte consideração. Tu és extremamente sábio e sublime no que faz. Também ao meu amigo Rafael Ribeiro que sempre me apoiou, me ajudou e me incentivou em todos os detalhes deste trabalho, eternamente agradecido. Agradeço também ao PGCA, pela oportunidade e confiança, especialmente aos professores Dr. Ângelo Duarte, Dr. Iranderly Fernandes e Dr. João Rocha Júnior, mesmo que indiretamente, vocês tiveram participação inspiradora.

Não posso deixar de agradecer à Faculdade Adventista da Bahia, pela confiança e oportunidade que me ofertou em cumprir mais uma etapa acadêmica da minha vida. Trabalhar nesta instituição tem sido a melhor escolha que fiz.

E por fim, agradeço a todos, de coração, que de alguma forma contribuíram nesta etapa tão importante em minha vida. Espero um dia poder retribuir cada gesto de carinho que vocês já demonstraram por mim. Obrigado!

Sumário

Abstract	i
Resumo	ii
Prefácio	iii
Agradecimentos	iv
Sumário	v
Lista de Publicações	vii
Lista de Tabelas	viii
Lista de Figuras	ix
Lista de Abreviações	xv
Lista de Símbolos	xvi
1. Introdução	1
1.1 Manobras orbitais e as Leis da Mecânica.....	1
1.2 Detritos Espaciais.....	2
1.3 Manobras Evasivas.....	5
1.4 Força de Propulsão.....	6
1.5 Força de Arrasto Atmosférico.....	7
1.6 Objetivos.....	10
1.7 Contribuições.....	10
1.8 Organização deste Trabalho.....	10
2. Revisão Bibliográfica	11
2.1 MANOBRAS ESPACIAIS E COLISÕES COM DETRITOS.....	11
2.2 TRASFERÊNCIA ORBITAL E MANOBRAS EVASIVAS NÃO IDEAIS....	11
2.3 DETRITOS ESPACIAIS E FRAGMENTAÇÃO.....	14
2.4 MISSÕES ESPACIAIS E ARRASTO ATMOSFÉRICO.....	16
3. Definição do Problema - Modelos Matemáticos e Recursos Computacionais	18
3.1 Manobras Evasivas e Subótimas – Definição do Problema.....	18
3.2 Dinâmica Relativa Colisional - Equações de Clohessy-Wiltshire.....	19
3.3 Dinâmica Relativa com Propulsão.....	23

3.4	Dinâmica Relativa com Força de Arrasto Atmosférico.....	26
3.5	Dinâmica Relativa – Forças Gravitacional, Arrasto Atmosférico e Força de Propulsão – Solução Semi Analítica.....	30
3.6	Simulações com a Força de Propulsão com o Arrasto Atmosférico – Solução Analítica.....	33
3.7	Recursos Computacionais.....	34
4.	Manobras Evasivas em Ambiente de Detritos Espaciais, sujeitas ao Arrasto Atmosférico	39
4.1	Reprodução dos Resultados de Jesus et al (2012).....	39
4.2	Simulações com Arrasto Atmosférico.....	42
4.3	Simulações da trajetória Sub Ótima com a Força de Propulsão.....	52
5.	Considerações Finais	58
5.1	Conclusão.....	58
5.2	Pesquisas Futuras.....	59
6.	Referências Bibliográficas	60
7.	Apêndice A	65

Lista de Publicações

Distribuição de Colisões entre Veículo e Detrito Espaciais sob Influência do Arrasto Atmosférico. (2014) *in* CBDO - Colóquio Brasileiro de Dinâmica Orbital.

Lista de Tabelas

Tabela 4.1. Posição relativa final entre os dois objetos em função do fator massa para diferentes velocidades de exaustão.....	41
Tabela 4.2. Posição relativa final entre os dois objetos em função do fator de potência para diferentes velocidades de exaustão.....	42
Tabela 4.3 Resumo das melhores estratégias sub ótima por octante – queima final..	53
Tabela 4.4 Resumo das melhores manobras por estratégia sub ótima por estratégia.	54

Lista de Figuras

Figura 1.1 A massa dos objetos em órbita da Terra oficialmente catalogado pela vigilância espacial dos EUA.....	3
Figura 1.2 - Número de manobras desde o lançamento do primeiro módulo, Zarya, em 1998.....	6
Figura 1.3. Força de arrasto atmosférico em uma órbita excêntrica e o decaimento orbital.....	8
Figura 1.4. Relação área-sobre-massa.....	8
Figura 1.5. Perfil da temperatura local em camadas distintas da atmosfera.....	9
Figura 1.6. Densidade atmosférica em função da altitude e da temperatura exosférica.....	9
Figura 3.1 - Sistema de referência orbital - veículo e detrito espacial colisionais.....	19
Figura 3.2 Distância Relativa entre os objetos colisionais sob o efeito da Força Gravitacional, da Força de Propulsão e do Arrasto Atmosférico, comparando a solução numérica e a semi-analítica.....	34
Figura 4.1. Possibilidades de colisões x distribuição de velocidades iniciais . FONTE: Baseado em [Jesus et al., 2012].....	40
Figura 4.2. Posição relativa entre os dois corpos em função do tempo com a força gravitacional e propulsão para diferentes fatores de potência.. FONTE: Baseado em [Jesus et al., 2012].....	40
Figura 4.3. Posição Relativa Final entre os dois objetos em função do fator massa para diferentes velocidades de exaustão. FONTE: Baseado em [Jesus et al., 2012] ...	41
Figura 4.4. Posição relativa final entre os dois objetos em função do tempo, com a força do arrasto atmosférico.....	43
Figura 4.5 Distância Relativa entre os dois objetos colisionais comparando entre as soluções com arrasto e com propulsão	44
Figura 4.6 Trajetória do detrito em relação ao centro da Terra.....	44
Figura 4.7 Visão 3D da trajetória do detrito.....	45
Figura 4.8 Distância relativa entre os objetos colisionais para diferentes coeficientes de arrasto atmosférico.....	45
Figura 4.9. Posição relativa final entre os dois objetos em função do tempo, com a força do arrasto atmosférico	46

Figura 4.10. Posição Relativa Final entre os dois objetos em função do tempo pra vários lambdas (entre 1 e 10) da força gravitacional com o arrasto atmosférico.....	47
Figura 4.11. Posição Relativa Final entre os dois objetos em função do tempo pra vários lambdas (entre 0,1 e 1) da força gravitacional com o arrasto atmosférico.....	47
Figura 4.12. Possibilidades de colisões x distribuição de velocidades iniciais com o arrasto atmosférico	48
Figura 4.13 Possibilidades de colisões x distribuição de velocidades iniciais com o arrasto atmosférico para o λ variando de 0 a 1, com passo de 0,1.	48
Figura 4.14 Possibilidades de colisões x distribuição de velocidades iniciais com o arrasto atmosférico para o λ variando de 0 a 10, com passo de 1.	49
Figura 4.15 Possibilidades de colisões x distribuição de velocidades iniciais com o arrasto atmosférico para o λ variando de 0 a 100, com passo de 10.....	50
Figura 4.16 Possibilidade de Colisão variando o λ entre 0 e 100, até 10 com passo 01 e de 10 até 100 com passo 10, para diferentes faixas de velocidades iniciais.....	51
Figura 4.17 Simetria das velocidades relativas. λ entre -6 e 6 com passo 1	52
Figura 4.18 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 49^\circ$	55
Figura 4.19 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 245^\circ$	55
Figura 4.20 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 155^\circ$	55
Figura 4.21 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 229^\circ$	56
Figura A.0.1 Relação de Consumo para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 57^\circ$	65
Figura A.0.2 Relação de Consumo para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 49^\circ$	65
Figura A.0.3 Relação de Consumo para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 65^\circ$	66
Figura A.0.4 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 49^\circ$	66
Figura A.0.5 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 49^\circ$	66
Figura A.0.6 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 49^\circ$	67
Figura A.0.7 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 49^\circ$	67
Figura A.0.8 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 57^\circ$	67
Figura A.0.9 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 57^\circ$	68
Figura A.0.10 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 57^\circ$	68
Figura A.0.11 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 57^\circ$	68
Figura A.0.12 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 65^\circ$	69
Figura A.0.13 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 65^\circ$	69
Figura A.0.14 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 65^\circ$	69
Figura A.0.15 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 65^\circ$	70
Figura A.0.16 Relação de Consumo para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 147^\circ$	70

Figura A.0.17 Relação de Consumo para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 139^\circ$	70
Figura A.0.18 Relação de Consumo para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 155^\circ$	71
Figura A.0.19 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 139^\circ$	71
Figura A.0.20 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 139^\circ$	71
Figura A.0.21 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 139^\circ$	72
Figura A.0.22 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 139^\circ$	72
Figura A.0.23 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 147^\circ$	72
Figura A.0.24 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 147^\circ$	73
Figura A.0.25 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 147^\circ$	73
Figura A.0.26 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 147^\circ$	73
Figura A.0.27 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 155^\circ$	74
Figura A.0.28 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 155^\circ$	74
Figura A.0.29 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 155^\circ$	74
Figura A.0.30 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 155^\circ$	75
Figura A.0.31 Relação de Consumo para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 237^\circ$	75
Figura A.0.32 Relação de Consumo para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 245^\circ$	75
Figura A.0.33 Relação de Consumo para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 229^\circ$	76
Figura A.0.34 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 229^\circ$	76
Figura A.0.35 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 229^\circ$	76
Figura A.0.36 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 229^\circ$	77
Figura A.0.37 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 229^\circ$	77
Figura A.0.38 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 237^\circ$	77
Figura A.0.39 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 237^\circ$	78
Figura A.0.40 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 237^\circ$	78
Figura A.0.41 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 237^\circ$	78
Figura A.0.42 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 245^\circ$	79
Figura A.0.43 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 245^\circ$	79
Figura A.0.44 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 245^\circ$	79
Figura A.0.45 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 245^\circ$	80
Figura A.0.46 Relação de Consumo para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 327^\circ$	80
Figura A.0.47 Relação de Consumo para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 335^\circ$	81
Figura A.0.48 Relação de Consumo para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 319^\circ$	81
Figura A.0.49 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 319^\circ$	81

Figura A.0.50 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 319^\circ$	81
Figura A.0.51 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 319^\circ$	82
Figura A.0.52 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 319^\circ$	82
Figura A.0.53 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 327^\circ$	82
Figura A.0.54 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 327^\circ$	83
Figura A.0.55 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 327^\circ$	83
Figura A.0.56 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 327^\circ$	83
Figura A.0.57 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 335^\circ$	84
Figura A.0.58 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 335^\circ$	84
Figura A.0.59 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 335^\circ$	84
Figura A.0.60 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 335^\circ$	85
Figura A.0.61 Relação de Consumo para $\phi = 158^\circ$ e $\theta = 57^\circ$	85
Figura A.0.62 Relação de Consumo para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 65^\circ$	85
Figura A.0.63 Relação de Consumo para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 49^\circ$	86
Figura A.0.64 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 49^\circ$	86
Figura A.0.65 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 49^\circ$	86
Figura A.0.66 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 49^\circ$	87
Figura A.0.67 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 49^\circ$	87
Figura A.0.68 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 158^\circ$ e $\theta = 57^\circ$	87
Figura A.0.69 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 158^\circ$ e $\theta = 57^\circ$	88
Figura A.0.70 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 158^\circ$ e $\theta = 57^\circ$	88
Figura A.0.71 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 158^\circ$ e $\theta = 57^\circ$	88
Figura A.0.72 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 65^\circ$	89
Figura A.0.73 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 65^\circ$	89
Figura A.0.74 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 65^\circ$	89
Figura A.0.75 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 65^\circ$	90
Figura A.0.76 Relação de Consumo para $\phi = 158^\circ$ e $\theta = 147^\circ$	90
Figura A.0.77 Relação de Consumo para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 155^\circ$	90
Figura A.0.78 Relação de Consumo para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 139^\circ$	91
Figura A.0.79 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 139^\circ$	91
Figura A.0.80 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 139^\circ$	91
Figura A.0.81 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 139^\circ$	92
Figura A.0.82 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 139^\circ$	92

Figura A.0.83 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 158^\circ$ e $\theta = 147^\circ$	92
Figura A.0.84 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 158^\circ$ e $\theta = 147^\circ$	93
Figura A.0.85 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 158^\circ$ e $\theta = 147^\circ$	93
Figura A.0.86 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 158^\circ$ e $\theta = 147^\circ$	93
Figura A.0.87 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 155^\circ$	94
Figura A.0.88 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 155^\circ$	94
Figura A.0.89 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 155^\circ$	94
Figura A.0.90 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 155^\circ$	95
Figura A.0.91 Relação de Consumo para $\phi = 158^\circ$ e $\theta = 237^\circ$	95
Figura A.0.92 Relação de Consumo para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 245^\circ$	95
Figura A.0.93 Relação de Consumo para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 229^\circ$	96
Figura A.0.94 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 229^\circ$	96
Figura A.0.95 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 229^\circ$	96
Figura A.0.96 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 229^\circ$	97
Figura A.0.97 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 229^\circ$	97
Figura A.0.98 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 229^\circ$	97
Figura A.0.99 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 229^\circ$	98
Figura A.0.100 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 229^\circ$	98
Figura A.0.101 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 229^\circ$	98
Figura A.0.102 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 245^\circ$	99
Figura A.0.103 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 245^\circ$	99
Figura A.0.104 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 245^\circ$	99
Figura A.0.105 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 245^\circ$	100
Figura A.0.106 Relação de Consumo para $\phi = 158^\circ$ e $\theta = 327^\circ$	100
Figura A.0.107 Relação de Consumo para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 335^\circ$	100
Figura A.0.108 Relação de Consumo para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 319^\circ$	101
Figura A.0.109 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 319^\circ$	101
Figura A.0.110 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 319^\circ$	101
Figura A.0.111 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 319^\circ$	102
Figura A.0.112 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 319^\circ$	102
Figura A.0.113 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 158^\circ$ e $\theta = 327^\circ$	102
Figura A.0.114 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 158^\circ$ e $\theta = 327^\circ$	103
Figura A.0.115 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 158^\circ$ e $\theta = 327^\circ$	103

Figura A.0.116 Propulsão Sub Ótima Aleatório para $\phi = 158^\circ$ e $\theta = 327^\circ$	103
Figura A.0.117 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 245^\circ$	104
Figura A.0.118 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 245^\circ$	104
Figura A.0.119 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 245^\circ$	104
Figura A.0.120 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 245^\circ$	105

Lista de Abreviações

Abreviação	Descrição
LEO	Órbita Terrestre Baixa (Low Earth Orbit)

Lista de Símbolos

Símbolo	Descrição
ω	Velocidade Angular do Veículo Espacial
ω_e	Velocidade Angular de Rotação da Terra
ρ	Densidade Atmosférica
π	Número pi
μ	Densidade da Massa da Terra
ϕ	Ângulo no plano Terrestre
θ	Ângulo no espaço Terrestre
χ	Constante de proporcionalidade da razão da do veículo espacial com a massa inicial de combustível
γ	Fator de Potência do Sistema Propulsor
λ	Constante utilizada para o método de separação de variáveis.
β	Constante do Arrasto Atmosférico

Capítulo 1

Introdução

“Os homens sempre precisam estar pesquisando, sempre aprendendo; contudo, há um infinito além...”

-- Ellen G. White

As manobras orbitais são essenciais para os veículos espaciais. É através das manobras que uma missão espacial pode obter sucesso em relação aos seus objetivos, eliminando erros de lançamentos, ou para trazer o veículo espacial para uma órbita mais desejável. Uma manobra orbital é a transferência de um veículo espacial de uma órbita para outra [Curtis, 2010]. Para a execução desta manobra, utiliza-se um sistema propulsor sobre o veículo espacial, alterando seu estado inicial, para um estado final em um determinado tempo. O estado do veículo é definido por sua posição, velocidade e massa. Ou seja, o estado inicial $(\vec{r}_0, \vec{v}_0, m_0)$ para um estado final $(\vec{r}_f, \vec{v}_f, m_f)$, em um instante final $t_f > t_0$.

Apesar da aparência simplista da definição da manobra orbital, implementá-la sugere desafios, devido às limitações físicas e tecnológicas e a algumas restrições que são adicionadas para se conseguir a melhor performance do veículo espacial, por exemplo, o consumo mínimo de combustível, o tempo mínimo e a velocidade final mínima.

1.1 Manobras orbitais e as Leis da Mecânica

O estudo das manobras orbitais e suas aplicações em missões espaciais tem base nas leis de Kepler e de Newton, as quais regem a dinâmica associada às manobras espaciais. A Dinâmica Orbital é uma subárea de conhecimento da Mecânica Celeste, e trata especificamente dos objetos espaciais em torno da Terra e também da exploração espacial.

“Esta dinâmica que trata apenas do problema orbital é chamada de Dinâmica Orbital, que rege o movimento orbital dos objetos espaciais (artificiais, como veículos espaciais, por exemplo, e naturais, como planetas, detritos espaciais, etc.).” [Sousa, 2013]

Através das leis de Newton, a dinâmica relativa entre um veículo espacial e um astro qualquer ou entre um veículo espacial e um detrito, pode ser determinada,

conhecendo-se as forças atuantes nestes objetos espaciais. A segunda lei de Newton determina a força resultante e a solução da equação diferencial representante da dinâmica fornece cônicas com foco no corpo principal. As leis de Kepler interpretam as cônicas fechadas (elipses e circunferências), que servem aos propósitos das missões espaciais para órbitas de veículos espaciais e detritos em torno da Terra.

Existem duas categorias principais de manobras orbitais, a saber: [Curtis, 2005]:

- **Manobra de Transferência:** são destinadas a alterar significativamente a órbita do veículo e possuem grandes altitudes;
- **Manobra de Correção:** tem o objetivo de eliminar os diversos efeitos perturbativos. Possuem pequenas amplitudes e mantém o veículo em uma determinada órbita.

Ao redor da Terra existem satélites operacionais, como pode ser visto em tempo real no site da NASA - <http://liftoff.msfc.nasa.gov/Real>, suas respectivas localizações em tempo real. Estes satélites são usados pela Ciência e Tecnologia Espacial para diversas finalidades, desde observação da Terra, meteorologia, pesquisa de clima, telecomunicações, navegação até a exploração espacial humana. Eles oferecem um ótimo recurso para a obtenção de dados científicos, que conduzem a possibilidades inigualáveis para a pesquisa e exploração, seja esta científica, comercial ou militar.

1.2 Detritos Espaciais

Nas últimas décadas, com o aumento das atividades espaciais, um risco novo e inesperado começou a surgir: o lixo espacial. São quase 50 anos de atividades espaciais, mais de 4.900 lançamentos que colocaram cerca 6.600 satélites em órbita, dos quais, 3.600 permanecem no espaço e apenas uma pequena fração, cerca de 1.000, ainda está em operação hoje [ESA, 2015]. Veja na **Erro! Fonte de referência não encontrada.** a massa dos objetos não operacionais em órbita da Terra catalogados pela Vigilância Espacial dos EUA.

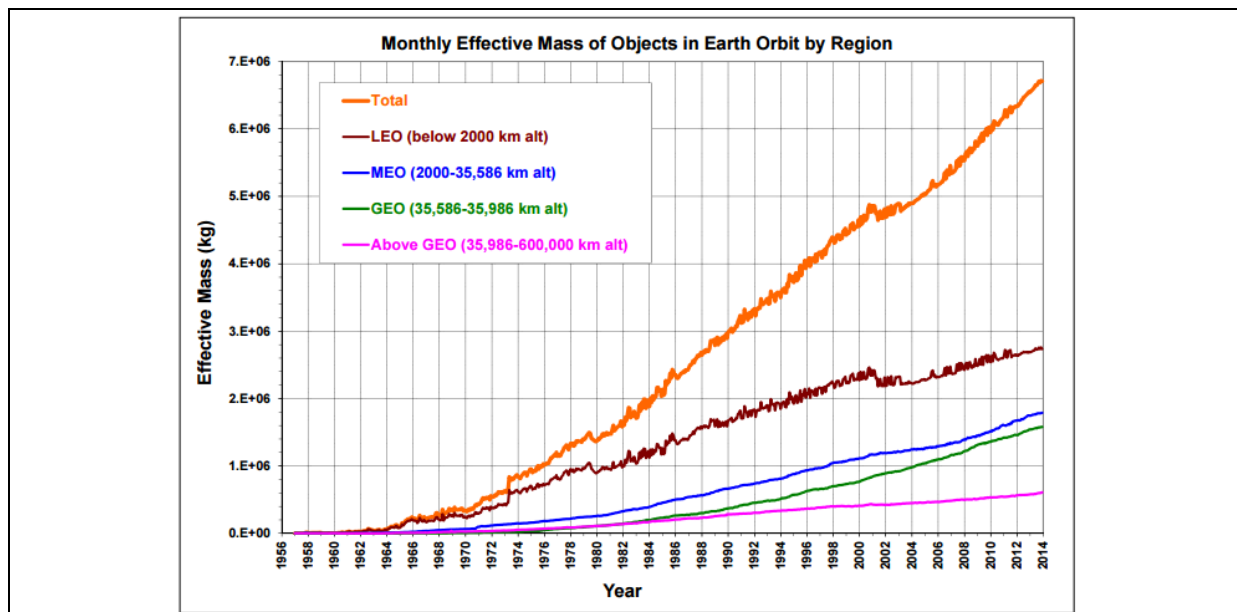


Figura 1.1 A massa dos objetos em órbita da Terra oficialmente catalogado pela vigilância espacial dos EUA
Fonte: [NASA, 2015]

Esta grande quantidade de detritos espaciais tem uma massa total de mais de 6.300 toneladas. Mais de 23.000 objetos espaciais estão nas órbitas da Terra (em setembro de 2012) e são regularmente monitorados pela Rede de Vigilância Espacial dos Estados Unidos e mantidos em seu catálogo, que abrange os objetos maiores do que cerca de 5 a 10 cm em órbita baixa da Terra (LEO) e 30 cm a 1m em altitudes geostacionárias (GEO) [ESA, 2015].

Apenas 6% da população das órbitas catalogadas são naves operacionais, enquanto cerca de 30% podem ser atribuídos à desmontagem dos satélites quando passam para estágios superiores e os objetos relacionados com a missão, como adaptadores de lançamento, que são descartados. Desde 1961, já foram registrados mais de 250 eventos, envolvendo fragmentos espaciais, sendo a grande maioria de explosões de naves espaciais.

A principal causa de explosões em órbita está relacionada com combustível residual que permanece em tanques ou linhas de combustível dos estágios de foguete ou satélite que são descartados na órbita da Terra. Além disso, ao longo do tempo, o ambiente espacial pode deteriorar a integridade das partes externas e internas do veículo, podendo misturar os componentes do combustível, e acabar provocando uma autoignição. A explosão resultante pode destruir o objeto e espalhar sua massa através de numerosos fragmentos com diferentes massas e velocidades. Além destes acidentes, interceptação de naves espaciais por mísseis lançados da Terra tem contribuído para o crescente número de detritos.

Os detritos são originados de fontes primárias e secundárias. As fontes primárias (ou principais) são os detritos produzidos pelo homem (*human debris*) e os detritos produzidos pela natureza (*natural debris*). As fontes secundárias são as que geram detritos a partir de colisões entre eles, que produz fragmentos de detritos menores do que os originais [Sousa, 2013].

Parte do que já foi dito sobre a produção de detritos, refere-se aos detritos produzidos

pelo homem. Os detritos naturais são aqueles resultantes de processos naturais que aconteceram em épocas remotas e/ou acontecem atualmente no universo, como por exemplo: poeiras cósmicas e gás deixado por passagem de cometas próximo da Terra (estes formam meteoroides), meteoros, partículas diversas do espaço sideral que são capturadas pelo campo gravitacional terrestre. Neste sentido, consideramos todos os corpos e partículas capturados pelo campo gravitacional terrestre, como sendo detrito espacial.

As manobras e órbitas realizadas em missões espaciais podem interceptar as manobras destes detritos, o que possibilitaria a colisão entre os objetos espaciais. Os detritos movimentam-se com velocidades relativas consideravelmente grandes, o que lhes confere energia suficiente para gerar acidentes de grandes proporções, ocasionando perdas de vidas e cifras de milhares ou milhões de dólares [Jesus, 2008]

As agências espaciais internacionais mantêm centros de observações dos detritos maiores que 10 cm com observações exaustivas e diárias. A Agência Espacial Europeia, *European Space Agency* (ESA), possui um telescópio de detritos espaciais em operação que fornece seus dados através de catálogos de observação. Eles são utilizados para a validação de modelos de evolução da população dos detritos e para a avaliação de risco de colisão com veículos operacionais.

Assim, também, a National Aeronautics and Space Administration (NASA), possui um rígido critério quanto à política dos detritos espaciais. A Agência possui um escritório exclusivo do Programa de Detritos Orbitais do Centro Espacial Johnson, em Houston, Texas, com o objetivo de encontrar maneiras de criar menos detritos orbitais e se livrar de detritos que já estão no espaço [NASA, 2015].

O grande desafio é analisar o risco que os detritos espaciais representam às missões e veículos espaciais. Os melhores radares e telescópios óticos ainda possuem dificuldades para detectar detritos menores que 10 cm. Segundo observações, existem cerca de 18.000 objetos maiores que 10 cm, 200.000 objetos entre 01 e 10 cm e mais de 330 milhões de objetos menores que 1 cm [ESA, 2015].

Ao aumentar a atividade espacial, aumenta-se a quantidade de detritos secundários em uma reação em cadeia e quando a taxa de deposição destes detritos for maior do que a taxa de entrada na atmosfera, uma espécie de cinturão artificial se forma ao redor da Terra, inviabilizando o espaço de valor operacional para as missões espaciais.

A grande preocupação das agências espaciais internacionais está na frequência das colisões detrito-detrito que geram detritos secundários menores. A vida dos detritos espaciais em órbita depende das suas taxas de remoção e deposição destes fragmentos. O principal meio de remoção dos detritos é o arrasto atmosférico da Terra, que os leva a reentrada na atmosfera e são na maioria das vezes destruídos pelo atrito atmosférico. Porém o arrasto atmosférico é limitado às órbitas do tipo LEO (Órbitas Baixas da Terra). Em órbitas médias (MEO) e grandes altitudes (GEO) os detritos levam centenas ou milhares de anos para reentrar na atmosfera da Terra. A taxa de criação devida aos lançamentos orbitais é altíssima e supera a taxa de remoção pelo arrasto atmosférico, levando ao crescimento da população de detritos espaciais em regiões operacionais.

1.3 Manobras Evasivas

Uma categoria especial de manobras orbitais são as manobras espaciais evasivas, cujo estudo é necessário para o estabelecimento de estratégias para as missões espaciais de veículos operacionais. Tais missões espaciais ocorrem em diversas altitudes e em ambientes que são populados por detritos espaciais. As manobras evasivas devem ser planejadas e implementadas para que o veículo escape de possíveis colisões com os detritos.

Quando não é possível à realização da manobra evasiva, uma colisão é certa. Na colisão poderão ocorrer perdas irreparáveis ao veículo espacial e, portanto, o comprometimento completo da sua missão, gerando prejuízos incalculáveis em diversos sentidos. Tal acidente pode ser evitado, através da implementação de manobras específicas do veículo, através da atuação do seu sistema propulsor. As manobras evasivas evitam a colisão entre o veículo operacional e o detrito espacial. A eficiência destas manobras depende da tecnologia do sistema de propulsão e do radar. O primeiro, para a execução do arco de queima evasivo e, o segundo, para prever a colisão com antecedência suficiente que permita a implementação da manobra evasiva. Estas manobras são executadas, aplicando-se estratégias tecnológicas, previamente pensadas e calculadas.

Conforme Jesus et al (2012), uma manobra evasiva pode ser realizada de duas formas, em geral:

- Através da atuação do sistema propulsor, que demandará consumo de combustível a bordo;
- Através de manobras de *Swing-By* em torno de corpos celestes massivos, os quais fornecerão energia gravitacional ao veículo espacial.

O *Swing-By* é uma manobra mais difícil de implementar, pois depende de alguns fatores, como a posição dos corpos celestes e da missão. A energia deve ser suficiente para colocar o veículo espacial em outra órbita, fora do alcance da colisão. A primeira manobra, através do sistema propulsor, é mais comum de ser utilizada por ser mais fácil e controlável. O Dr. Heiner Klinkrad especialista em detritos espaciais do Centro Europeu de Operações Espaciais (ESOC), Darmstadt, Alemanha diz:

“É agora prática comum que os satélites que orbitam próximo da Terra transportem uma reserva de combustível apenas para efetuar as manobras de evasão durante a vida útil da sonda”. (KLINKRAD, 2005)

Veja na **Erro! Fonte de referência não encontrada.**, a seguir, uma série de manobras evasivas que foram realizadas entre 1998 e 2014 para a Estação Espacial Internacional (ISS) frente a ameaças reais de colisão com detritos decorrentes de outros objetos espaciais. Observe que somente em 2014, foram executadas 05 manobras evasivas, por uma única estação espacial.

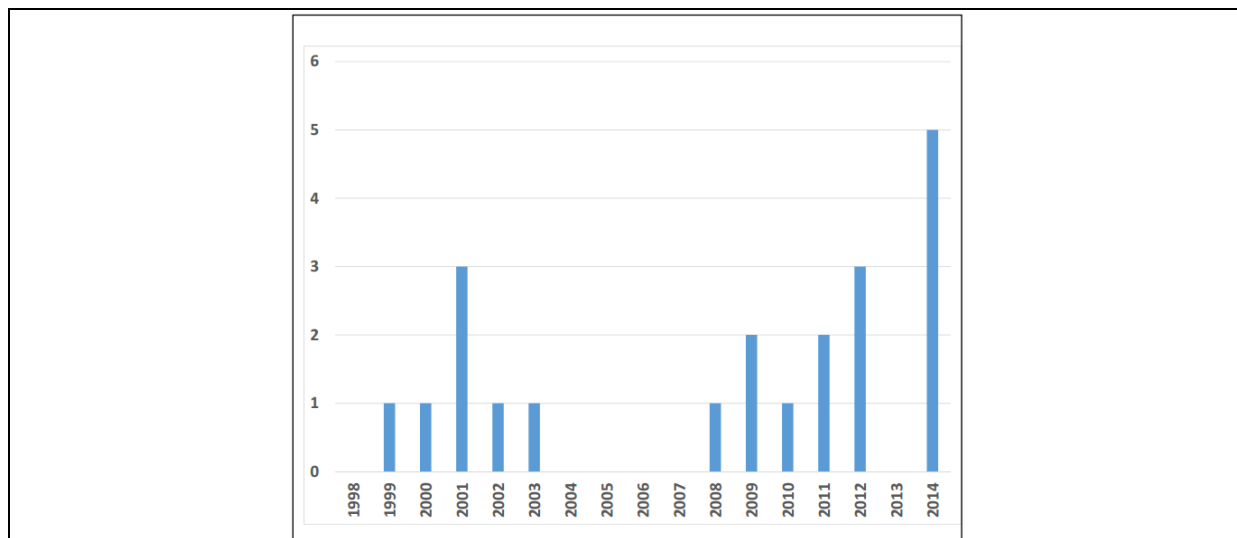


Figura 1.2 - Número de manobras desde o lançamento do primeiro módulo, Zarya¹, em 1998.
Fonte: NASA/The Orbital Debris Quarterly News.

1.4 Força de Propulsão

Durante as manobras espaciais (transferência orbital, manobras de correções ou manobras evasivas) torna-se desejável um sistema de propulsão, no qual se possa maximizar a carga útil e minimizar o consumo de combustível. Há décadas a propulsão vem sendo estudada, especialmente a propulsão a plasma (ou mesmo a elétrica), que é usada como um dos mecanismos eficientes para manobras de precisão nas atividades espaciais.

O uso de um sistema propulsor a plasma ou químico está associado à demanda das missões espaciais e é o mais eficiente para a implementação da velocidade de escape da Terra. Geralmente, a propulsão a combustíveis sólidos é de alto custo e ainda ocupa espaço importante no corpo dos veículos espaciais.

A propulsão a plasma é considerada ótima do ponto de vista de consumo eficiente do combustível. Outras vantagens podem também ser apontadas no uso deste tipo de propulsão, por exemplo, no aumento considerável da carga útil do veículo espacial, devido ao uso reduzido de massa do combustível. É uma propulsão de baixa potência comparada com a produzida pelo combustível sólido [Pôssa e Ferreira, 2009]. No entanto, esta propulsão apresenta impulso específico (por unidade massa) alto. Os primeiros resultados brasileiros de um desenvolvimento de um propulsor a plasma movido a efeito Hall foram apresentados por pesquisadores da Universidade de Brasília (UNB), [Pôssa e Ferreira, 2009].

As missões espaciais bem sucedidas como a Deep Space One e Dawn [NASA] e a Hayabusa [JAXA] e Smart-1 [ESA] foram baseadas em sistemas de propulsão elétricos e muitas sondas espaciais possuem como sistema de propulsão primário este

¹ Zarya (Dawn) foi o primeiro módulo de controle inicial, também conhecido como o Bloco Funcional Carga, a ser lançado para a Estação Espacial Internacional (ISS) [NASA, 2015].

tipo de sistema. Na propulsão elétrica o período de aceleração é longo, o que possibilita a implementação de velocidades elevadas. Os sistemas iônicos são, contudo, menos potentes do que os dos propulsores usuais à base de combustível químico, possuindo a desvantagem de requerer mais tempo (e, portanto, mais arcos de queima) para alcançar a órbita nominal desejada [Jesus et al., 2014].

Desta forma, um estudo mais completo sobre a dinâmica relativa de colisão entre objetos espaciais deve levar em consideração o tipo do sistema propulsor do veículo operacional, visto que manobras evasivas necessitam ser implementadas com objetivo de se evitar as colisões. O Brasil está avançando no desenvolvimento de um propulsor a plasma tipo Hall e, no momento, encontra-se na última fase da sua construção [Pôssa e Ferreira, 2009].

1.5 Força de Arrasto Atmosférico

As estratégias para estas manobras evasivas devem incluir um modelo de ambiente espacial mais realista possível e, neste caso, a inclusão de forças dissipativas que atuam gastando a energia dos objetos colisionais deve ser feita no modelo.

Um exemplo de força dissipativa é o arrasto atmosférico, resultante do atrito com o movimento da atmosfera que gira junto com a Terra. O seu efeito é o de retardar o movimento de um objeto orbitante. Quando um satélite entra na atmosfera, a velocidade relativa dá origem à resistência do ar, ou seja, à força de arrasto, que resulta da velocidade orbital e a velocidade de rotação da atmosfera [Wildhack, 1958]. O arrasto atmosférico é a principal força que atua em satélites artificiais em baixas altitudes terrestres (LEO). Com respeito aos detritos espaciais, o arrasto atmosférico atua como removedor natural, retirando-os das suas órbitas e projetando-os na atmosfera. Do ponto de vista dos riscos que os detritos representam às viagens espaciais, o arrasto atua de forma positiva, limpando o ambiente espacial fora da Terra.

O arrasto atmosférico depende da densidade do meio. Para um satélite artificial, a força de arrasto é maior no perigeu², porque neste local, a atmosfera é mais densa. A cada período de revolução completado, o arrasto afeta a órbita do satélite, contraindo-a, pois ele age diretamente na excentricidade da órbita [Raimundo et al., 2003]. Assim, o satélite não irá ter a mesma energia no apogeu seguinte e, a cada revolução, a órbita vai se aproximando de um círculo, conforme a **Erro! Fonte de referência não encontrada.**

A expressão da força de arrasto pode ser dada por:

$$\vec{D} = -\frac{1}{2}\rho C_D S v_r \vec{v}_r \quad (1.1)$$

onde ρ é a densidade atmosférica, C_D é o coeficiente de arrasto, S é a área efetiva e v_r é a velocidade do satélite em relação à atmosfera da Terra. A Figura 1.4, a seguir, mostra a relação área-sobre-massa para um veículo espacial.

² Quando a Lua está em seu ponto mais próximo da trajetória ao redor da Terra.

Vários fatores influenciam sobre o ρ , entre eles: a temperatura nas camadas atmosféricas em um ciclo solar de *Schwabe*, a mudanças na superfície solar, na variação diurna, as variações latitudinais e sazonais na termosfera, as variações semianuais e as variações com atividade geomagnética. O C_D depende das propriedades do satélite, tais como, materiais, acabamentos, temperatura, ângulo de incidência etc. A área do veículo espacial, conhecida como área projetada, é a área externa do satélite projetada na direção da velocidade relativa com a atmosfera. A velocidade, v_r , é calcula considerando que a velocidade angular da atmosfera é a mesma velocidade de rotação da Terra [Kuga et al., 2000].

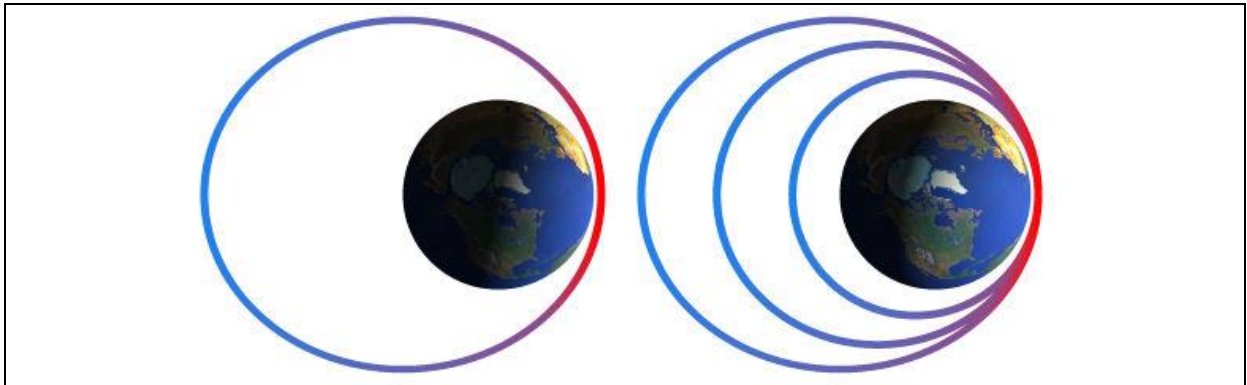


Figura 1.3. Força de arrasto atmosférico em uma órbita excêntrica e o decaimento orbital.
Fonte: [Kuga et al., 2000]

A força de arrasto afeta principalmente o semi-eixo maior e a excentricidade orbital. Como a densidade atmosférica cai exponencialmente com a altitude, também a força de arrasto diminui exponencialmente. No entanto, tanto a densidade como o coeficiente balístico (o produto de C_D pela relação área-sobre-massa, S/m) dependem de vários fatores [Kuga et al., 2000].



Figura 1.4. Relação área-sobre-massa.
Fonte: [Kuga et al., 2000]

O valor do coeficiente de arrasto fica normalmente compreendido entre 1,2 e 3,8 e a densidade atmosférica varia exponencialmente com altitude e depende basicamente da sua constituinte principal, ou seja, do elemento principal que compõe a atmosfera. Em LEO, órbitas com até 2000 km de altura, a constituinte principal é o oxigênio para alturas até 1000 km. Alturas entre 1000 e 2000 km, a constituinte principal é o Hélio [Kuga et al., 2000]. Além disso, as mudanças da temperatura de acordo com a altitude também provocam mudanças na densidade e na fração individual de cada componente dos gases da atmosfera. **A Erro! Fonte de referência não**

encontrada. mostra o perfil da temperatura local para 4 temperaturas distintas e apresenta as propriedades da alta atmosfera. A **Erro! Fonte de referência não encontrada.** apresenta densidade atmosférica em função da altitude e da temperatura exosférica.

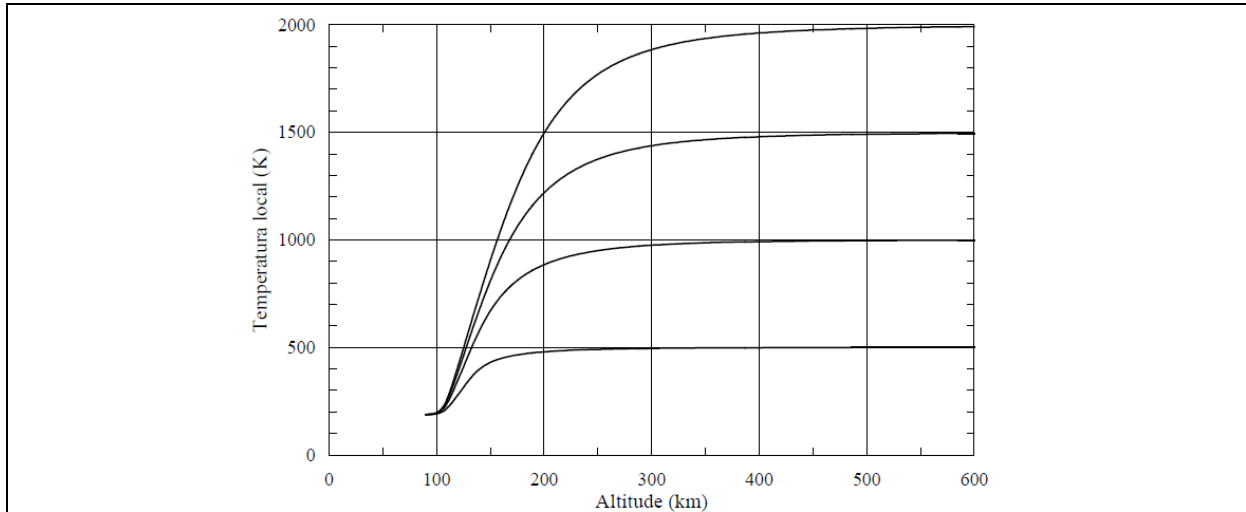


Figura 1.5. Perfil da temperatura local em camadas distintas da atmosfera.
 FONTE: [Kuga et al., 2000]

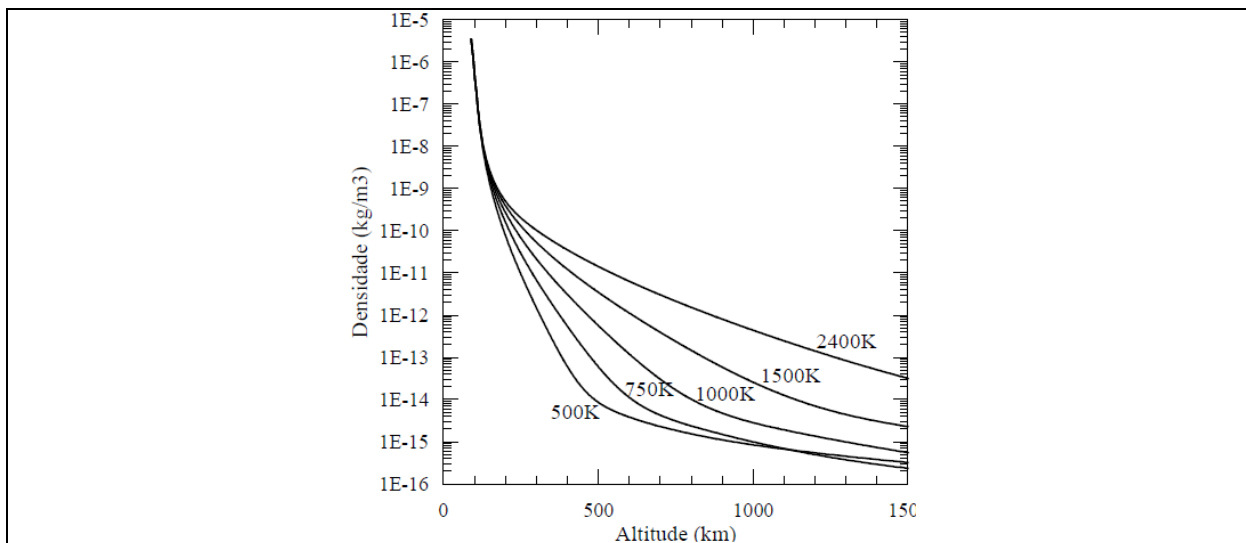


Figura 1.6. Densidade atmosférica em função da altitude e da temperatura exosférica.
 FONTE: [Kuga et al., 2000]

Além disto, a densidade atmosférica depende do ângulo formado entre a direção do Sol e o local onde se encontra o satélite, medido a partir do centro da Terra. Este efeito é conhecido como a “variação diária ou diurna”. Há também a contribuição das variações sazonais-latitudinais, que dependem da época do ano, da latitude e da altitude.

1.6 Objetivos

Os objetivos deste trabalho foram:

- 1) Validar os resultados encontrados por [Jesus et al., 2012] para ampliarmos a área de estudo, incluindo a força de arrasto atmosférico
- 2) Obter características tecnológicas de manobras evasivas subótimas que alcançam a melhor estratégia do ponto de vista de consumo de combustível em ambiente de detritos espaciais colisionais, considerando a força do arrasto atmosférico para densidade atmosférica constante;
- 3) Desenvolver um modelo matemático da solução analítica da dinâmica relativa sob o efeito da força gravitacional e a força do arrasto atmosférico com densidade atmosférica constante;
- 4) Desenvolver um modelo matemático da solução analítica da dinâmica relativa sob o efeito da força gravitacional, da força de propulsão e do arrasto atmosférico com densidade atmosférica constante.

1.7 Contribuições

A aplicação das manobras evasivas espaciais é de larga escala, desde interesses civis, científicos e até interesses militares. Diante do avanço da Tecnologia Espacial, com vistas à exploração e utilização do ambiente fora da Terra, os programas espaciais buscam soluções urgentes e implementáveis para o problema da segurança espacial que envolve colisões com detritos.

1.8 Organização deste Trabalho

No Capítulo 1 é apresentada uma introdução da dissertação incluindo conceitos gerais, objetivos e contribuições. No Capítulo 2 apresentamos uma revisão bibliográfica do tema em estudo, listando os principais trabalhos na área para compreensão dos conhecimentos apresentados. No Capítulo 3 apresentamos a definição do problema que motivou a pesquisa. No Capítulo 4 são descritos os modelos matemáticos utilizados, assim como os recursos computacionais utilizados nas simulações numéricas. No Capítulo 5 são apresentados os resultados encontrados na pesquisa. E por fim, no Capítulo 6, apresentamos as considerações finais, concluindo a dissertação, e sugerindo trabalhos futuros.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

“Raramente se vence a incredulidade pela discussão. Antes isso como que a põe em guarda, encontrando novo apoio e desculpa...”

-- Ellen White

2.1 Manobras Espaciais e Colisões Com Detritos

As manobras espaciais com objetivo de escapar de iminentes colisões com objetos espaciais estão incluídas no contexto das manobras orbitais. Estas manobras são comumente utilizadas nas missões espaciais, envolvendo objetos operacionais (satélites, sondas, ônibus espaciais, estação espacial internacional, etc.) diante de uma provável colisão com objetos espaciais não operacionais (detritos espaciais). Quando é possível, o veículo operacional escapa da colisão, através da operação do seu sistema de propulsão. Mas, quando não é possível, ocorre a colisão que poderá até trazer perda total do veículo e, portanto, o comprometimento completo da sua missão, gerando prejuízos incalculáveis para as agências e os contribuintes. Manobras evasivas também são utilizadas para interesses militares, quando se projeta mísseis que podem ser detectados e, portanto, interceptados e destruídos. Neste caso, a colisão ocorreria entre dois objetos operacionais. Desta forma, pouco material tem sido publicada em literatura aberta sobre este tipo de colisão. Mesmo as missões civis apresentam pouca literatura que fala especificamente sobre as manobras evasivas. Nesta revisão, citaremos trabalhos gerais que tratam de transferência orbital, manobras orbitais econômicas, detritos espaciais, fragmentação e manobras evasivas em ambiente de arrasto atmosférico.

2.2 Transferência Orbital e Manobras Evasivas Não Ideais

A busca da trajetória ótima de transferência de um veículo espacial de um ponto para outro, de forma mais econômica, surgiu com [Goddard, 1919]. Neste trabalho soluções

otimizadas de mínimo combustível para enviar um foguete para grandes altitudes foram investigadas. Goddard descreveu uma teoria matemática de lançamento de foguetes, através de suas experiências com combustíveis sólidos, em que calculou a massa mínima necessária para elevar um foguete para uma altitude no “infinito”, longe do campo gravitacional da Terra. Antes dele, o trabalho de Konstantin [Tsiolkovsky, 1903] propôs a exploração do espaço por meio de dispositivos de reação. Estes dois trabalhos são pioneiros na ciência de foguetes espaciais. A transferência orbital coplanar entre órbitas circulares com consumo mínimo de combustível foi proposta por [Hohmann, 1925]. Mais tarde, as transferências entre órbitas elípticas foram estudadas por [Barrar, 1963] e hoje é base para modelos mais complexos de transferência orbital. [Felipe e Prado, 2001], concluíram que aplicando-se a propulsão impulsiva e a multi-impulsiva para a realização de uma manobra de *Rendezvous*, o aumento de consumo de propelente é proporcional ao aumento na inclinação entre os planos das órbitas dos veículos espaciais. Estes trabalhos apontam para uma manobra orbital evasiva ideal como sendo aquela realizada com o menor gasto de combustível possível. O estudo de manobras evasivas realizado neste trabalho foi motivado pelos trabalhos de [Clohessy e Wiltshire, 1960] e [Jesus, 2008]. No primeiro trabalho, as equações da dinâmica relativa entre dois objetos espaciais sujeitos ao campo gravitacional da Terra foram determinadas. Uma solução semi-analítica foi obtida para descrever uma manobra de *Rendezvous* em que um dos sistemas de coordenadas é posto no veículo espacial, chamado de satélite de controle e toda a manobra de encontro foi realizada neste sistema de referência. Como resultado, obteve-se uma estratégia tecnológica tal que os veículos se encontram de modo que o sistema de propulsor controla suas velocidades relativas finais para zero, definindo a intercepção. No segundo trabalho, Jesus mostrou a solução de uma dinâmica relativa com propulsão, admitindo modelo de massa variável linear e exponencial no tempo para a queima de combustível. Neste modelo foram incluídos desvios ângulos *pitch* e *yaw* na dinâmica. Em 1999, Jesus demonstrou a relação de causa e efeito entre os desvios derivados de um sistema de propulsão não ideal e o estado que caracteriza a órbita final de um veículo espacial operacional. Seus resultados mostraram que os desvios cometidos na direção do vetor empuxo afetam a órbita final de um veículo espacial. O trabalho de [Jesus, 1999] foi o pioneiro na área dos desvios no sistema propulsor e aplicação às manobras espaciais. Depois disto, [Jesus e Teles, 2007] incluíram a variação linear e exponencial da massa na dinâmica não ideal, considerando também desvios no ângulo fora do plano da órbita. As manobras estudadas foram de *Rendezvous* entre duas espaçonaves. Eles encontraram uma relação de causa e efeito não linear entre as coordenadas que localizam os veículos espaciais e os erros de direção no vetor empuxo. Todos estes modelos estabeleceram a base teórica para a realização de manobras evasivas, considerando um sistema de propulsão mais realista, ou seja, com incertezas produzidas pela sua não-idealidade. Um modelo físico-matemático de abordagem probabilística para a dinâmica dos detritos sob ação do campo gravitacional foi desenvolvido por [Jesus, 2008] através da distribuição estatística das suas posições, considerando o método da Soma Vetorial Aleatória e o da Caminhada Aleatória, desenvolvido por ele, determinando a probabilidade de encontrar um detrito em função da sua posição num instante qualquer. Neste modelo, Jesus considerou que as posições do detrito são obtidas em tempo real por um sistema de rastreamento de radares. Um sistema detector de objetos espaciais é de grande importância em missões espaciais e, principalmente, para aplicações militares e de

segurança nacional. A utilização de manobras evasivas também é feita para aeronaves, considerando ângulos de ataque, tempo mínimo de operação, economia de energia, etc. frente a iminentes colisões com mísseis ou com outras aeronaves em colisão acidental. [Shinar e Steiberg, 1997] estudaram manobras evasivas de uma aeronave, utilizando um modelo cinético 2D linearizado, considerando certos fatores negligenciados em muitas abordagens, tais como a estrutura dinâmica do sistema de guiagem da aeronave, a localização do elemento de saturação no “loop” da guiagem, a taxa do ângulo *roll* limitada para a evasão da aeronave, frente a uma colisão com um míssil. [Well et al., 1982] estudaram o problema de manobras evasivas de aeronaves através do uso de técnicas de otimização numérica em regiões típicas dos ângulos de ataque. Condições de contorno foram combinadas com vínculos de caminhos de trajetórias e forneceram manobras ótimas com tempo de vôo reduzido, se as manobras forem realizadas sob ângulos de ataque elevados. [Imado e Miwa, 1986] estudaram manobras evasivas de uma aeronave sob diversas estratégias e condições iniciais de ângulo relativo e altitude. Encontraram diversas características das manobras evasivas para bloquear a colisão com um míssil. Seus resultados mostraram que cada manobra possui uma região de vantagem específica, deixando a critério do piloto a escolha da estratégia evasiva, dependendo da geometria e da altitude do sistema míssil-aeronave. Um algoritmo numérico para manobras evasivas frente a uma nuvem de detritos gerada por acúmulo gravitacional dos fragmentos de um satélite foi desenvolvido por [Prado e Broucke, 1996]. A nuvem de detritos foi teórica e as manobras evasivas foram realizadas para um satélite localizado na mesma altitude da nuvem. Em 2003, Jung e cooperadores [Jung et al., 2003] estabeleceram estratégias evasivas para uma aeronave contra guiagem de navegação de um míssil. Eles não puderam adotar manobras evasivas ótimas como lei de guiagem em tempo real e utilizaram inteligência artificial para obter manobras evasivas sub-ótimas em tempo real. Utilizaram redes neurais sinápticas e funções difusas que foram otimizadas pelo Método de Gradiente. As simulações numéricas por Monte-Carlo mostraram que o desempenho da lei de guiagem foi melhor do que aqueles de guiagem convencional. Recentemente, manobras estratégicas ótimas foram obtidas por Yang Guo [Guo et al., 2011] para veículos espaciais em tempo mínimo, as quais maximizaram a distância mínima de colisão, ampliando a predição dos erros e economizando energia. As manobras consideram um sistema de detecção de mísseis. Eles utilizaram o método de Inequações Matriciais Diferenciais Lineares. Também em 2001, Jesus e cooperadores [Jesus et al., 2012] estabeleceram condições tecnológicas para a realização de manobras evasivas para satélites ou outros veículos frente a colisões iminentes com detritos espaciais em órbitas baixas da Terra (LEO). Os resultados mostraram curvas-catálogo e tabelas gerais para parâmetros tecnológicos que permitem a implementação de manobras evasivas frente à colisão com detritos de diversos tamanhos, dependendo das condições iniciais no sistema relativo detrito-veículo espacial. Um estudo da dinâmica relativa entre um veículo operacional e uma nuvem de detritos, considerando a possibilidade de colisão entre os detritos, foi realizado por [Jesus et al., 2015]. Eles encontraram possibilidades de colisão entre detritos de até 10m distribuídos numa esfera de 3 km, enquanto o veículo realizava uma manobra evasiva em 3.000 segundos. Os resultados dependem do tempo de colisão, da distribuição angular dos objetos colisionais e da quantidade de detritos que formam a nuvem.

2.3 Detritos Espaciais e Fragmentação

As atividades espaciais aumentaram o crescimento da população de detritos espaciais em órbita em torno da Terra, além da deposição de partículas natural do sistema solar. Devido a este crescimento, a taxa de decaimento não é mais suficiente para reduzir a população do lixo espacial em curto prazo. Estudos como o de Kessler [Kessler e Cour-Palais, 1978] apontam para o aumento das colisões entre os detritos espaciais, em um tipo de reação em cadeia, correspondente a um crescimento exponencial de objetos orbitais não úteis. Satélites de longa duração como o LDEF (*Long Duration Exposure Facility*), expostos em órbita e depois recuperados fornecem uma distribuição estatística da quantidade e da direção do fluxo de detritos espaciais nas regiões orbitais. Estes dados estimularam trabalhos numéricos com respeito a população do lixo espacial. Kessler e cooperadores [Kessler et al., 1989] foram pioneiros no ajuste de dados do LDEF e concluíram que existem milhares de objetos maiores que 10 cm, além de uma imensa quantidade de objetos menores. Outros trabalhos mostraram que os micro detritos são predominantes e o fluxo de detritos espaciais chega a uma população de 70.000 objetos em órbita LEO [Kessler, 1991], [Green et al., 1992]. [Cordelli et al., 1997] criaram um modelo numérico da evolução da população de detritos espaciais de massas maiores que 1 mg e encontraram diversas faixas de crescimento, desde linear a exponencial. Segundo Davis, o processo das colisões mútuas de altas velocidades perturba a evolução de longo alcance das distribuições por tamanho dos DE [Davis et al., 1989], [Davis et al., 1994]. Os riscos às atividades espaciais oferecidas pelas colisões dos DE com veículos espaciais e também pelas colisões entre eles aumenta a cada lançamento de foguetes e satélites, como também devido ao aumento das colisões entre os diversos DE neste mesmo ambiente. O primeiro acidente colisional confirmado entre dois objetos catalogados ocorreu em julho de 1996. O satélite francês *Cerise* em operação foi fortemente danificado quando colidiu com um fragmento do corpo do foguete *Ariane*. Apesar deste acidente ser recente, outros diversos acidentes menores e muitos outros não catalogados têm ocorrido durante vários anos. A energia cinética liberada por um impacto de uma partícula de umas poucas gramas e de velocidade relativa média de 10 km/s ($\sim 105\text{J}$) corresponde àquela de uma granada de mão e pode destruir uma espaçonave não protegida (ou corpo natural de igual massa). Obviamente, a consequência destas colisões produziria uma nuvem de muito mais objetos numa reação em cadeia, fato que aumentaria dramaticamente a probabilidade de novas colisões. Simulações numéricas mostram que, se a taxa de atividade espacial for mantida nos padrões atuais, a quantidade de detritos espaciais continuará crescendo, criando um cinturão de partículas em torno da terra, semelhantemente a um cinturão de asteroides, o que seria suficiente para desencadear uma reação em cadeia em torno de 2 ou 3 vezes a população atual dentro de 20 a 50 anos [Rossi et al., 1994]. A Agência Espacial Europeia afirmou que “a produção de detritos espaciais auto-sustentável por colisões é de interesse de longo prazo. Contudo, é a maior parte do perigo de longo prazo que inviabilizará toda atividade espacial no mundo. Portanto, este mecanismo requer estudo ulterior e cuidadoso” [ESA Space Debris Working Group, 1998]. A fragmentação é um fenômeno que ocorre no ambiente das missões espaciais, devido às altas energias envolvidas. Por exemplo, durante a atividade de propulsão, algum componente do veículo operacional pode iniciar rachaduras que,

com o tempo, favorecerão a ruptura dele em diversas partes que formarão uma nuvem de detritos. Ocorre também a fragmentação devido as colisões a altas velocidades. Em 1978, Greenberg e cooperadores utilizaram algoritmos numéricos para estudar esta dinâmica [Greenberg et al., 1978], seguidos por Davis e cooperadores [Davis et al., 1979], [Davis et al., 1985], [Davis et al., 1989] e [Farinella et al., 1992]. [Petit e Farinella, 1993] fizeram um refinamento no algoritmo usado por Greenberg, baseado em um conjunto de parâmetros de entrada dos experimentos realizados por Davis e colaboradores [Davis et al., 1989]. Em 1989, Fujiwara e colaboradores descreveram os resultados da colisão de dois objetos esféricos e homogêneos, postos em colisão em escalas bem menores das existentes no espaço sideral, em termos das grandezas físicas como as massas dos objetos, a velocidade de impacto e alguns coeficientes que representam a composição material dos objetos [Fujiwara et al., 1989]. Para o refinamento físico do modelo da fragmentação por colisão [Petit e Farinella, 1993] mostraram que existe uma diferença fundamental da colisão existente entre os alvos do laboratório de pequeno porte e os reais corpos celestes que, no último caso, a auto-gravidade não é desprezível e por isso a auto-compressão pode reforçar o interior dos corpos, tornando mais difícil de quebrá-los. Além disso, segundo eles, se houver a fragmentação, a gravidade pode fazer um acúmulo parcial dos fragmentos ejetados que podemos chamar de nuvem de detritos este trabalho, do ponto de vista teórico, representa um progresso, pois é baseado em hipóteses semi-empíricas. Portanto, os resultados numéricos e de laboratório necessitam ser incorporados através dos parâmetros de entrada que dependem das condições iniciais do impacto e dos processos físicos relacionados ao fenômeno da colisão. A análise sob este ponto de vista é capaz de prever, de forma rápida e eficaz, o resultado de qualquer possível impacto que ocorra no sistema sob controle. O modelo matemático descrito no trabalho de [Petit e Farinella, 1993], define um parâmetro experimental chamado “impacto de força S ” como sendo a energia mínima necessária de cada corpo para provocar a chamada fragmentação catastrófica. A fragmentação catastrófica é uma transição abrupta entre os regimes de cratera até o estilhaço total dos objetos presentes na colisão. Outro trabalho importante e recente que aplica este modelo de fragmentação é o de Celestino [Celestino et al., 2006]. Neste trabalho, é analisada a evolução dos detritos espaciais originários de uma particular fragmentação: a explosão de um satélite em órbita MEO de altitude de cerca de 25.000 km (GPS). Os resultados mostraram a fragmentação como sendo uma função exponencial decrescente das massas do satélite fragmentado, considerando uma distribuição aleatória de massas de maneira que as menores massas tenham maior velocidade. A partir deste evento, foram realizadas simulações numéricas seguindo a evolução dos fragmentos sujeitos a perturbações gravitacionais do Sol, da Lua e da Terra (achatamento terrestre e o efeito J_{22}). Um importante trabalho publicado em 2010 por Smirnova e cooperadores tratou do impacto de fragmentos de detritos espaciais nas paredes preenchidas por gás pressurizado ou, por fluidos que compõem elementos estruturais da maioria dos veículos espaciais [Smirnova et al., 2010]. O objetivo de Smirnova era o de obter soluções analíticas fechadas para o modelo da colisão de partículas de detritos espaciais em estruturas de paredes finas preenchidas com fluido com base experimental. As soluções obtidas se mostram úteis para avaliar os impactos de alta velocidade de detritos nas estruturas espaciais para se desenvolver anteparos mais eficazes para a defesa e a segurança de missões espaciais. Em 2014, Ferreira e Jesus estudaram manobras evasivas frente a nuvem de detritos produzida

por fragmentação destes [Ferreira e Jesus, 2014]. Os seus resultados mostraram que a dinâmica fragmentacional colisional é regida por parâmetros tecnológicos que determinam a quantidade e o tamanho dos fragmentos com os quais uma colisão pode acontecer.

2.4 Missões Espaciais e Arrasto Atmosférico

O efeito da força de arrasto atmosférico é o de reduzir a velocidade orbital do objeto espacial, projetando-o sobre a atmosfera terrestre. Esta força não conservativa é atuante em órbitas baixas da Terra (LEO) onde ocorre a maioria das atividades das missões espaciais. Com respeito à remoção dos detritos espaciais nesta região, esta força é um recurso natural de limpeza do ambiente espacial. Os trabalhos de [Clohessy e Wiltshire, 1960] e [Jesus et al., 2012] não incluíram nenhuma força de perturbação. A inclusão de perturbações na dinâmica relativa de Clohessy e Wiltshire se iniciou com o trabalho de [Leonard et al., 1989] e [Leonard, 1986] com a inclusão do arrasto atmosférico com o objetivo de avaliar o controle de formação de vôo de dois satélites operacionais. Os trabalhos de [Humi e Carter, 2002] aperfeiçoaram o modelo de Leonard e reescreveram uma forma fechada para as equações de Clohessy-Wiltshire devido as perturbações do arrasto atmosférico com diferentes modelos de densidade atmosférica. Baseado em algumas suposições, a análise da dinâmica relativa com o arrasto atmosférico, é feita com a integração de simples equações diferenciais. [Schweighart, 2002] também desenvolveram um conjunto de equações diferenciais para o movimento relativo, mas, agora, com a inclusão do achatamento da Terra incluído o efeito J_2 . A grande maioria destes trabalhos incluem os efeitos perturbativos para estudar a formação de voo de satélite ou para manobras de Rendezvous. A preocupação com a realização das manobras evasivas só aumentou no início do século XXI, com a ameaça da colisão com detritos espaciais cada vez mais presentes. Desta forma, existe pouco material na literatura aberta publicado com respeito a este tema. A densidade atmosférica atua sobre o satélite, arrastando-o para dentro da órbita terrestre. [Doornbos et al., 2005] estudaram este efeito, identificando-o como a principal fonte de erro na determinação de órbita de um satélite em LEO. Em geral, a precisão dos modelos atuais é da ordem de 15% a 30%. Eles também estabeleceram métodos de calibração de parâmetros para melhorar a precisão na densidade atmosférica. A perda de energia do veículo operacional em LEO é devida à atuação do arrasto atmosférico, segundo [Verhoef e Noomen, 2002]:

...é diretamente responsável pela perda de energia da nave espacial, o que resulta na deterioração órbita, uma vida limitada e possível impacto sobre a superfície da Terra. A modelagem adequada ou previsão destes efeitos é difícil uma vez que as incertezas nos seus componentes C_D (coeficiente de arrasto), ρ (densidade atmosférica), V (velocidade de satélite) e S (área de secção transversal), pode variar até 20%.

Muitos pesquisadores, com a intenção de reduzir o impacto das incertezas na modelagem de arrasto, por exemplo, relacionam a densidade de altitudes diferentes da real altitude do satélite. [Verhoef e Noomen, 2002] observaram o efeito de arrasto

atmosférico sobre o semi-eixo, uma vez que este é um bom parâmetro para representar a perda de altitude, tempo de vida e impacto. [Saad et al., 2008] realizaram um estudo sobre o decaimento orbital do Satélite RS-1 próximo da Terra, considerando as variáveis regulares KS, as perturbações de um satélite artificial, devido à não esfericidade da Terra, o arrasto atmosférico e incluíram os termos harmônicos zonais da Terra até J_6 . Eles desenvolveram um modelo de arrasto com uma atmosfera rotativa oblata, variando a velocidade de rotação da atmosfera. Ao aplicar o método sob o Satélite RS1 construíram um algoritmo para integrar as equações KS de movimento usando o Método de Runge-Kutta de 4^a Ordem. Os resultados do cálculo mostraram o tempo de vida de satélite a ser 379,21 dias, enquanto que a deterioração observada ocorreu após 371 dias. Ou seja, a maioria dos trabalhos que estuda o efeito do arrasto atmosférico nas missões espaciais, se ocupa em determinar o melhor modelo para a densidade atmosférica. Além disso, as agências espaciais se preocupam em estabelecer políticas e tecnologias para limpar o espaço a custo tolerável. Mas, parece improvável que uma tecnologia do futuro seja capaz de limpar o espaço por um custo menor do que o lançamento de uma única nave espacial. Neste trabalho, investigamos manobras evasivas entre um veículo operacional e um detrito espacial em LEO, tal que o detrito está sujeito à força de arrasto atmosférico. Analisamos tal efeito, sob a condição de uma densidade atmosférica constante. Verificamos também, numa abordagem subótima, quais regiões angulares da esfera terrestre e quais as estratégias de atuação dos propulsores que permitem economia de combustível na implementação das manobras evasivas no ambiente de detritos espaciais.

Capítulo 3

Definição do Problema - Modelos Matemáticos e Recursos Computacionais

“Haverá eterna perda por todo conhecimento e capacidade não alcançados, que poderíamos ter ganho. Você precisa dominar as circunstâncias, e não permitir que as circunstâncias o dominem.”

-- Ellen G. White

Neste Capítulo apresentamos o modelo matemático para as dinâmicas relativas sob a atuação das forças gravitacional, de arrasto atmosférico e de propulsão. As soluções das equações diferenciais que representam cada fenômeno são apresentadas e serão à base das simulações numéricas para os casos de manobras evasivas de interesse tecnológico deste trabalho.

3.1 Manobras Evasivas e Subótimas – Definição do Problema

A manobra evasiva é realizada quando um veículo espacial realiza determinada manobra orbital para evitar uma colisão com um detrito espacial. A princípio é determinado um Conjunto de Condições Iniciais de Colisão (CCIC), sob o efeito somente da Força gravitacional. O CCIC é composto por uma grande quantidade de condições de possíveis colisões entre os objetos, com base em pares de ângulos (θ e ϕ), abrangendo toda a esfera global, com passo de 1° para o plano e espaço. Através destes ângulos são encontradas as posições e velocidades iniciais relativas e calculadas as possibilidades de colisão.

A manobra evasiva é encontrada para um dos elementos do conjunto CICC. As equações da dinâmica com propulsão são simuladas, tal que parâmetros tecnológicos são encontrados, através dos quais a implementação da manobra evasiva seja

possível. O objetivo é encontrar a distância relativa final entre os objetos colisionais. Inicialmente os objetos estão à uma distância de 3 km. Se no final da trajetória, esta distância relativa for igual zero, é porque houve colisão, pois a velocidade relativa é maior que zero. O problema em si se dá a partir da aplicação de um modelo matemático, sob as equações da dinâmica relativa adicionando uma força não gravitacional, seja ela, força de propulsão, o arrasto atmosférico, ou ambas, para que ocorra a manobra evasiva, mantendo o veículo espacial em sua órbita nominal, evitando a colisão.

Definimos uma manobra evasiva subótima, aquela que é mais econômica do ponto de vista do consumo de combustível, atendendo a algum critério pré-estabelecido sem um formalismo matemático mais denso. Uma manobra evasiva pode ser subótima, caso ela ocorra satisfazendo tais critérios. Neste trabalho, o critério utilizado está na escolha da atuação dos propulsores em intervalos de tempo diferenciados e em regiões angulares específicas. Objetivamos encontrar a melhor estratégia para acionarmos o sistema propulsor por menos tempo, evitando a possível colisão com o menor detrito possível.

3.2 Dinâmica Relativa Colisional - Equações de Clohessy-Wiltshire

Através da segunda Lei de Newton é possível encontrar as equações do movimento relativo entre o detrito e o satélite espacial sob a influência do campo gravitacional da Terra. A força gravitacional da Terra está atuando sobre os corpos (veículo operacional e detrito espacial). Na Figura 3.1, está representado o sistema de coordenadas Cartesianas (x, y, z) entre o veículo e o detrito espacial.

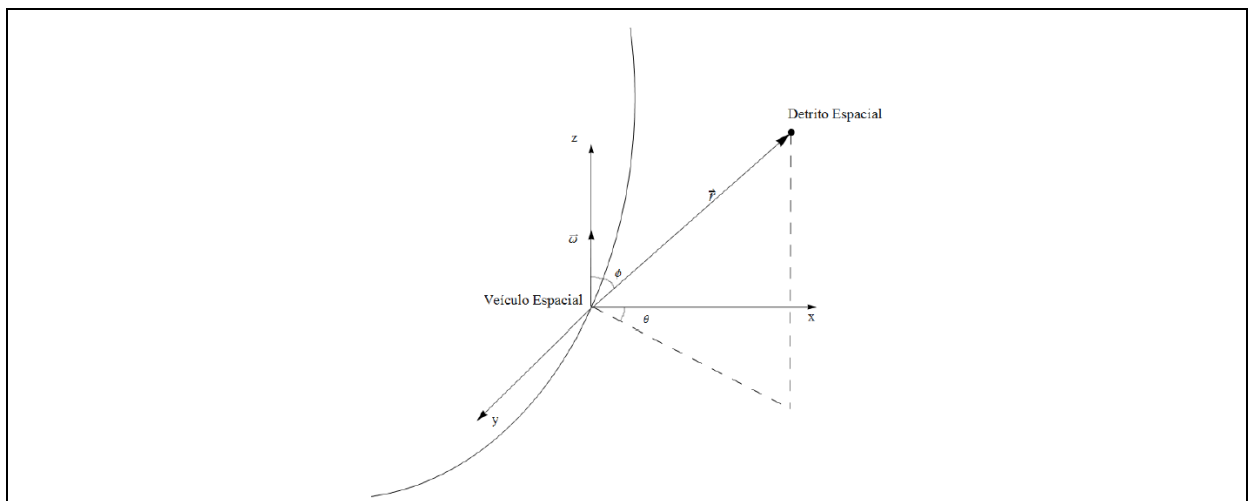


Figura 3.1 - Sistema de referência orbital - veículo e detrito espacial colisionais.
 FONTE: [Sousa, 2013]

A velocidade angular da Terra é constante, ($\vec{\omega} = \vec{\omega}k$), pois o veículo espacial está orbitando a Terra numa trajetória circular. A posição do detrito em relação ao

veículo é dada por \vec{r} , centrado no referencial do veículo espacial.

As taxas de variação no tempo do momentum linear do veículo espacial e do detrito são, respectivamente:

$$\frac{d\vec{p}_s}{dt} = -G \frac{Mm_s}{|\vec{R}|^3} \vec{R} \quad (3.1)$$

$$\frac{d\vec{p}_d}{dt} = -G \frac{Mm_d}{|\vec{R} + \vec{r}|^3} (\vec{R} + \vec{r}) \quad (3.2)$$

Dado:

- m_s = Massa do Veículo Espacial;
- m_d = Massa do Detrito Espacial;
- \vec{R} = Vetor posição do veículo espacial em Relação à Terra;
- \vec{r} = Vetor posição relativo entre veículo e detrito espacial;
- M = Massa da Terra;
- G = Força Gravitacional da Terra.

Acrescentando uma força não gravitacional \vec{F} ao veículo espacial, as Equações (4.1) e (4.2), sendo $\mu = GM$ e $\frac{d\vec{p}_s}{dt} = m_s \ddot{\vec{R}}$, para a variação do momentum linear no tempo, tornam-se:

$$m_s \ddot{\vec{R}} = -\frac{\mu m_s}{|\vec{R}|^3} \vec{R} + \vec{F} \quad (3.3)$$

Fazendo de forma análoga para o detrito espacial, temos:

$$m_d (\ddot{\vec{R}} + \ddot{\vec{r}}) = -\frac{\mu m_d}{|\vec{R} + \vec{r}|^3} (\vec{R} + \vec{r}) \quad (3.4)$$

Somando as Equações (3.3) e (3.4), e isolando o $\ddot{\vec{r}}$, encontraremos a aceleração relativa entre os corpos.

$$\ddot{\vec{r}} = -2\ddot{\vec{R}} - \frac{\mu}{|\vec{R}|^3} \vec{R} - \frac{\mu}{|\vec{R} + \vec{r}|^3} (\vec{R} + \vec{r}) + \vec{f} \quad (3.5)$$

Estas Equações não possuem solução analítica, mesmo para casos simples da força não gravitacional. Contudo, se supusermos uma condição adicional à dinâmica, poderemos resolvê-la semi analiticamente. Consideremos, portanto, uma classe de

soluções que satisfaçam a condição da distância relativa entre os objetivos ser muito menor que distância do veículo à Terra. Esta condição satisfaz a muitas demandas tecnológicas nas missões espaciais. Assim, tomando $\frac{|\vec{r}|}{|\vec{R}|} \ll 1$, podemos expandir em série de Taylor o termo gravitacional $|\vec{R} + \vec{r}|^{-3}$ e, como dito anteriormente, o sistema de referência no veículo possui rotação não nula, ou seja, $\vec{\omega} \neq \vec{0}$, podemos reescrever a equação da posição relativa entre os objetos, tal que:

$$\ddot{\vec{r}}_{rot} = -\frac{\mu}{|\vec{R}|^3} \left\{ \vec{r} - \frac{3\vec{R} \cdot \vec{r}}{|\vec{R}|^2} \vec{R} \right\} + \vec{f} - 2(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}) - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}) \quad (3.6)$$

Ao fazer um arranjo das equações em uma versão matricial dos seus vetores, temos:

$$\vec{\omega} = \omega \vec{k} \quad (3.7)$$

$$\vec{r} = (x, y, z) \quad (3.8)$$

$$\vec{R} = (R, 0, 0) \quad (3.9)$$

$$(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}) = (-\omega \dot{y}, \omega \dot{x}, 0) \quad (3.10)$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}) = (-\omega^2 y, \omega^2 x, 0) \quad (3.11)$$

$$\vec{R} \vec{r} = Ry \quad (3.12)$$

$$\omega^2 = \frac{\mu}{|\vec{R}|^3} \quad (3.13)$$

Substituindo as Equações (3.7), (3.8), (3.9), (3.10), (3.11), (3.12) e (3.13) na Equação (3.6), serão encontradas as componentes Cartesianas da força por unidade de massa para a dinâmica relativa entre os objetos espaciais, considerando as posições entre si pequenas, comparadas à distância da Terra até o veículo espacial. As equações resultantes são:

$$\ddot{x} - 2\omega \dot{y} - 3\omega^2 x = f_x \quad (3.14)$$

$$\ddot{y} + 2\omega \dot{x} = f_y \quad (3.15)$$

$$\ddot{z} + \omega^2 z = f_z \quad (3.16)$$

Estas equações são conhecidas como Equações de Hill, e sua respectiva solução

determinam as coordenadas da posição relativa entre o veículo espacial e um detrito que orbitam em torno da Terra. Para o caso homogêneo, deve-se considerar $f_x = f_y = f_z = 0$. Estas equações homogêneas são conhecidas como Equações de [Clohessy e Wiltshire, 1960] e, neste caso, apenas a força gravitacional da Terra atua sobre objetos.

A solução para o caso homogêneo é:

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t - \left(\frac{2\dot{y}_0}{\omega} + 3x_0 \right) \cos \omega t + \left(\frac{2\dot{y}_0}{\omega} + 4x_0 \right) \quad (3.17)$$

$$y(t) = \frac{2\dot{x}_0}{\omega} \cos \omega t - \left(\frac{4\dot{y}_0}{\omega} + 6x_0 \right) \sin \omega t + \left(y_0 - \frac{2\dot{x}_0}{\omega} \right) - (3\dot{y}_0 + 6\omega x_0)t \quad (3.18)$$

$$z(t) = z_0 \cos \omega t + \frac{\dot{z}_0}{\omega} \sin \omega t \quad (3.19)$$

Esta solução é obtida pelo CCIC – Conjunto de Condições Iniciais de Colisões, dadas pelas posições relativas iniciais (x_0, y_0, z_0) e pelas velocidades relativas iniciais $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$, em um instante inicial t_0 . Para garantir a dinâmica colisional, será imposto um tempo de colisão (t_c) fixo e o CCIC dada por:

$$x(t) = 0, y(t) = 0, z(t) = 0 \Rightarrow r(t) = 0 \quad (3.20)$$

Ou seja, estas informações garantem uma colisão certa. Pois o $r(t) = 0$ implicará em choque entre o veículo espacial e o detrito. Desta forma, podemos escrever os componentes da velocidade inicial que permitem a colisão como sendo:

$$\dot{y}_0 = \frac{[6x_0(\omega t \sin \omega t) - y_0]\omega \sin \omega t - 2\omega x_0(4 - 3 \cos \omega t)(1 - \cos \omega t)}{(4 \sin \omega t - 3\omega t) \sin \omega t - 4(1 - \cos \omega t)^2} \quad (3.21)$$

$$\dot{x}_0 = - \frac{\omega x_0(4 - 3 \cos \omega t) + 2(1 - \cos \omega t)\dot{y}_0}{\sin \omega t} \quad (3.22)$$

$$\dot{z}_0 = - \frac{\omega z_0 \cos \omega t}{\sin \omega t} \quad (3.23)$$

É importante observar que para qualquer tempo fornecido para as Equações (3.21), (3.22) e (3.23), as três componentes da velocidade inicial relativa serão encontradas. Logo, o CCIC possui soluções infinitas. Entretanto, por limitações tecnológicas, o número de soluções será reduzido consideravelmente. Uma das limitações é a capacidades dos radares em detectar a posição inicial dos detritos em relação ao veículo espacial. Outra condição é a distribuição de velocidades colisionais

dos detritos espaciais nas regiões operacionais do espaço em torno da Terra. A seguinte estratégia foi adotada para a obtenção do CCIC:

1. Fornecer uma esfera de possibilidades de posições iniciais relativas para o detrito espacial. Para isto, consideramos a varredura angular no plano igual a $0 \leq \theta < 2\pi$ e, no espaço igual a $0 \leq \phi < \pi$. Nas simulações, o passo do angulo foi de 1° , e para um valor fixo do vetor da posição inicial r_0 . As componentes são encontradas em coordenadas esféricas, dadas por:

$$x_0 = r_0 \sin \phi \cos \theta \quad (3.24)$$

$$y_0 = r_0 \sin \phi \sin \theta \quad (3.25)$$

$$z_0 = r_0 \cos \phi \quad (3.26)$$

2. Determinar o tempo de colisão no intervalo $1 \leq t_c \leq 10^6$, com passo de 1 segundo. Os tempos são escolhidos, tais que seja possível às manobras evasivas frente a colisões iminentes em regiões orbitais LEO;
3. O valor de ω é encontrado com base na altitude fornecida para a órbita LEO;

Com as condições acima obtidas, são calculadas as velocidades iniciais relativas para a colisão. Jesus et. al. [2012] afirmaram que estas velocidades encontram-se na faixa de 1 a 20 km/s, visto que esta faixa representa o espectro de velocidades relativas nas regiões operacionais. A partir disto, são escolhidas as velocidades que atendem às condições das velocidades típicas dos detritos espaciais.

3.3 Dinâmica Relativa com Propulsão

O sistema propulsor de um veículo espacial possui a finalidade de alterar a velocidade do veículo espacial, para correção de órbita e também para transferência orbital. A órbita de referência sempre será a nominal, que é a órbita alvo. Devido a forças dissipativas, o veículo pode sair da órbita nominal e o sistema de propulsão é acionado para trazer o veículo de volta a esta órbita. No caso de manobras evasivas, o interesse é inverso, pois pretende-se tirar o veículo da órbita nominal que o levaria a uma colisão com um detrito espacial. O funcionamento do sistema de propulsão se dá a partir da ejeção de gases pelos propulsores, modificando seu estado de movimento, impulsionando o veículo espacial para a posição desejada. Segundo Jesus et al [2012], a força de propulsão por unidade de massa é dada pela equação a seguir:

$$\vec{f}_p = -\frac{1}{m(t)} \vec{v}_e \frac{dM(t)}{dt} = -\vec{v}_e \frac{d}{dt} \ln(M(t)) \quad (3.27)$$

onde temos:

- $M(t)$ = Massa total do veículo, incluindo a massa do combustível;
- \vec{v}_e = Velocidade de Exaustão dos gases;

Como a massa é variável no tempo, de fato, o combustível decresce pelo sistema de exaustão, o modelo de variação de massa deve ser escrito como:

$$M(t) = M + m(t) \quad (3.28)$$

Sendo que:

- M é a massa do veículo sem o combustível
- $m(t)$ é a massa do combustível variável no tempo.

O modelo escolhido neste trabalho é o exponencial, no qual a massa do combustível decresce exponencialmente no tempo a uma frequência constante (γ). Além disso, assumimos a proporcionalidade direta entre a massa inicial do combustível e a massa M , por um fator constante (χ), isto é:

$$M = \frac{\chi}{m_o} \quad (3.29)$$

[Jesus et al., 2012] definem três parâmetros tecnológicos que controlam a manobra evasiva no sistema de propulsão. O primeiro é o fator de potência do propulsor (γ), o segundo é o fator de massa (χ) e o terceiro é a velocidade de exaustão do propelente (\vec{v}_e). Logo, pode-se expressar a equação da massa variando com o tempo da seguinte forma:

$$M(t) = m_o(\chi + e^{-\gamma t}) \quad (3.30)$$

Com a força de propulsão na dinâmica relativa entre o veículo e o detrito, temos:

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - 3\omega^2 x = -v_{ex} \frac{d}{dt} \ln(M(t)) \quad (3.31)$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} = -v_{ey} \frac{d}{dt} \ln(M(t)) \quad (3.32)$$

$$\ddot{z} + \omega^2 z = -v_{ez} \frac{d}{dt} \ln(M(t)) \quad (3.33)$$

A solução analítica destas equações em coordenadas Cartesianas é dada por (Jesus et. 2012):

$$x(t) = 2A \sin \omega t - 2B \cos \omega t + Et + \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{-n\gamma t} + G \quad (3.34)$$

$$y(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t - \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n\gamma t} + D \quad (3.35)$$

$$z(t) = H \cos \omega t + I \sin \omega t - \sum_{n=1}^{\infty} J_n e^{-n\gamma t} \quad (3.36)$$

Os coeficientes destas Equações são função das condições iniciais e dos parâmetros tecnológicos, a saber:

$$A = \frac{2\dot{x}_0}{\omega} - 3y_0 + \frac{2v_{ex}}{\omega} \ln\left(\frac{\chi+1}{\chi}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n} \left(\frac{2v_{ex}}{\omega} + \frac{n\gamma v_{ey}}{\omega^2}\right) \frac{1}{1 + \left(\frac{n\gamma}{\omega}\right)^2} \quad (3.37)$$

$$B = \frac{\dot{y}_0}{\omega} + \frac{v_{ey}}{\omega} \ln\left(\frac{\chi+1}{\chi}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n} \left(\frac{v_{ey}}{\omega} + \frac{2n\gamma v_{ex}}{\omega^2}\right) \frac{1}{1 + \left(\frac{n\gamma}{\omega}\right)^2} \quad (3.38)$$

$$E = 6\omega y_0 - 3\dot{x}_0 - 3v_{ex} \ln\left(\frac{\chi+1}{\chi}\right) \quad (3.39)$$

$$F_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n} + \left(\frac{4v_{ex}}{n\gamma} + \frac{2v_{ey}}{\omega}\right) \frac{1}{1 + \left(\frac{n\gamma}{\omega}\right)^2} - \frac{v_{ex}}{n\gamma} \quad (3.40)$$

$$G_n = 2\dot{y}_0\omega + x_0 + \frac{2v_{ey}}{\omega} \ln\left(\frac{\chi+1}{\chi}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2\chi^n} \frac{3v_{ex}}{\omega} \quad (3.41)$$

$$C_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2\chi^n} \left(v_{ex} + \frac{n\gamma v_{ey}}{\omega^2}\right) \frac{1}{1 + \left(\frac{n\gamma}{\omega}\right)^2} \quad (3.42)$$

$$D = 4y_0 - \frac{2\dot{x}_0}{\omega} - \frac{2v_{ex}}{\omega} \ln\left(\frac{\chi+1}{\chi}\right) \quad (3.43)$$

$$H = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2v_{ex}\gamma}{\chi^n \omega^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{n\gamma}{\omega}\right)^2} \quad (3.44)$$

$$I = \frac{\dot{z}_0}{\omega} - \frac{v_{ez}}{\omega} \ln\left(\frac{\chi + 1}{\chi}\right) + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 \chi^2 \omega} v_{ez} \frac{1}{1 + \left(\frac{n\gamma}{\omega}\right)^2} \quad (3.45)$$

$$J_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n \chi^n \omega} v_{ez} \frac{1}{1 + \left(\frac{n\gamma}{\omega}\right)^2} \quad (3.46)$$

Existem várias perturbações que podem fazer com que o satélite saia da sua órbita nominal. Daí se faz necessário o uso do sistema propulsor para a correção da sua posição. Além disso, há a possibilidade de uma colisão com um detrito espacial. Desta forma, através do controle dos coeficientes e dos parâmetros tecnológicos é possível se distanciar do detrito ao ponto de evitar a colisão. Os parâmetros tecnológicos estão relacionados com a tecnologia disponível, e podem viabilizar a evsão ou não entre os objetos espaciais.

As manobras evasivas devem ser executadas preservando a órbita nominal³ da missão, toda vez que for possível. Por exemplo, se uma órbita nominal for circular e se depois de operar com o sistema propulsor para evadir de uma colisão, a nova órbita assumida for muito próxima da circular nominal, não haverá prejuízos significativos para a missão espacial. Mas, se a energia associada à implementação da manobra evasiva for grande, a órbita final poderá diferir muito da nominal, deixando, por exemplo, de ser circular para ser elíptica. Para a execução destas manobras, aplica-se uma força de propulsão, tangencial a órbita do satélite, de forma que sua velocidade angular seja alterada evitando assim o choque com o detrito espacial.

3.4 Dinâmica Relativa com Força de Arrasto Atmosférico

As equações do movimento relativo entre um satélite e um detrito, são escritas no sistema referencial, posto no satélite, conforme a Figura 3.1. A força de arrasto atmosférico foi definida em (2.1). Ela é uma força que atua sobre o satélite e sobre o detrito. As equações da dinâmica relativa entre o veículo espacial e o detrito, com a arrasto atmosférico são dadas por:

³ Isto é, a órbita nominal de referência em que o satélite deveria estar, dentro do conjunto de órbitas que compõem a grade de todas as órbitas nominais de referência que totalizam um ciclo de cobertura completa do globo terrestre [Winter e Prado, 2007].

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - 3\omega^2 = -\frac{1}{2\beta}(\omega - \omega_e)[\dot{x} - y(\omega - \omega_e)] \quad (3.47)$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} = -\frac{1}{2\beta}(\omega - \omega_e)[2(\dot{y} + x(\omega - \omega_e)) + R(\omega - \omega_e)] \quad (3.48)$$

$$\ddot{z} + \omega^2 z = -\frac{1}{2\beta}(\omega - \omega_e)\dot{z} \quad (3.49)$$

onde:

$$\beta = \left(\frac{C_d A R \rho}{m}\right)^{-1} \quad (3.50)$$

e,

- C_d = Coeficiente de Arrasto Atmosférico;
- A = Área do satélite;
- ρ = Densidade Atmosférica;
- m = Massa do Satélite.

Manipulando as equações (3.47), (3.48) e (3.49), é possível reescrevê-las em um formato de equações homogêneas.

$$\ddot{x} + A\dot{x} - Bx - C\dot{y} - Dy = 0 \quad (3.51)$$

$$\ddot{y} + 2A\dot{y} + C\dot{x} + 2Dx - E = 0 \quad (3.52)$$

$$\ddot{z} + Az + Fz = 0 \quad (3.53)$$

sendo,

$$A = \omega'' \quad (3.54)$$

$$B = 3\omega^2 \quad (3.55)$$

$$C = 2\omega \quad (3.56)$$

$$D = \omega'\omega'' \quad (3.57)$$

$$E = R\omega' \quad (3.58)$$

$$F = \omega^2 \quad (3.59)$$

$$\omega'' = \frac{\omega'}{2\beta} \quad (3.60)$$

$$\omega' = \omega - \omega_e \quad (3.61)$$

A solução da componente z é mais simples, pois ela está desacoplada das demais componentes. As componentes x e y estão acopladas e para a sua solução utilizamos o método de separação de variáveis. Somando as Equações (3.51) e (3.52) temos:

$$\ddot{x} + A_1\dot{x} + A_2x + \ddot{y} + A_3\dot{y} + A_4y - E = 0 \quad (3.62)$$

Observamos que as variáveis foram separadas e, portanto, podemos igualá-las a constante - λ^2 , tal que:

$$\ddot{x} + A_1\dot{x} + A_2x = -\ddot{y} - A_3\dot{y} - A_4y + E = -\lambda^2 \quad (3.63)$$

sendo:

$$A_1 = A + C \quad (3.64)$$

$$A_2 = 2D - B \quad (3.65)$$

$$A_3 = 2A - C \quad (3.66)$$

$$A_4 = -D \quad (3.67)$$

Desta forma foi possível encontrar a solução das três componentes, x(t), y(t) e z(t). Logo abaixo mostramos as componentes Cartesianas do vetor posição e velocidade relativas para esta dinâmica:

$$x(t) = \frac{1}{(k_{x1} - k_{x2})} \left[\dot{x}_0(e^{k_{x1}t} - e^{k_{x2}t}) + \left(x_0 + \frac{\lambda^2}{A_2} \right) (k_{x1}e^{k_{x2}t} - k_{x2}e^{k_{x1}t}) \right] - \frac{\lambda^2}{A_2} \quad (3.68)$$

$$y(t) = \frac{1}{(k_{y1} - k_{y2})} \left[\dot{y}_0(e^{k_{y1}t} - e^{k_{y2}t}) + \left(y_0 + \frac{\lambda_y}{A_4} \right) (k_{y1}e^{k_{y2}t} - k_{y2}e^{k_{y1}t}) \right] - \frac{\lambda_y}{A_4} \quad (3.69)$$

$$z(t) = e^{\frac{-At}{2}} [k_{z1} \cos kt + k_{z2} \sin kt] \quad (3.70)$$

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{(k_{x1} - k_{x2})} \left[\dot{x}_0(k_{x1}e^{k_{x2}t} - k_{x2}e^{k_{x1}t}) + k_{x1}k_{x2} \left(x_0 + \frac{\lambda^2}{A_2} \right) (e^{k_{x2}t} - e^{k_{x1}t}) \right] \quad (3.71)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{(k_{y1} - k_{y2})} \left[\dot{y}_0(k_{y1}e^{k_{y2}t} - k_{y2}e^{k_{y1}t}) + k_{y1}k_{y2} \left(y_0 + \frac{\lambda_y}{A_4} \right) (e^{k_{y2}t} - e^{k_{y1}t}) \right] \quad (3.72)$$

$$\dot{z}(t) = e^{\frac{-At}{2}} \left[\left(k_{z2} - \frac{k_{z1}}{2} \right) \cos k_{z3}t - \left(k_{z1} + \frac{k_{z2}}{2} \right) \sin k_{z3}t \right] \quad (3.73)$$

Abaixo estão as constantes que aparecem na solução das Equações (3.68), (3.69), (3.70), (3.71), (3.72) e (3.73).

$$\lambda_y = \lambda^2 + A_5 \quad (3.74)$$

$$k_{x1} = -\frac{\left(A_1 + \sqrt{A_1^2 - 4A_2} \right)}{2} \quad (3.75)$$

$$k_{x2} = -\frac{\left(A_1 - \sqrt{A_1^2 - 4A_2} \right)}{2} \quad (3.76)$$

$$k_{y1} = \frac{\left(A_3 + \sqrt{A_3^2 - 4A_4} \right)}{2} \quad (3.77)$$

$$k_{y2} = \frac{\left(A_3 - \sqrt{A_3^2 - 4A_4} \right)}{2} \quad (3.78)$$

$$k_{z1} = -\frac{\left(A + \sqrt{A^2 - 4F} \right)}{2} \quad (3.79)$$

$$k_{z1} = -\frac{\left(A - \sqrt{A^2 - 4F} \right)}{2} \quad (3.80)$$

$$k_{z3} = \frac{\sqrt{4F - A^2}}{2} \quad (3.81)$$

3.5 Dinâmica Relativa – Forças Gravitacional, Arrasto Atmosférico e Força de Propulsão – Solução Semi Analítica

A dinâmica neste ponto torna-se mais completa, incluindo as forças de propulsão e de arrasto atmosférico juntas. O objetivo é realizar uma manobra evasiva com vistas a interação dos objetos espaciais com estas forças. No final, as equações tornam-se:

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} + 3\omega^2 x = -v_{ex} \frac{d}{dt} \ln(M(t)) - \frac{1}{2\beta} (\omega - \omega_e) (\dot{x} - y(\omega - \omega_e)) \quad (3.82)$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} = -v_{ey} \frac{d}{dt} \ln(M(t)) - \frac{1}{2\beta} (\omega - \omega_e) [2(\dot{y} + x(\omega - \omega_e)) + R(\omega - \omega_e)] \quad (3.83)$$

$$\ddot{z} + 3\omega^2 z = -v_{ez} \frac{d}{dt} \ln(M(t)) - \frac{1}{2\beta} (\omega - \omega_e) \dot{z} \quad (3.84)$$

Nestas equações temos as componentes da força gravitacional do lado esquerdo e, do lado direito, as das forças de propulsão e do arrasto atmosférico. Neste conjunto de equações é possível notar duas soluções conhecidas. A primeira, assim como em [Jesus et al., 2012], é possível expandir o termo da propulsão, considerando $\frac{e^{-\gamma t}}{\chi} \ll 1$, visto que o fator de massa é maior do que 1. A segunda, se manipularmos os termos da força gravitacional com os do arrasto atmosférico, podemos encontrar a solução homogênea de forma análoga às Equações (3.47), (3.48) e (3.49). Com base nisto, e sabendo que a solução geral de uma equação diferencial é dada por $S_G = S_H + S_P$, onde S_H é a solução homogênea e S_P é a solução particular, reescrevemos as Equações (3.82), (3.83) e (3.84) da seguinte forma:

$$\ddot{x} + A_1 \dot{x} + A_2 x = A_x \gamma v_{ex} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} e^{-n\gamma t}}{\chi^n} \quad (3.85)$$

$$\ddot{y} + A_3 \dot{y} + A_4 y - E = A_y \gamma v_{ey} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} e^{-n\gamma t}}{\chi^n} \quad (3.86)$$

$$\ddot{z} + A_5 \dot{z} + Fz = A_z \gamma v_{ez} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} e^{-n\gamma t}}{\chi^n} \quad (3.87)$$

A solução homogênea destas equações já é conhecida pelo modelo do arrasto atmosférico, encontrado no item 3.4. É preciso encontrar a solução particular e para isto, devemos encontrar as soluções para as constantes A_x , A_y e A_z . Neste caso, basta sugerir como solução particular de cada componente do lado direito das Equações (3.85), (3.86) e (3.87), depois derivamos duas vezes, e substituímos em suas respectivas equações. A solução para cada constante é:

$$A_x = \frac{1}{\gamma^2 n^2 - A_1 n \gamma + A_2} \quad (3.88)$$

$$A_y = \frac{1}{\gamma^2 n^2 - A_3 n \gamma + A_4} \quad (3.89)$$

$$A_z = \frac{1}{\gamma^2 n^2 - A n \gamma + F} \quad (3.90)$$

Substituindo estas constantes nas equações e aplicando as condições iniciais, ou seja, fazendo $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, igualmente para os outros componentes, e encontramos a solução semi analítica para as posições relativas finais nesta dinâmica orbital, ou seja:

$$x(t) = c_1 e^{k_{x1}t} + c_2 e^{k_{x2}t} + \gamma v_{ex} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} e^{-n\gamma t}}{\chi^n (\gamma^2 n^2 - A_1 n \gamma + A_2)} \quad (3.91)$$

$$y(t) = c_3 e^{k_{y1}t} + c_4 e^{k_{y2}t} + \gamma v_{ey} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} e^{-n\gamma t}}{\chi^n (\gamma^2 n^2 - A_3 n \gamma + A_4)} \quad (3.92)$$

$$z(t) = e^{\frac{-At}{2}} [c_5 \cos k_{z3}t - c_6 \sin k_{z3}t] + \gamma v_{ez} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} e^{-n\gamma t}}{\chi^n (\gamma^2 n^2 - A n \gamma + F)} \quad (3.93)$$

sendo,

$$c_1 = x_0 - \left(\frac{1}{k_{x2} - k_{x1}} \right) \left(\dot{x}_0 - x_0 k_{x1} + \gamma v_{ex} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\gamma n + k_{x2})(-1)^{n+1}}{\chi^n (\gamma^2 n^2 - A_1 n \gamma + A_2)} \right) \quad (3.94)$$

$$c_2 = \left(\frac{1}{k_{x2} - k_{x1}} \right) \left(\dot{x}_0 - x_0 k_{x1} + \gamma v_{ex} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\gamma n + k_{x1})(-1)^{n+1}}{\chi^n (\gamma^2 n^2 - A_1 n \gamma + A_2)} \right) \quad (3.95)$$

$$c_3 = y_0 - \left(\frac{1}{k_{y_2} - k_{y_1}} \right) \left(\dot{y}_0 - y_0 k_{y_1} + \gamma v_{ey} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\gamma n + k_{y_2})(-1)^{n+1}}{\chi^n (\gamma^2 n^2 - A_3 n \gamma + A_4)} - \frac{Em_2}{D} \right) \quad (3.96)$$

$$c_4 = \left(\frac{1}{k_{y_2} - k_{y_1}} \right) \left(\dot{y}_0 - y_0 k_{y_1} + \gamma v_{ey} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\gamma n + k_{y_1})(-1)^{n+1}}{\chi^n (\gamma^2 n^2 - A_3 n \gamma + A_4)} - \frac{Em_1}{D} \right) \quad (3.97)$$

$$c_5 = \left(z_0 - \gamma v_{ex} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\chi^n (\gamma^2 n^2 - A n \gamma + F)} \right) \quad (3.98)$$

$$c_1 = \left(\dot{z}_0 + A \left(z_0 - \gamma v_{ex} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\chi^n (\gamma^2 n^2 - A n \gamma + F)} \right) \right) \quad (3.99)$$

e,

$$k_{x1} = - \frac{\left(A_1 + \sqrt{A_1^2 - 4A_2} \right)}{2} \quad (3.100)$$

$$k_{x2} = - \frac{\left(A_1 - \sqrt{A_1^2 - 4A_2} \right)}{2} \quad (3.101)$$

$$k_{y1} = \frac{\left(A_3 + \sqrt{A_3^2 - 4A_4} \right)}{2} \quad (3.102)$$

$$k_{y2} = \frac{\left(A_3 - \sqrt{A_3^2 - 4A_4} \right)}{2} \quad (3.103)$$

$$k_{z3} = \frac{\sqrt{4F - A^2}}{2} \quad (3.104)$$

$$A_1 = A + C \quad (3.105)$$

$$A_2 = 2D - B \quad (3.106)$$

$$A_3 = 2A - B \quad (3.107)$$

$$A_4 = -D \quad (3.108)$$

$$A = w'' \quad (3.109)$$

$$B = 3w^2 \quad (3.110)$$

$$C = 2w \quad (3.111)$$

$$D = w'w'' \quad (3.112)$$

$$E = Rw' \quad (3.113)$$

$$F = w^2 \quad (3.114)$$

$$w'' = \frac{w'}{2\beta} \quad (3.115)$$

$$w' = w - w_e \quad (3.116)$$

3.6 Simulações com a Força de Propulsão com o Arrasto Atmosférico – Solução Analítica

Nesta seção apresentaremos os resultados da solução analítica da dinâmica relativa colisional entre os objetos incluindo a força gravitacional, a força de propulsão e o arrasto atmosférico. O gráfico da Figura 3.2 mostra a distância relativa entre os objetos colisionais. Observemos que quando o sistema está sob efeito apenas da força gravitacional com a força de propulsão, o veículo espacial tende a permanecer em sua órbita nominal e ainda assim evita-se a colisão com o detrito espacial. Quando a dinâmica relativa está sob o efeito somente do arrasto atmosférico, o veículo se mantém em sua orbital nominal apenas nos segundos iniciais, e rapidamente os objetos colisionais se afastam consideravelmente, já visto no subitem anterior. Mas, o que mais chama a atenção, é diferença entre a solução numérica e a solução analítica. Ainda no gráfico da Figura 3.2, observamos que na solução numérica, o veículo espacial permanece na órbita nominal durante os 500 segundos inicial, a partir disto, a força do arrasto atmosférico afasta os objetos colisionais.

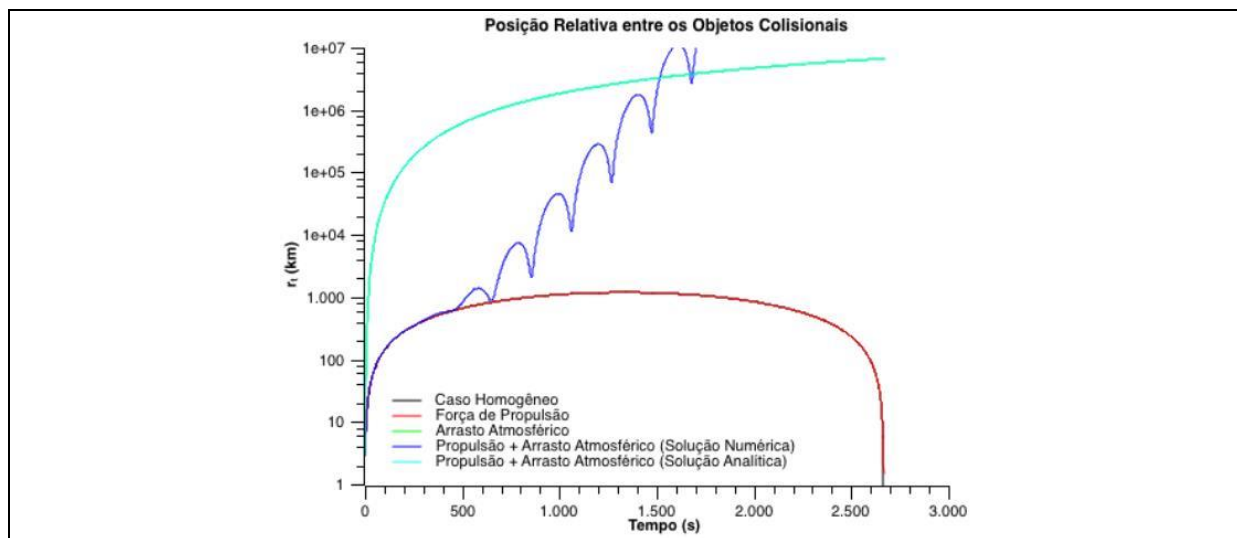


Figura 3.2 Distância Relativa entre os objetos colisionais sob o efeito da Força Gravitacional, da Força de Propulsão e do Arrasto Atmosférico, comparando a solução numérica e a semi-analítica.

Uma solução numérica similar foi encontrada por [Sousa, 2013] para as equações do movimento do satélite perturbado, sob o efeito das mesmas forças dissipativas. Entretanto, [Sousa, 2013] considerou o ρ (Rho) variando em função do tempo e decompôs a aceleração do satélite em duas componentes: a aceleração angular do satélite e a aceleração de propulsão radial. Mas neste trabalho, estamos considerando o ρ constante e utilizando todas as componentes da força de propulsão e do arrasto atmosférico. Além disso, na solução semi-analítica, há duas expansões no modelo, sendo uma na força gravitacional e outra na força de propulsão, enquanto que na solução numérica nenhuma expansão é considerada. Isto explica a diferença da distância relativa entre as duas soluções, numérica e semi-analítica. As expansões da solução semi-analítica não permitiram que a força de propulsão fosse suficiente para superar a força do arrasto atmosférico

3.7 Recursos Computacionais

Nesta dissertação foram realizadas simulações em computadores, implementando algoritmos dos modelos matemáticos utilizados. Em sua grande maioria, os algoritmos implementados possuem baixo nível de complexidade, apenas operações matemáticas diretas, com alguns comandos de seleção para tomadas de decisão laço de repetição. Sendo assim, em sua grande maioria, a execução consome pouco processamento e memória, não havendo necessidade de uma abordagem mais detalhada sobre o gerenciamento destes recursos na programação do código.

Com exceção do algoritmo para a obtenção da CCIC, os tempos de execução dos demais algoritmos são na ordem milissegundos, não excedendo 10 segundos no caso mais lento. Desta forma, utilizar uma linguagem de alto nível é suficiente para encontrar os resultados de forma satisfatória. A linguagem utilizada foi JAVA, sob os

conceitos e abordagem da orientação a objeto, permitindo a utilização de recursos como herança e polimorfismo. Para cada modelo matemático foi implementado uma classe, atribuindo valores das constantes dos modelos matemáticos em atributos através do método construtor, permitindo o uso destas constantes em todos os métodos. Cada classe possui os métodos para encontrar a posição em função do tempo e sua respectiva distância relativa entre os objetos colisionais.

Também foi implementado algumas classes de apoio, com métodos que são comuns para todos os modelos, aproveitando o recurso da herança e reutilização do código fonte.

O algoritmo para a obtenção da CCIC não foi implementado em JAVA. Neste caso, exige-se um alto consumo de processamento, logo, foi implementado em linguagem C, sob o conceito da programação estruturada, por ser uma linguagem de programação mais leve e de baixo nível, logo aproveitando mais do processamento do computador. A complexidade deste algoritmo pode ser denotado por $O(n^2)$ e, além disto, há a execução de laços de repetição encadeados, chegando a aproximadamente $1,98 \times 10^8$ repetições.

A solução numérica do modelo da dinâmica colisional incluindo as forças de propulsão e o arrasto atmosférico, foi implementada pelo método de Runge-Kutta de 4^o ordem, em linguagem JAVA. Uma equação diferencial com solução conhecida foi testada para assegurar implementação.

Os gráficos foram plotados nos softwares Origin 8.0, GnuPlot 4.6 e SciDAVis 1.D009. Também foi usado o programa Microsoft Excel, para auxiliar nas tabelas e em alguns gráficos.

3.7.1 Algoritmo da Dinâmica Relativa Colisional

O objetivo deste algoritmo é simular as possibilidades de colisões a partir das condições iniciais de colisão (CIC). Com o resultado plotou-se o histograma das quantidades de colisões, veja a Figura 4.1, para diferentes faixas de velocidades. As condições iniciais são variáveis cujos valores são previamente configurados.

Este algoritmo é composto por vários laços de repetição aninhados, logo o nível de complexidade é na ordem de n^4 , por isso este é o algoritmo que mais exige recurso computacional. O primeiro loop ao executar o algoritmo é a variação do tempo de 0 até 3000 segundos, chamamos de tempo de colisão ou t_c .

A cada segundo encontraremos as posições iniciais, e para isto utilizamos as equações (3.24), (3.25) e (3.26), com diferentes pares de ângulos. O r_0 é atribuído a uma constante e os pares de ângulos são encontrados implementando laços de repetição aninhado, variando $0 \leq \theta < 2\pi$ e $0 \leq \phi < \pi$. Ou seja, faremos a combinação do t_c , do ângulo θ e do ângulo ϕ . O resultado é atribuído a variáveis cujos valores serão utilizados para encontrar as velocidades iniciais que causaram colisões nas equações (3.21), (3.22) e (3.23).

Para calcular a distância relativa entre os objetos no final da trajetória, utilizamos as equações (3.17), (3.18) e (3.19). O valor do ω é previamente configurado numa

constante, e utilizamos o tempo, as posições iniciais e as velocidades iniciais fornecidos pelo algoritmo encontrarão as componentes x, y e z em função do t_c . Logo, a distância relativa é dada pela raiz quadrado a soma do quadrado das componentes, ou seja: $r(t_c) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Esta distancia relativa no final da trajetória deverá ser zero, pois utilizamos velocidades iniciais que causaram colisões, se for diferente de zero, significa que existe algum erro na implementação do algoritmo. Outro teste a ser feito para validar a implementação do código é encontrar o $r(0)$, ou seja, a distancia relativa em $t_c = 0$, neste caso o resultado deverá ser o mesmo valor que o r_0 .

Ainda existe outro fator de extrema importância. Para encontrar a solução das equações (3.14), (3.15) e (3.16) houve uma expansão do termo gravitacional, conforme descrito na transição da equação (3.5) para a (3.6). Isto significa que temos que considerar $\frac{|\vec{r}|}{|\vec{R}|} \ll 1$, ou seja, em termos computações, precisamos testar se o $\vec{r} < \vec{R}$, durante toda a trajetória. Sendo assim, para cada combinação do t_c , do ângulo θ e do ângulo ϕ , devemos outro laço de repetição variando o tempo da trajetória, que chamamos de t_t , de zero segundo até t_c . Se em algum momento o $\vec{r} > \vec{R}$, então esta condição inicial de colisão é descartada, caso contrário, contabilizamos a condição inicial de colisão dentro das faixas de velocidades estabelecidas no histograma. O loop d esta verificação retarda a desempenho do algoritmo de forma significativa. A título de informação, utilizando um MacBook Air com Processador Intel Core i5, 1,7GHz e 04 GB de memória RAM, a execução do algoritmo sem verificar o $\vec{r} < \vec{R}$, dura em torno de 02 horas. Agora, quando o verificamos o $\vec{r} < \vec{R}$, o tempo de execução pode chegar a 10 dias. Isto porque estamos considerando órbitas em LEO, órbitas baixa. Em órbitas MEO e GEO, o tempo de execução chega há meses.

O algoritmo deste trabalho foi aperfeiçoado do utilizado por [Jesus et al., 2012]. Durante a validação do $\vec{r} < \vec{R}$, o algoritmo de [Jesus et al., 2012] percorre toda a órbita do t_t até o t_c , e armazena a maior distância relativa \vec{r}_{max} numa variável auxiliar, só depois de terminar a trajetória da órbita que é verificado se o $\vec{r}_{max} < \vec{R}$, ou seja, supondo que o $t_c = 2667s$ e o \vec{r}_{max} seja maior que o \vec{R} em $t_t = 5s$, o algoritmo ainda continuará buscando um \vec{r}_{max} em todo o restante dos 2662 segundos, mas já sabendo que esta condição será descartada. Nossa melhoria foi justamente testar se o $\vec{r}_{max} < \vec{R}$ para cada t_t , desta forma, utilizando a suposição anterior, a verificação seria executada até o $t_t = 5s$, não contabilizava esta condição inicial, descartando-a e passando para a próxima condição, evitando a utilização de recurso computacional desnecessário.

3.7.2 Algoritmo da Dinâmica Relativa com Propulsão

Este é um algoritmo de menor complexidade, rápida execução, na ordem de unidades de segundos e tem o objetivo de encontrar a distância relativa entre os objetos colisionais com o intuito de mostrar a manobra evasiva. Uma vez que tenhamos encontrado a CIC, pegamos qualquer uma dessas condições iniciais e utilizamos como parâmetros no algoritmo, ou seja, o mesmo t_c , ângulo θ e ângulo ϕ , que retornaram

as posições e velocidades iniciais que causaram colisões, dando $r(t_c) = 0$. Ora, se estas condições causam colisões, quando estão sob o efeito somente da força gravitacional, e utilizando-as no algoritmo com a propulsão acionada durante toda a trajetória, esperamos encontrar um $r(t_c) > 0$, significando que ocorreu a manobra evasiva para os detritos menores que o $r(t_c)$.

Sendo assim, mantendo as mesmas configurações da CIC no t_c , basta encontrar o valores das componentes x, y e z, através das respectivas equações (3.34), (3.35) e (3.36), em função de t_c e calcular o valor do módulo das componentes, ou seja, a distancia relativa ($r(t_c) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$). Normalmente o gráfico da distância relativa é plotado junto com o caso homogêneo, quando há colisão, para efeito de comparação da manobra evasiva, como pode ser visto na Figura 4.2.

3.7.3 Algoritmo da Dinâmica Relativa com Força de Arrasto Atmosférico

Este algoritmo é desenvolvido de forma análoga ao algoritmo anterior, item 3.7.2. Mas, neste caso, utilizaremos as equações (3.68), (3.69) e (3.70) e o resultado da manobra evasiva pode ser visto na Figura 4.4.

3.7.4 Algoritmo da Dinâmica Colisional com Força de Arrasto Atmosférico

Neste trabalho, foi calculado a CIC do modelo da gravitacional adicionando o arrasto atmosférico. Logo, de forma análoga ao item 3.7.1, mas considerando as equações (3.68), (3.69) e (3.70), com suas respectivas componentes da velocidade, encontramos um novo conjunto de condições iniciais de colisões, conforme a Figura 4.12, Figura 4.13, Figura 4.14 e Figura 4.15, na qual observamos a redistribuição das possibilidades de colisões, que será discutido mais detalhadamente a seguir no item 4.2.

3.7.5 Algoritmo da Dinâmica Relativa com Forças Gravitacional, o Arrasto Atmosférico e a Força de Propulsão.

Neste caso, tivemos dois modelos matemáticos, uma solução semi-analítica e uma solução numérica. Para cada modelo foi desenvolvido um algoritmo.

No caso da solução semi-analítica, o algoritmo segue, também, de forma análoga ao algoritmo do item 3.7.2. Mas, neste caso, utilizaremos as equações (3.91), (3.92), (3.93) e o resultado da manobra evasiva pode ser visto na Figura 4.9.

Para a solução numérica, o algoritmo difere na forma de encontrarmos as posições relativas, ou seja, as componentes x, y e z. Como neste caso, não temos como escrever o código de forma algébrica diretamente, precisamos utilizar um algoritmo que encontrar a solução da equação diferencial através de métodos numéricos, e desta forma, utilizamos o método de Runge Kutta de 4ª ordem. Esta dissertação não tem o objetivo de explicar detalhadamente os métodos numéricos, há bastante literatura que

trata especificamente do assunto, tal como o [Press et al., 1992].

3.7.6 Algoritmos da Propulsão Subótima

A propulsão Subótima é uma estratégia pensada na execução a manobra evasiva com a finalidade de economizar combustível. Para isto foi desenvolvidos 04 algoritmos para as simulações, que será melhor detalhando no item 4.3. Abaixo está a descrição dos algoritmos:

- **Propulsão Subótima Inicial:** o sistema de propulsão é acionado por um determinado tempo de propulsão (t_p), depois os objetos ficam sob o efeito somente da força gravitacional.
- **Propulsão Subótima Intermediária:** o veículo fica por um tempo sob o efeito da força gravitacional, o sistema propulsão é acionado por um t_p e depois retorna a ficar sob o efeito da força gravitacional.
- **Propulsão Subótima Final:** o veículo fica sob o efeito da gravidade e o t_p é deixado para ser utilizado no final da trajetória
- **Propulsão Subótima Aleatória:** o veículo fica alternando entre propulsão e fora gravitacional para t_p aleatórios.

Para todos os algoritmos, as condições iniciais de colisão são as mesmas. Quando o veículo estiver sob o efeito da força gravitacional, será utilizado parcialmente o algoritmo 3.7.1. Quando o algoritmo estiver sob o efeito do sistema propulsor, será utilizado o algoritmo 3.7.2. Ambos a partir dos métodos que retornam as componentes x, y e z, e o respectivo módulo da distância relativa. Mas, todas as vezes que há alternância entre os algoritmos, novas posições e velocidades iniciais precisam ser calculadas, pois o veículo espacial estará com posição e velocidade diferente em um determinado tempo. Supondo que iremos calcular uma trajetória Subótima inicial para $t_p = 500s$, ou seja, durante os 500 segundos iniciais, o veículo espacial estará com o sistema propulsor acionado e depois desligará ficando sob o efeito somente da força gravitacional. Neste caso, ao iniciar a trajetória, as configurações iniciais utilizar as posições e velocidades iniciais normalmente, ao completar os 500 segundos, as posições e velocidades iniciais para o algoritmo da força gravitacional serão as posições e velocidades finais do algoritmo do sistema propulsor. Ou seja, cada vez que troca o algoritmo, as configurações devem ser atualizadas.

Capítulo 4

Manobras Evasivas em Ambiente de Detritos Espaciais, sujeitas ao Arrasto Atmosférico

“A verdadeira grandeza do homem é medida pela força dos sentimentos que ele domina, e não pelos sentimentos que o dominam...”

-- Ellen White

Neste Capítulo mostraremos os resultados das simulações numéricas do problema da dinâmica orbital relativa entre dois objetos espaciais: um veículo operacional e um detrito. Inicialmente, reproduzimos diversos resultados de [Jesus et al., 2012] com o objetivo de confirmar se o código computacional está coerente com o problema original. Além disso, deduzimos as equações do movimento, Equações (3.17), (3.18) e (3.19), que já estavam nesta referência exatamente para nos habilitarmos no modelo físico matemático apresentado na referência. Incluindo a força de arrasto atmosférico, novas equações surgiram, as quais são novas, visto que a referência não tratou o problema com forças não conservativas. Estas foram representadas nas Equações (3.34), (3.35), (3.36), (3.68), (3.69) e (3.70).

4.1 Reprodução dos Resultados de [Jesus et al., 2012]

Nesta seção, mostramos os resultados da reprodução de um dos histogramas que mostra as possibilidades de colisão quando os objetos colisionais estão afastados inicialmente de uma distância igual a 3 km. A Figura 4.1, a seguir, mostra estes resultados.

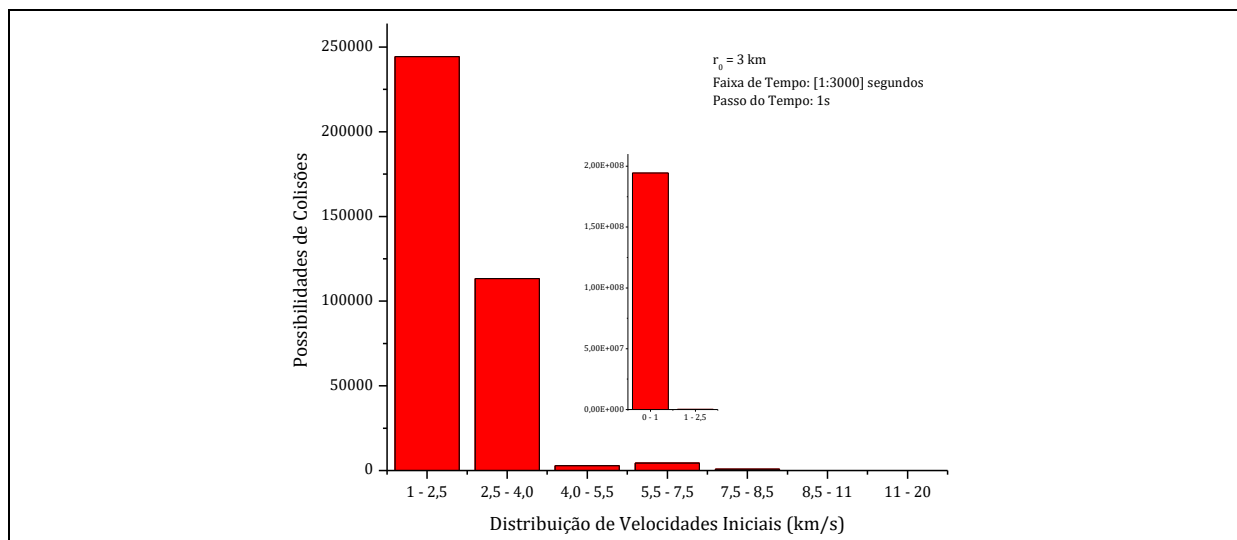


Figura 4.1. Possibilidades de colisões x distribuição de velocidades iniciais . FONTE: Baseado em [Jesus et al., 2012]

Claramente, observamos a distribuição das possibilidades de colisão entre os objetos mais nos intervalos de velocidades iniciais relativas muito pequenas. Ocorre também possibilidade de colisão para faixas de velocidades grandes, contudo em quantidades muito menores. Ou seja, em LEO, a maior chance de colisão entre um veículo espacial e um detrito ocorre para velocidades iniciais relativas pequenas, quando a distância inicial entre eles for pequena também. Outros histogramas mostraram uma redistribuição destas quantidades para velocidades iniciais relativas médias e elevadas, quando a distância inicial relativa entre os objetos for grande. Estes outros resultados podem ser verificados em [Jesus et al., 2012]. A seguir, na Figura 4.2, reproduzimos mais resultados obtidos nesta referência. Trata-se da manobra de evasão implementada no tempo de colisão previsto, devido à atuação do sistema de propulsão do veículo espacial.

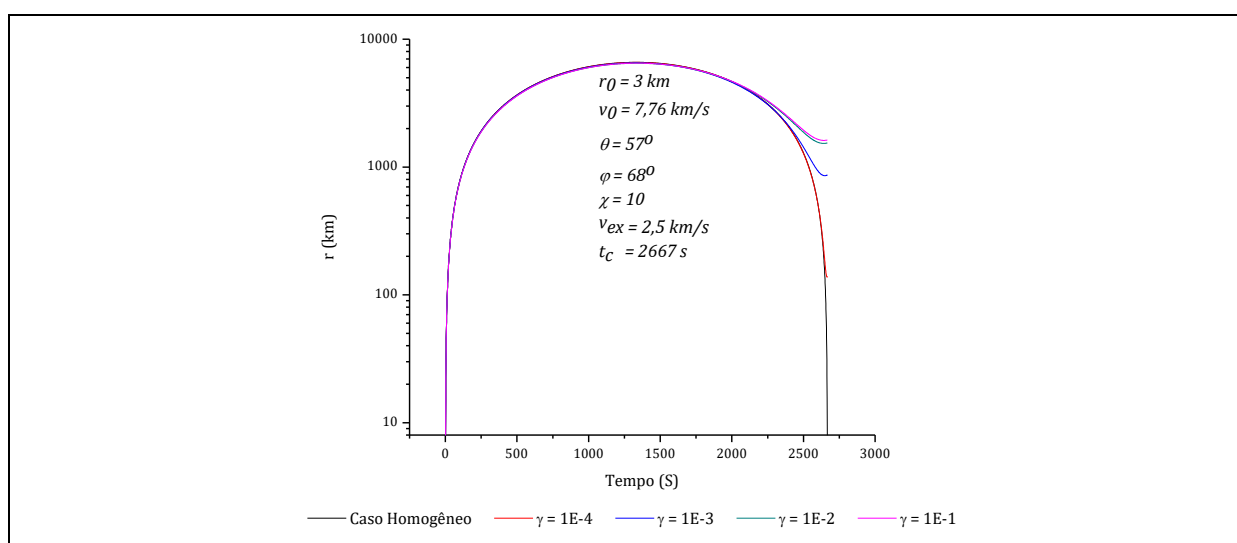


Figura 4.2. Posição relativa entre os dois corpos em função do tempo com a força gravitacional e propulsão para diferentes fatores de potência.. FONTE: Baseado em [Jesus et al., 2012]

Neste gráfico, mostramos como a propulsão atua na implementação da manobra evasiva para diferentes valores do fator de potência. Observamos que na medida em que este fator cresce, o veículo espacial escapa de detritos cada vez maiores, respectivamente. As simulações ocorrerem para velocidade de exaustão típica igual a 2,5 km/s e para velocidade inicial relativa de 7,76 km/s. Os ângulos foram escolhidos para estarem no primeiro octante, mas os resultados são equivalentes em outros octantes. O tempo de colisão é 2.667 segundos e o fator de massa típico é 10, que representa a maioria dos veículos operacionais. Outro resultado que reproduzimos foi o gráfico da Figura 4.3, a seguir. Este gráfico mostra como a manobra evasiva se comporta frente a detritos em rota de colisão com o veículo em função das velocidades de exaustão do sistema de propulsão.

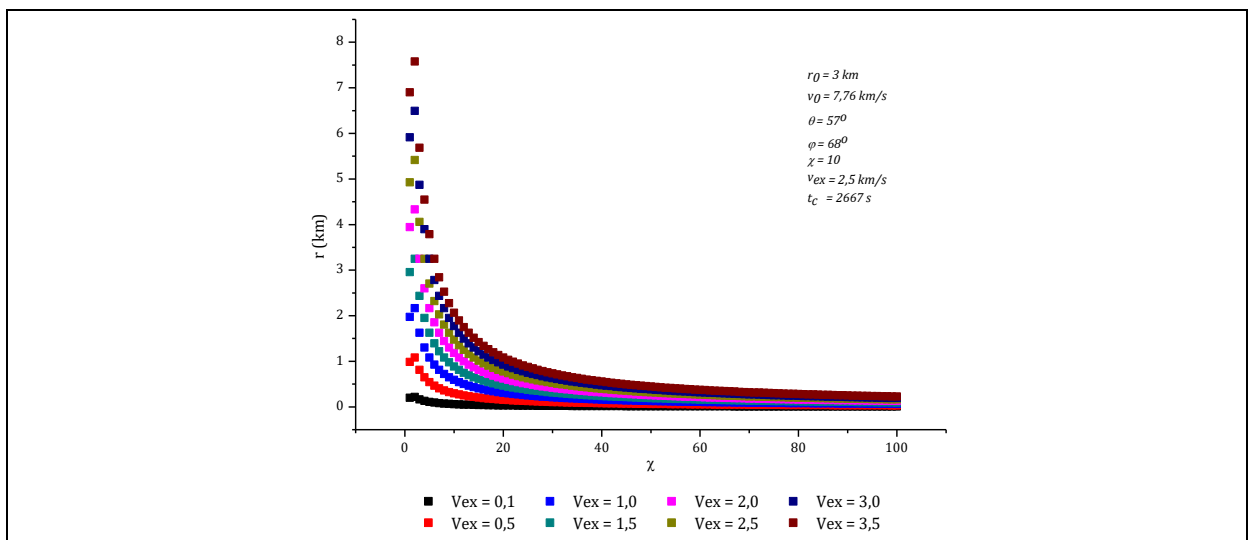


Figura 4.3. Posição Relativa Final entre os dois objetos em função do fator massa para diferentes velocidades de exaustão. FONTE: Baseado em [Jesus et al., 2012]

Observamos neste gráfico que quanto mais potente o sistema de propulsão (maior velocidade de exaustão), maior chance do veículo escapar de detritos maiores, para veículos de tamanhos típicos caracterizados por fatores de massa até 10. Contudo, veículos menores (sondas, satélites minúsculos, etc.) terão maior chance de escapar apenas de detritos pequenos, independentemente da velocidade de exaustão, ou seja, independente da potência do seu motor. A Tabela 4.1 e a Tabela 4.2, a seguir, mostram os resultados das simulações da dinâmica para diversos valores do fator de massa, e para diversos valores do fator de potência, mostrando o tamanho dos detritos por velocidade de exaustão, dos quais o veículo escaparia, respectivamente. Observamos que ocorre escape de detritos até da ordem de metros.

Tabela 4.1. Posição relativa final entre os dois objetos em função do fator massa para diferentes velocidades de exaustão.

χ	Vex = 0,1 km/s	Vex = 0,5 km/s	Vex = 1,0 km/s	Vex = 1,5 km/s	Vex = 2,0 km/s	Vex = 2,5 km/s	Vex = 3,0 km/s	Vex = 3,5 km/s
Posição Relativa Final								
1	0,19711	0,98554	1,97108	2,95662	3,94216	4,9277	5,91324	6,89878
2	0,21651	1,08257	2,16514	3,24771	4,33028	5,41284	6,49541	7,57798

3	0,16238	0,81188	1,62376	2,43564	3,24752	4,0594	4,87128	5,68316
4	0,1299	0,64948	1,29896	1,94845	2,59793	3,24741	3,89689	4,54638
5	0,10824	0,54122	1,08245	1,62367	2,16489	2,70611	3,24734	3,78856
6	0,09278	0,4639	0,9278	1,39169	1,85559	2,31949	2,78339	3,24728
7	0,08118	0,40591	0,81181	1,21772	1,62362	2,02953	2,43543	2,84134
8	0,07216	0,3608	0,7216	1,0824	1,44321	1,80401	2,16481	2,52561
9	0,06494	0,32472	0,64944	0,97416	1,29888	1,62359	1,94831	2,27303
10	0,05904	0,2952	0,59039	0,88559	1,18079	1,47599	1,77118	2,06638
15	0,04059	0,20294	0,40589	0,60883	0,81178	1,01472	1,21766	1,42061
20	0,03092	0,15462	0,30925	0,46387	0,61849	0,77311	0,92774	1,08236
25	0,02498	0,12489	0,24977	0,37466	0,49955	0,62443	0,74932	0,87421
30	0,02095	0,10474	0,20949	0,31423	0,41897	0,52372	0,62846	0,7332
35	0,01804	0,0902	0,18039	0,27059	0,36078	0,45098	0,54117	0,63137
40	0,01584	0,0792	0,15839	0,23759	0,31678	0,39598	0,47517	0,55437
45	0,01412	0,07059	0,14117	0,21176	0,28235	0,35294	0,42352	0,49411
50	0,01273	0,06367	0,12733	0,191	0,25467	0,31833	0,382	0,44567

FONTE: Baseado em [Jesus et al., 2012]

Tabela 4.2. Posição relativa final entre os dois objetos em função do fator de potência para diferentes velocidades de exaustão.

γ	Vex = 0,1 km/s	Vex = 0,5 km/s	Vex = 1,0 km/s	Vex = 1,5 km/s	Vex = 2,0 km/s	Vex = 2,5 km/s	Vex = 3,0 km/s	Vex = 3,5 km/s
1E-01	65,07601	325,38004	650,76008	976,14013	1301,52017	1626,90021	1952,28025	2277,66029
1E-02	61,70524	308,5262	617,0524	925,5786	1234,10479	1542,63099	1851,15719	2159,68339
1E-03	34,70914	173,5457	347,09139	520,63709	694,18278	867,72848	1041,27417	1214,81987
1E-04	5,55706	27,78532	55,57065	83,35597	111,14129	138,92662	166,71194	194,49727
1E-05	0,58711	2,93555	5,8711	8,80665	11,74221	14,67776	17,61331	20,54886
1E-06	0,05904	0,2952	0,59039	0,88559	1,18079	1,47599	1,77118	2,06638

FONTE: Baseado em [Jesus et al., 2012]

Os fatores de massa igual a 10 e de potência igual a 10^{-6} parecem ser ideais para as simulações em situações mais realistas.

4.2 Simulações com Arrasto Atmosférico

Nesta seção apresentamos os resultados da dinâmica relativa colisional entre os objetos colisionais incluindo a força de arrasto atmosférico. O gráfico da Figura 4.4, a seguir, mostra o efeito do arrasto atmosférico na posição relativa final entre os objetos. Neste trabalho, consideramos o arrasto atmosférico apenas sobre o detrito e não sobre o veículo espacial, pois o veículo está em órbita circular, com velocidade

angular constante. A razão entre massa e área do detrito adotada é de $1,273239546 \times 10^{-1} \text{ kg/m}^2$. Esta razão é para um detrito de 1 g e de raio 0,05 m. A solução homogênea representa a dinâmica sob a ação apenas da força gravitacional.

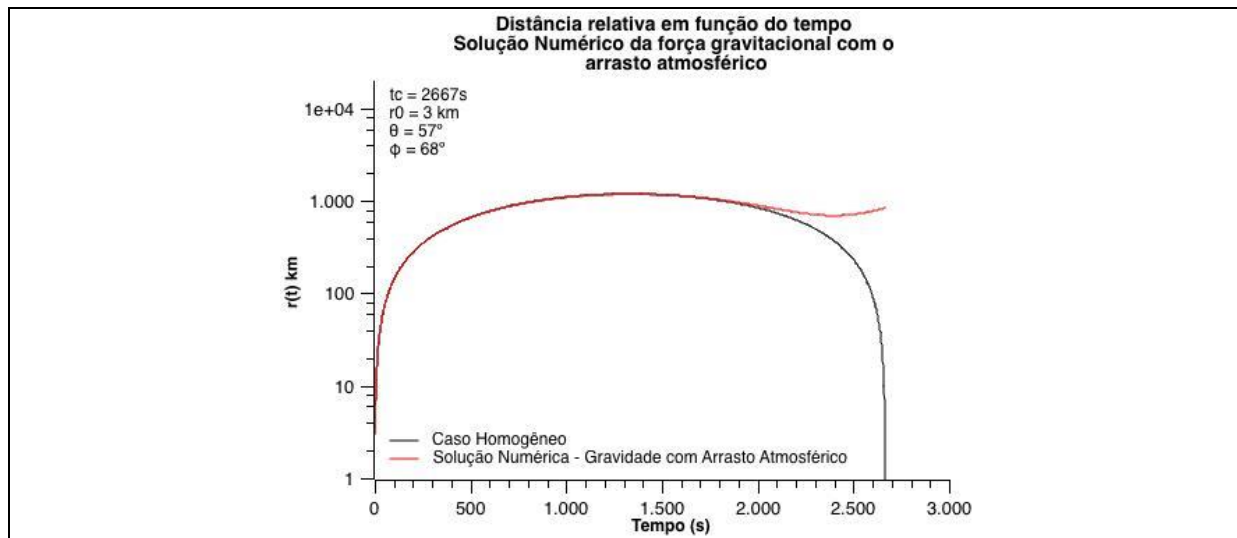


Figura 4.4. Posição relativa final entre os dois objetos em função do tempo, com a força do arrasto atmosférico.

Observamos que o efeito do arrasto atmosférico é o de afastar os objetos colisionais. Os valores finais da posição relativa aumentam à medida que o tempo evolui. Durante os primeiros 2000 segundos o efeito do arrasto não foi suficiente para retirá-lo da sua órbita, permitindo que os objetos permaneçam em rota de colisão (curva de cor preta, solução homogênea). Isto ocorre porque estamos considerando o ρ constante, e no gráfico acima, o valor do ρ é de $2,789 \times 10^{-10} \text{ kg/m}^3$, equivalente a uma altitude de 220 km da superfície da terra. Depois, o arrasto passa a afastar os objetos, sem retorno, e para distâncias muito grandes. O arrasto atmosférico, neste caso, serve como um elemento natural que impede a colisão entre os objetos espaciais. Nas nossas simulações consideramos o coeficiente de arrasto igual a 2,2. Podemos confirmar o efeito do arrasto atmosférico sobre o detrito no gráfico da Figura 4.5, a seguir. Neste gráfico compara-se a solução numérica da força gravitacional junto ao arrasto atmosférico com a solução numérica da força gravitacional com a força de propulsão. A crescente distância relativa a partir dos 2400 segundos mostra que o arrasto afasta os objetos colisionais. A propulsão mantém o veículo na rota da órbita nominal até fazê-lo escapar da colisão no tempo 2.667 s.

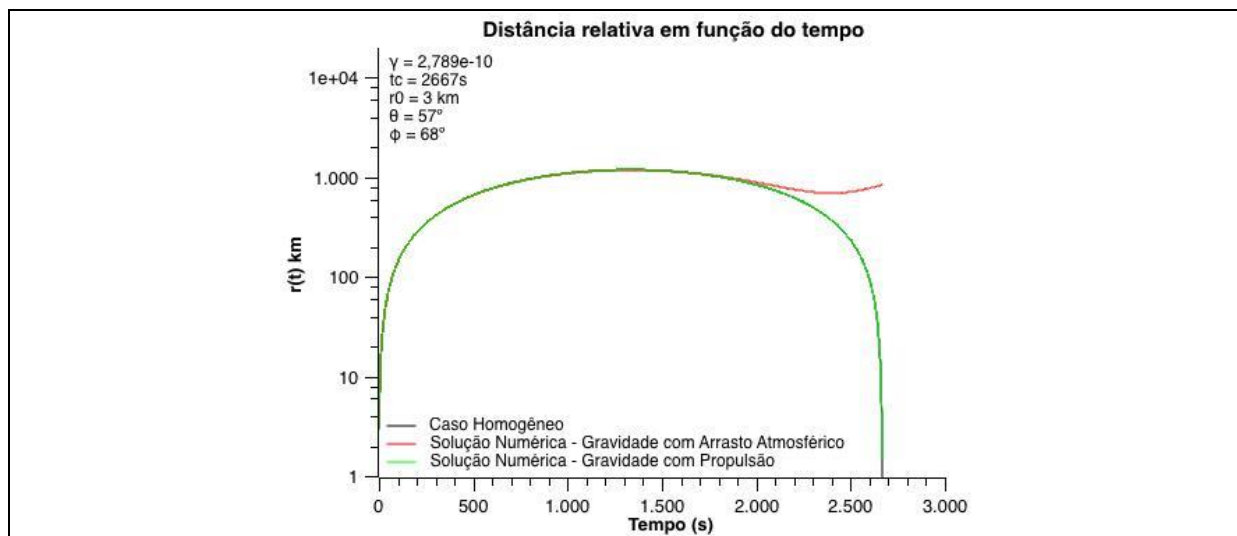


Figura 4.5 Distância Relativa entre os dois objetos colisionais comparando entre as soluções com arrasto e com propulsão

Além disso, ainda é possível observar o comportamento do detrito em relação ao centro da Terra. Veja que no gráfico da Figura 4.6, a seguir, que o detrito se afasta do veículo espacial nos instantes iniciais. Depois o arrasto atmosférico força ele ir em direção do centro da Terra. Como o raio da Terra é de aproximadamente 6.400 km, este detrito irá se chocar na superfície da Terra aos 2.000 segundos, mas o gráfico foi plotado até o final do tempo de colisão, 2.667 s, apenas para efeito ilustrativo. A trajetória do satélite possui distância constante em relação ao centro da Terra, porque é circular.

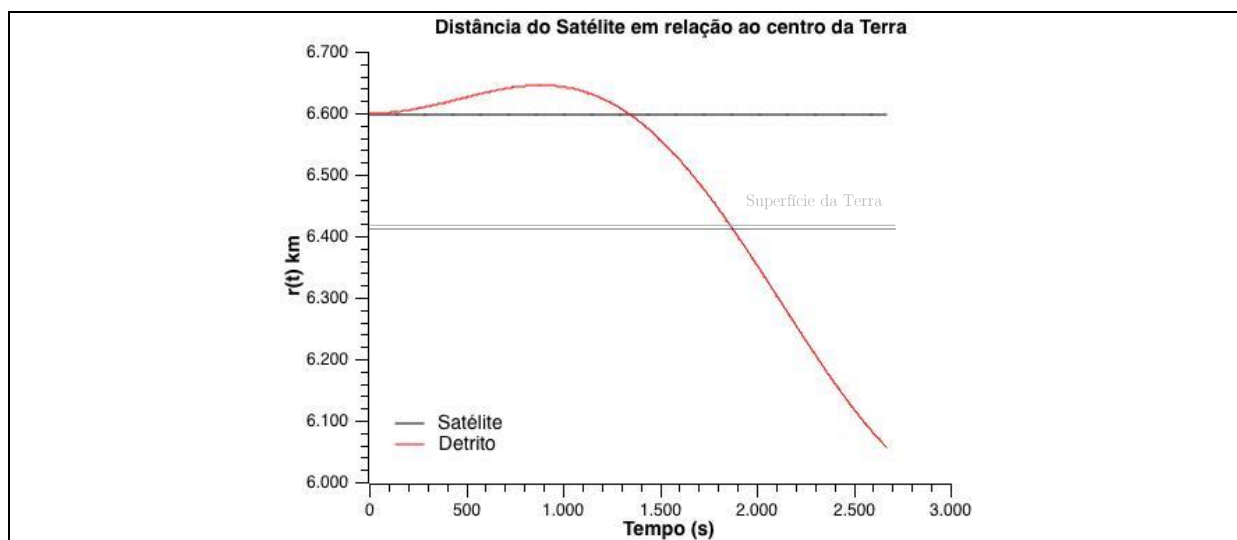


Figura 4.6 Trajetória do detrito em relação ao centro da Terra.

No gráfico da Figura 4.7, a seguir, é apresentada uma visão tridimensional da trajetória do detrito em relação ao centro da Terra. O arrasto atmosférico faz o detrito perder velocidade e cair até ser totalmente queimado pelo atrito ou chocar com a superfície da Terra. Claramente se vê a queda do detrito indo em direção ao

centro da Terra.

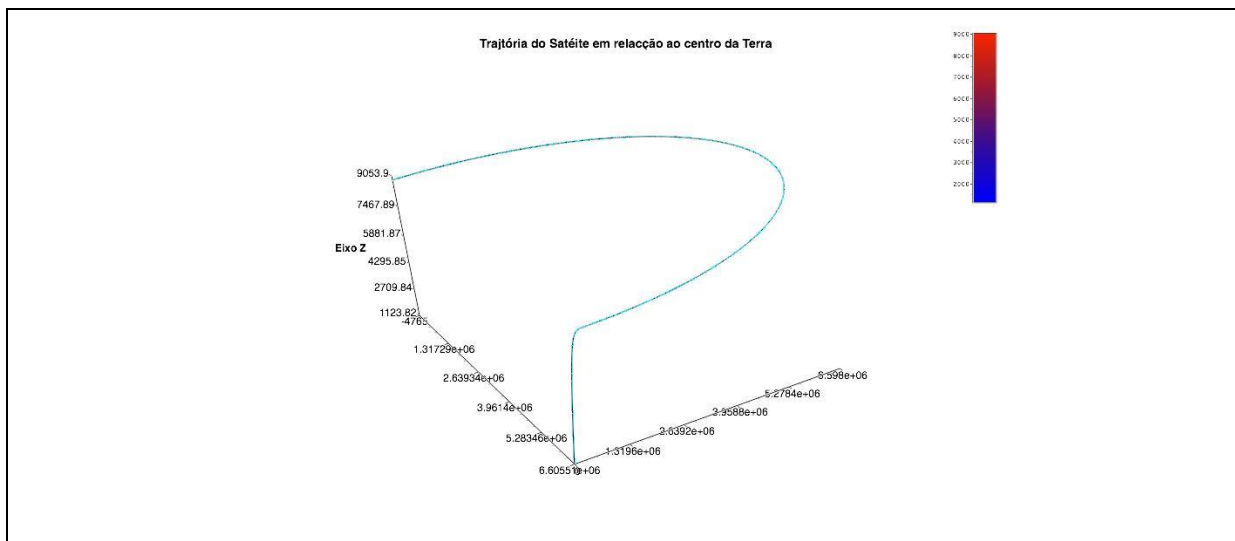


Figura 4.7 Visão 3D da trajetória do detrito.

O fato de ρ ser constante introduz imprecisão nos resultados em relação ao caso realista, no qual esta grandeza varia com a altitude. Assim, quanto menor for a altitude da órbita, maior será a força do arrasto. Sendo assim, o gráfico da Figura 4.8, a seguir, mostra as diferentes órbitas para distintas densidades atmosféricas. Podemos observar que quanto maior for o ρ , mais cedo os objetos se afastam, enquanto o detrito cai sobre a Terra.

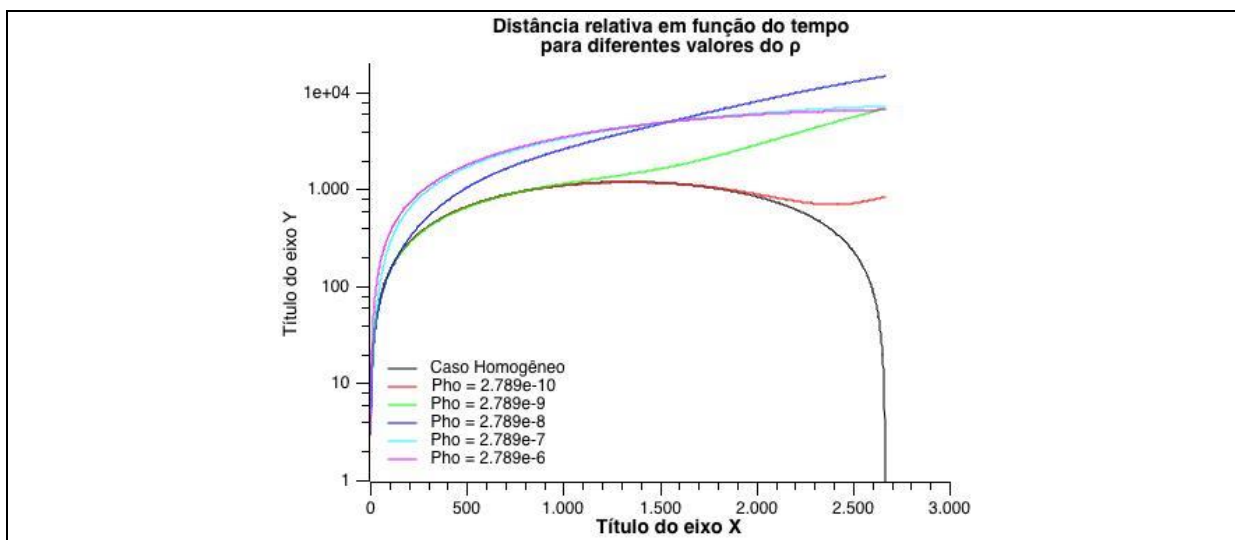


Figura 4.8 Distância relativa entre os objetos colisionais para diferentes coeficientes de arrasto atmosférico.

Obviamente, um modelo mais realista para a densidade atmosférica melhoraria esta solução, mas com o defeito de não permitir uma solução analítica para a dinâmica. O gráfico da Figura 4.9, a seguir, mostra o efeito da solução analítica com arrasto atmosférico na posição relativa final entre os objetos. A solução homogênea

representa a dinâmica sob a ação apenas da força gravitacional.

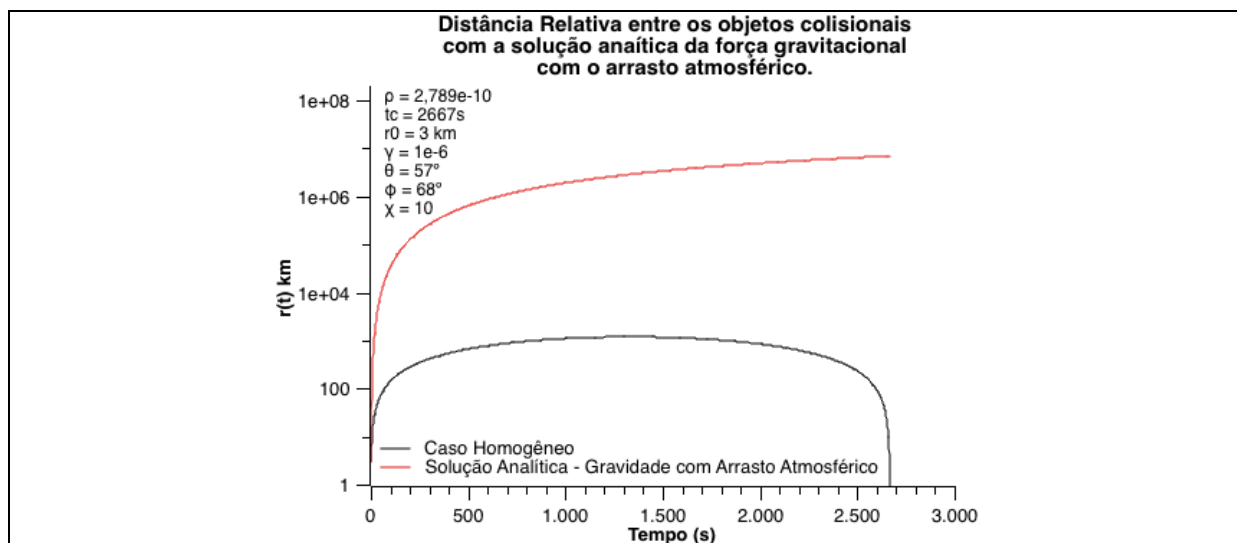


Figura 4.9. Posição relativa final entre os dois objetos em função do tempo, com a força do arrasto atmosférico

Já foi observado que o efeito do arrasto atmosférico é o de afastar os objetos colisionais. Os valores finais da posição relativa aumentam consideravelmente na medida em que o tempo evolui. Esta solução analítica requer ainda um estudo de condições de contorno e de adaptação de certas constantes. Ela aparece aqui apenas como um ensaio de solução definitiva. Nos primeiros 500 segundos o efeito do arrasto já é suficiente para que os objetos saiam da sua rota de colisão (curva de cor preta, solução homogênea). Observe que o arrasto atmosférico serve como um elemento natural que impede a colisão entre os objetos espaciais. Contudo, veremos adiante nos histogramas, ocorrem colisões para velocidades elevadas.

Na solução analítica da equação da dinâmica com arrasto atmosférico apareceu uma constante que separou o movimento nas três direções cartesianas distintas, ou seja, nas coordenadas x, y e z de forma desacoplada. Os gráficos da Figura 4.10 mostram a posição final relativa entre os objetos variando no tempo para diversos valores desta constante.

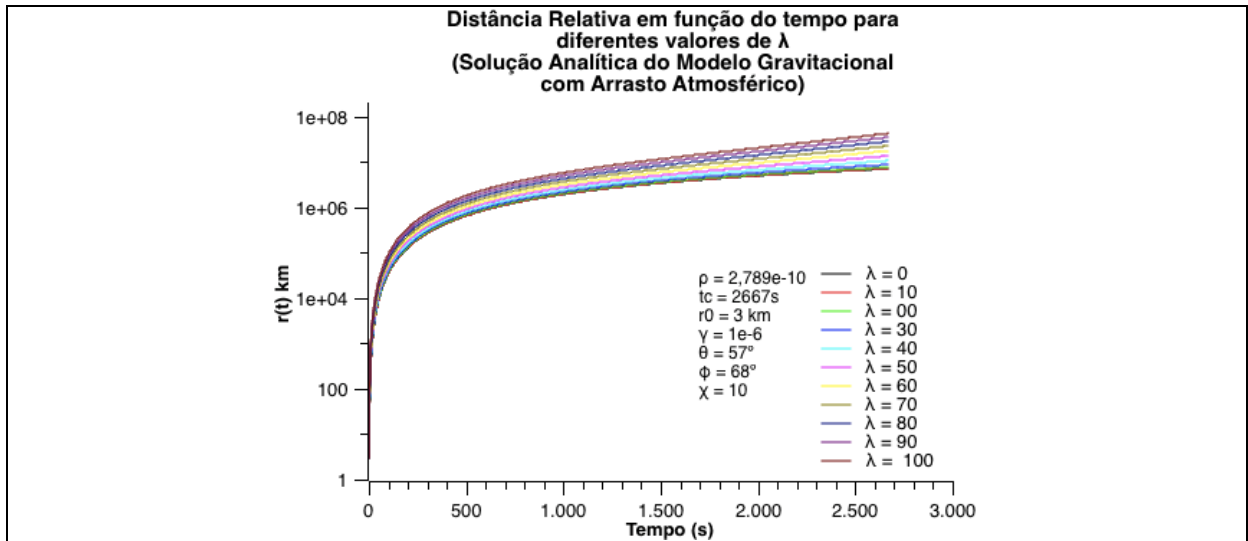


Figura 4.10. Posição Relativa Final entre os dois objetos em função do tempo pra vários lambdas (entre 1 e 10) da força gravitacional com o arrasto atmosférico

Quanto maior for a constante, λ , que chamaremos doravante de “constante de desacoplamento”, maior afastamento dos objetos para intervalos de tempos iguais. Esta constante deve estar relacionada com o grau de isolamento dos movimentos nas direções X e Y e este afastamento, portanto, relacionado com o efeito do arrasto atmosférico. Nos instantes iniciais, o resultado é indiferente para qualquer valor desta constante. Entretanto, se o valor da constante for muito pequeno, na ordem da unidade ou decimais, o efeito do arrasto será praticamente o mesmo para todos os lambdas. Confira os gráficos da Figura 4.11.

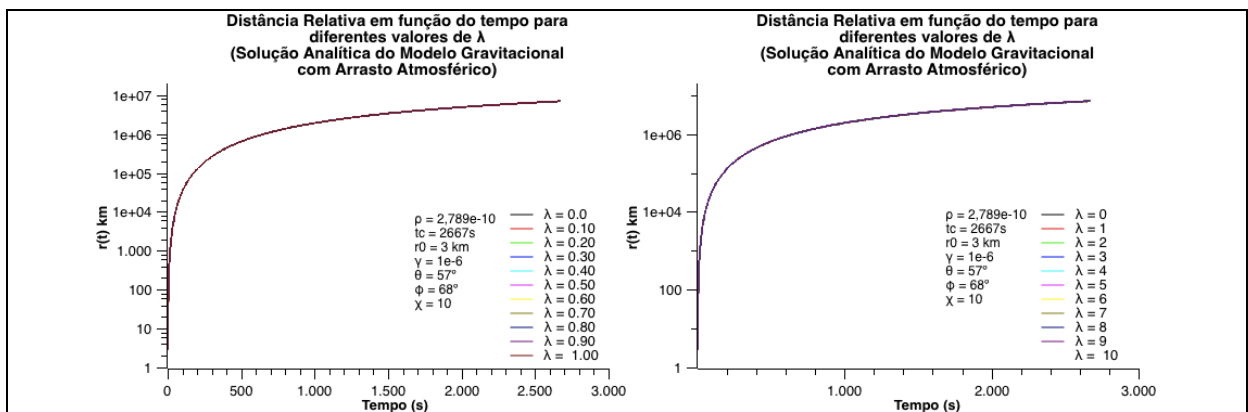


Figura 4.11. Posição Relativa Final entre os dois objetos em função do tempo pra vários lambdas (entre 0,1 e 1) da força gravitacional com o arrasto atmosférico

Observamos, portanto, que se quisermos afastamentos menores entre os objetos, devemos adotar as soluções com λ 's pequenos. Nas Equações (3.68), (3.69), (3.71) e (3.72), das coordenadas x e y, esta constante aparece como coeficiente de termos, o que aumenta a amplitude destas coordenadas. A variável z não apresenta esta constante, portanto, o efeito desta constante acontece apenas no plano da órbita.

O histograma apresentado na Seção 4.1 e outros da referência sofrem mudança

significativa devido à presença do arrasto atmosférico. Ou seja, o efeito do arrasto atmosférico é de redistribuição das condições favoráveis às colisões. No gráfico da Figura 4.12, a seguir, mostramos este efeito, inclusive para valores diferentes de λ .

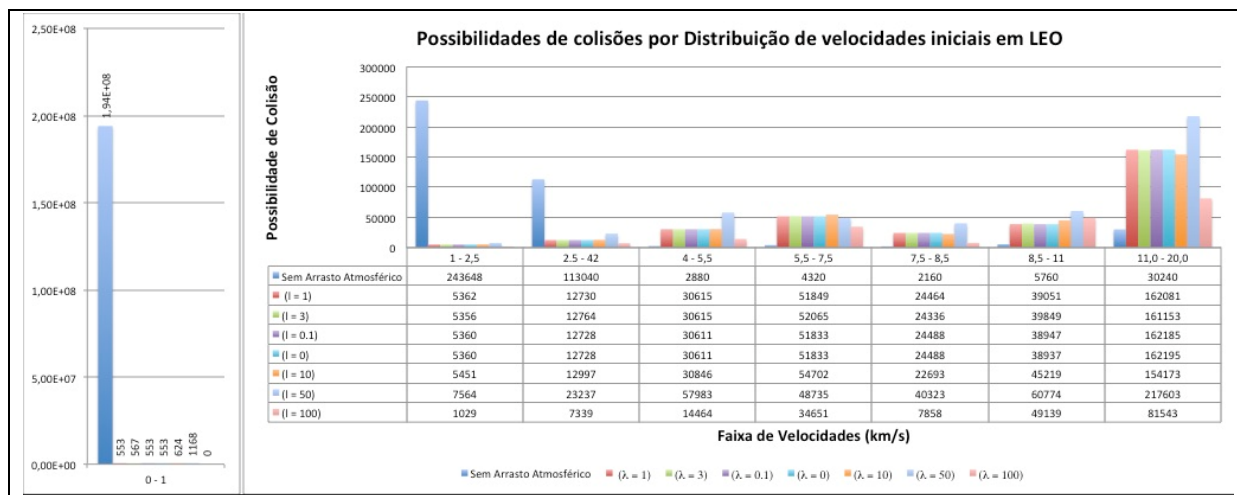


Figura 4.12. Possibilidades de colisões x distribuição de velocidades iniciais com o arrasto atmosférico

Observamos neste gráfico que o efeito do arrasto atmosférico é a redistribuição das possibilidades de colisão para velocidades bem maiores do que para as faixas apresentadas no histograma sem o arrasto. A redistribuição também depende do valor do λ . Esta simulação foi para 3000 segundos. O gráfico da Figura 4.13, a seguir, mostra a distribuição das velocidades para o λ variando entre 0 e 1, com passo de 0,1.

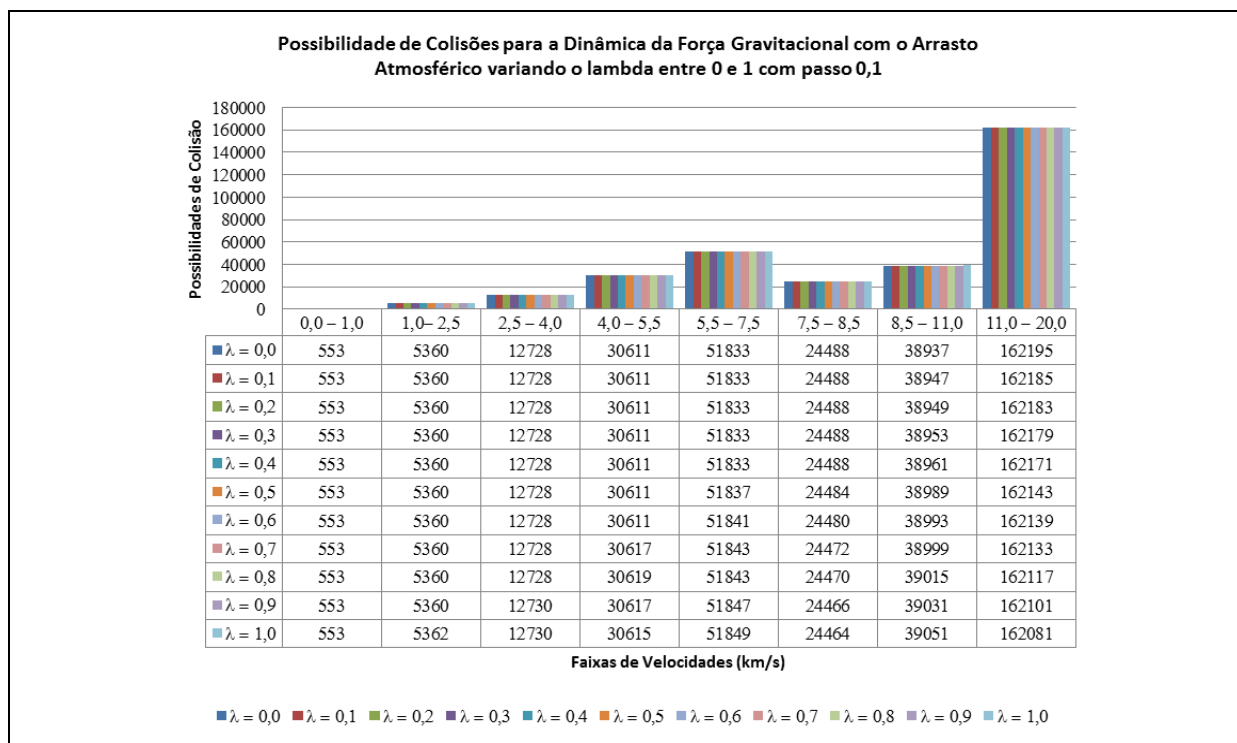


Figura 4.13 Possibilidades de colisões x distribuição de velocidades iniciais com o arrasto atmosférico para o λ variando de 0 a 1, com passo de 0,1.

Observe que para valores pequenos do λ , há certa uniformidade das velocidades iniciais com possibilidade de colisão, ou seja, a variação de λ 's pequenos, não interfere em sua distribuição nas faixas de velocidades. Entretanto, quando o valor de λ cresce, começa a aparecer um “desequilíbrio” no número de possibilidades de colisão em função das suas respectivas faixas de velocidades. Veja no gráfico da Figura 4.14, a seguir, para a maioria das faixas de velocidades, as possibilidades de colisão aumentam, com exceção das velocidades entre 7,5 a 8,5 km/s com uma leve diminuição e as velocidades entre 11,0 a 20,0 km/s que houve uma queda mais significativa.

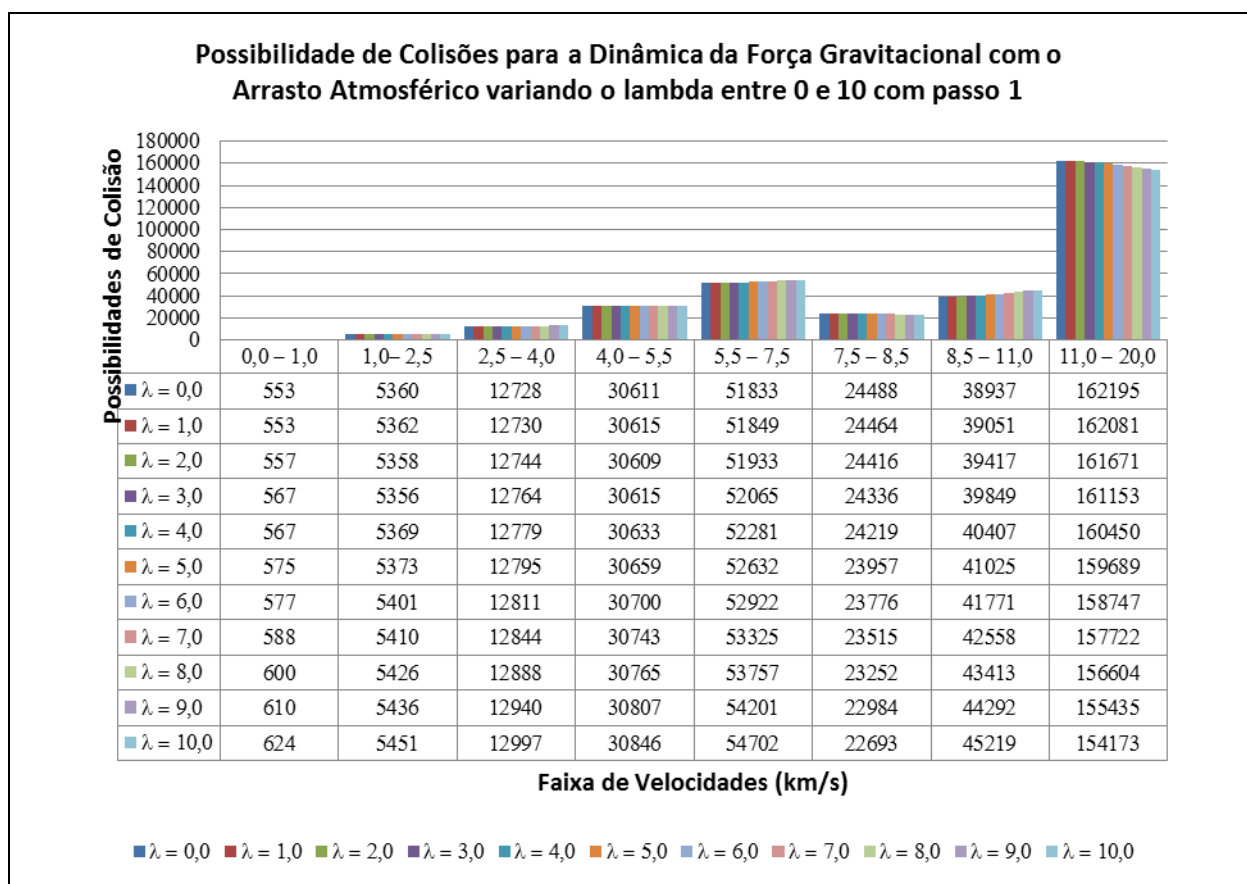


Figura 4.14 Possibilidades de colisões x distribuição de velocidades iniciais com o arrasto atmosférico para o λ variando de 0 a 10, com passo de 1.

Este fenômeno é confirmando quando aumentamos ainda mais o valor do λ . Observe que para valores de λ entre 0 e 100, variando com passo 10, há uma redistribuição ainda maior das possibilidades de colisão nas faixas de velocidades. No gráfico da Figura 4.15, a seguir, é notável a variação das possibilidades de colisão para altos valores de λ . Também é possível observar um determinado valor de λ que favorece uma faixa de velocidade diferente. Veja que para $\lambda = 60$, foi favorável para haver mais colisões entre as velocidades de 1,0 a 5,5 km/s e para a faixa de 7,5 a 11,0 km/s. Entretanto para a faixa de velocidades, entre 5,5 a 7,5 km/s, o que mais favoreceu colisões foi $\lambda = 80$.

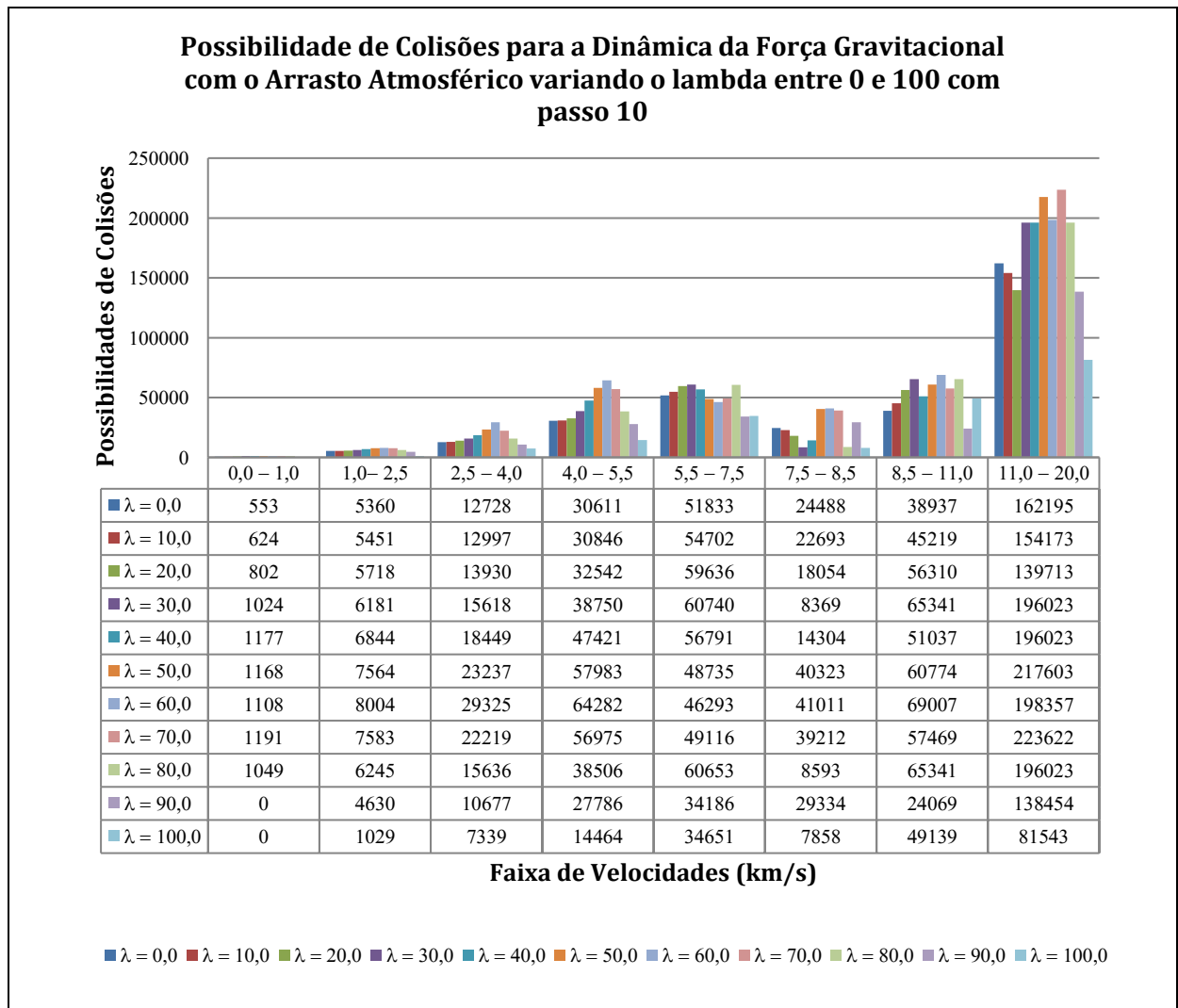


Figura 4.15 Possibilidades de colisões x distribuição de velocidades iniciais com o arrasto atmosférico para o λ variando de 0 a 100, com passo de 10.

Nestes histogramas a quantidade de possibilidades de colisões permanece constante para pequenos valores de λ 's, e na medida em que seus valores crescem, as possibilidades de colisão variam. Em velocidades elevadas, ocorre menor chance de possibilidades para os maiores valores de λ . A Figura 4.16, a seguir, mostra como estas possibilidades variam para valores de λ entre 0 e 100.

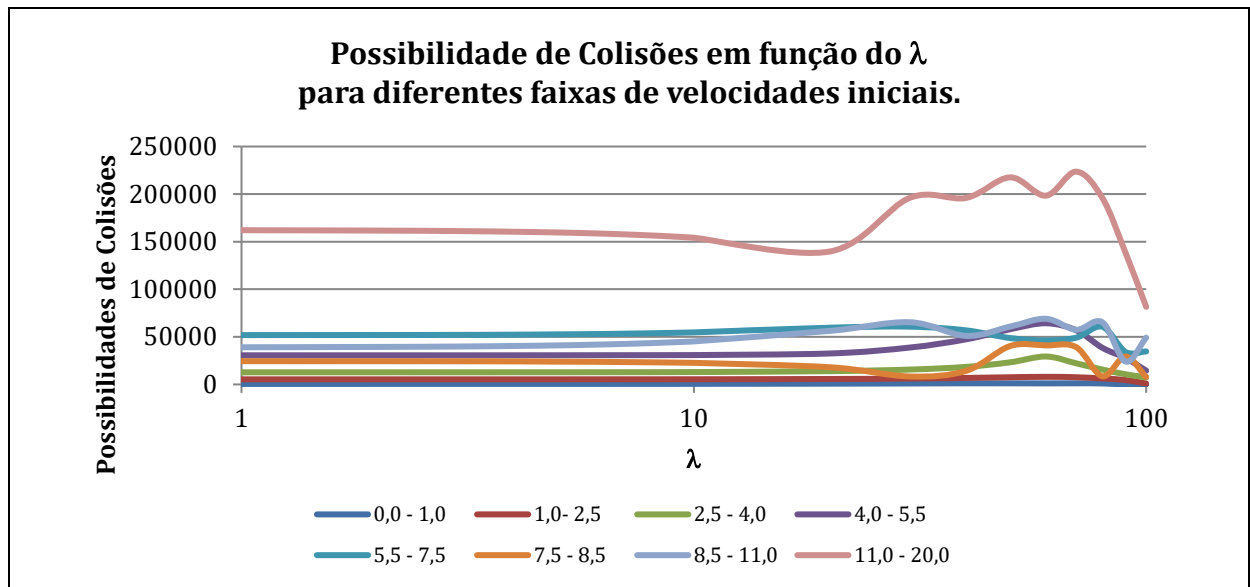


Figura 4.16 Possibilidade de Colisão variando λ entre 0 e 100, até 10 com passo 01 e de 10 até 100 com passo 10, para diferentes faixas de velocidades iniciais

Observamos que há uma faixa de valores de λ para os quais as possibilidades de colisão se mantêm constante, ocorrendo picos em todas as faixas de velocidade quando esta constante for grande. O comportamento geral desta dinâmica se repete para valores negativos de λ , caracterizando uma simetria nos resultados. A Figura 4.17, a seguir, mostra este resultado para λ variando entre -6 e 6.

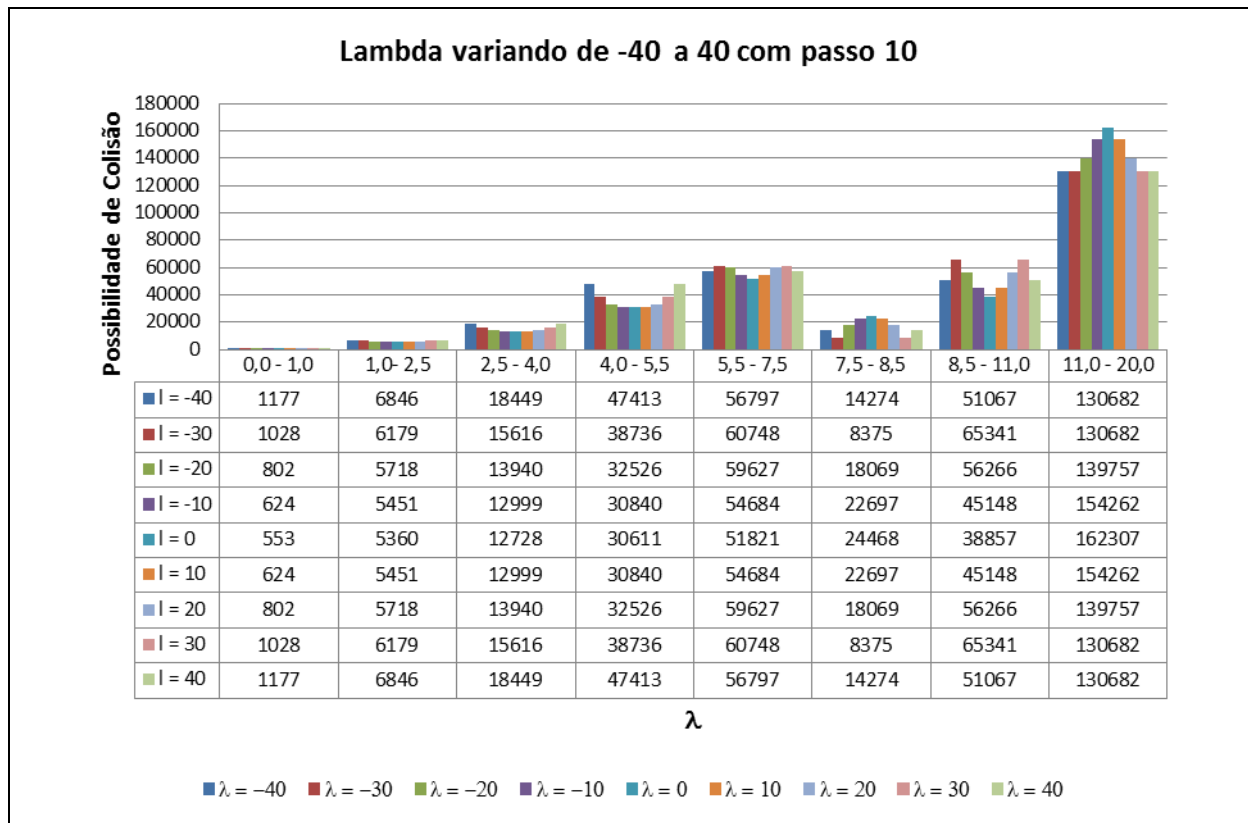


Figura 4.17 Simetria das velocidades relativas. entre -6 e 6 com passo 1

A partir destes resultados sabemos que o comportamento é simétrico para os valores de λ .

4.3 Simulações da trajetória Sub Ótima com a Força de Propulsão

Nesta seção apresentamos os resultados da dinâmica relativa colisional entre os objetos, considerando a força de propulsão como controle para obter-se manobras evasivas mais econômicas do ponto de vista do gasto de combustível. A metodologia adotada foi escolher algumas estratégias de acionamento do sistema propulsor para se alcançar o alvo da trajetória mais econômica.

As estratégias escolhidas foram: 1) propulsão inicial, acionamento do sistema propulsor no início da trajetória; 2) propulsão intermediária, acionamento do sistema propulsor no meio da trajetória; 3) propulsão final, acionamento do sistema propulsor no final da trajetória; 4) propulsão em tempos iguais e alternados para arcos sem propulsão e; 5) propulsão em intervalos de tempo aleatórios. Os intervalos de tempos escolhidos foram 100, 200, 500, 750 e 1000 segundos. Ou seja, foram obtidos os resultados da distância relativa acionando o sistema propulsor, durante 100 segundos, por exemplo, no início da trajetória, depois, para o mesmo tempo, no meio da trajetória e no final da trajetória. Isto se repetiu para os demais tempos. A fase de alternância de acionamento do sistema propulsor foi feita para partes iguais, ou seja,

dividiu-se o tempo em 10 partes iguais, sendo metade acionando a propulsão e a outra metade com a propulsão desligada. Depois disto, repetiu-se esta estratégia dividindo o tempo em 100 e em 500 partes iguais.

Os gráficos, a seguir, foram obtidos através dos resultados alcançados para todos os octantes da esfera global, utilizando-se as estratégias acima com o propósito de observar qual delas é a mais econômica do ponto de vista do consumo de combustível e em qual octante esta economia ocorreria. Para cada octante, foram escolhidos três pares de ângulos, sendo que o primeiro foi escolhido a partir das condições iniciais de colisão no caso homogêneo dado por [Jesus et al., 2012], os outros dois pares de ângulos foram encontrados adicionando e retirando 8° respectivamente dos ângulos iniciais, de forma que dinâmica relativa continuasse no mesmo octante do primeiro par de ângulos. Para os ângulos dos outros octantes foi adicionado 90° no plano ou no espaço. Desta forma, foram utilizados ângulos de todos os octantes. Para todos os octantes repetiu-se a metodologia de adicionar e remover 8° encontrando os outros pares de ângulos. Em cada gráfico será apresentado todas as estratégias em todos os octantes.

O consumo do combustível em relação ao tempo é linear, logo fica claro que as estratégias com menor tempo de acionamento da propulsão serão as mais econômicas, desde que não haja colisão durante a trajetória. Sendo assim, deve-se considerar a distância relativa entres os objetos colisionais, para que a propulsão não remova o satélite de sua órbita nominal.

Após as simulações, foram analisados todos os casos com vistas a caracterizar o que apresentou melhor estratégia para se alcançar a trajetória subótima. Na Tabela 4.3, a seguir, apresentamos um resumo das melhores estratégias por octante, por consumo de combustível.

Tabela 4.3 Resumo das melhores estratégias sub ótima por octante – queima final

Octante	Tempo e $r(t)$	Estratégia	Par de ângulos	Consumo (kg)
I	$t = 100$ s $r(t) = 91,491509$ km	Final	$\varphi = 76^\circ$ $\vartheta = 65^\circ$	0,005
II	$t = 100$ s $r(t) = 91,491805$ km	Final	$\varphi = 76^\circ$ $\vartheta = 155^\circ$	0,005
III	$t = 100$ s $r(t) = 91,491509$ km	Final	$\varphi = 76^\circ$ $\vartheta = 246^\circ$	0,005
IV	$t = 100$ s $r(t) = 91,491805$ km	Final	$\varphi = 76^\circ$ $\vartheta = 335^\circ$	0,005
V	$t = 100$ s $r(t) = 327,51878$ km	Final	$\varphi = 150^\circ$ $\vartheta = 49^\circ$	0,005

VI	$t = 100$ s $r(t) = 327,51880$ km	Final	$\varphi = 150^\circ$ $\vartheta = 139^\circ$	0,005
VII	$t = 100$ s $r(t) = 327,51878$ km	Final	$\varphi = 150^\circ$ $\vartheta = 229^\circ$	0,005
VIII	$t = 100$ s $r(t) = 327,51878$ km	Final	$\varphi = 150^\circ$ $\vartheta = 319^\circ$	0,005

Esta Tabela mostra resultados ótimos para detritos pequenos e para detritos grandes, na estratégia de queima nos últimos 100 segundos finais da manobra. Para este caso, observamos que os octantes de I a IV, apresentam melhor resultado para detritos da ordem de até 91,5 km, enquanto nos demais octantes para detritos da ordem de até 327,5 km. Esta Tabela mostra os melhores casos, mas outros casos foram testados, cujo consumo superaram 0,005 kg. Estes casos estão mostrados no Apêndice A. Para as outras estratégias, de queima nos primeiros 100 segundos, em 100 segundos intermediários e até para o caso aleatório, listamos os melhores casos na Tabela 4.2, a seguir, considerando detritos até 91,5 km.

Tabela 4.4 Resumo das melhores manobras por estratégia sub ótima por estratégia

Estratégia	Tempo e $r(t)$	Octante	Par de ângulos	Consumo (kg)
Inicial	$t = 100$ s $r(t) = 91,491509$ km	V	$\varphi = 150^\circ$ $\vartheta = 49^\circ$	0,005
Final	$t = 100$ s $r(t) = 91,491509$ km	III	$\varphi = 76^\circ$ $\vartheta = 246^\circ$	0,005
Intermediário	$t = 100$ s $r(t) = 91,491509$ km	II	$\varphi = 76^\circ$ $\vartheta = 155^\circ$	0,005
Aleatório	$t = 487$ s $r(t) = 91,491509$ km	III	$\varphi = 60^\circ$ $\vartheta = 229^\circ$	0,022

Observamos, portanto, que a melhor estratégia é a de queima em 100 segundos, podendo ocorrer casos do sistema de propulsão ser acionado no início, no meio e no final da manobra. Nos gráficos das Figura 4.18, 4.2, 4.3 e 4.4, exibimos as manobras evasivas para cada uma das estratégias apresentadas na Tabela 4.4.

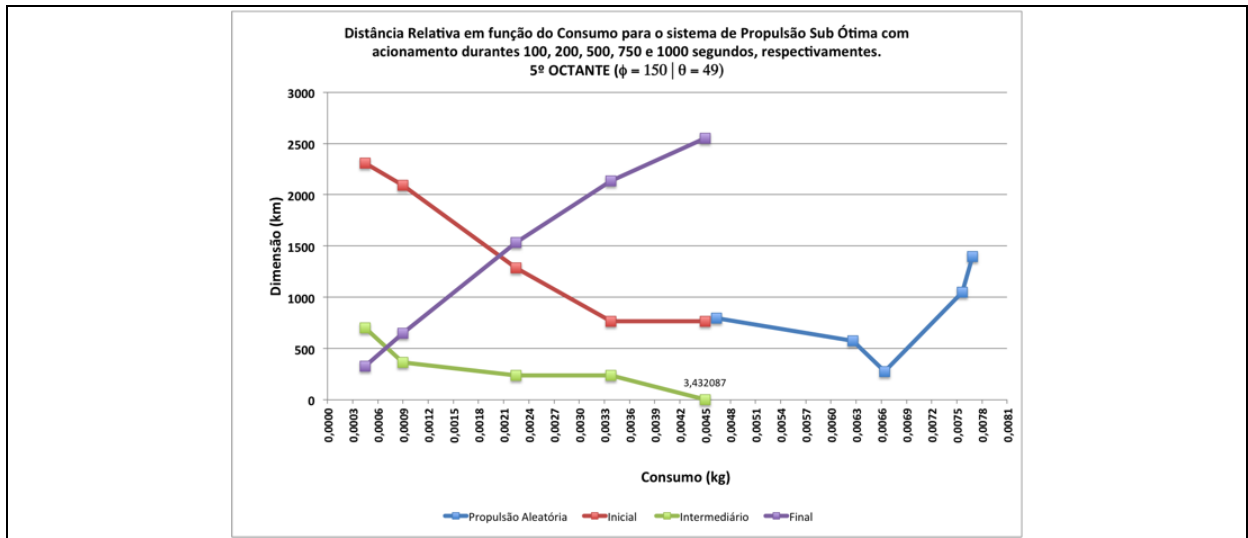


Figura 4.18 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 49^\circ$

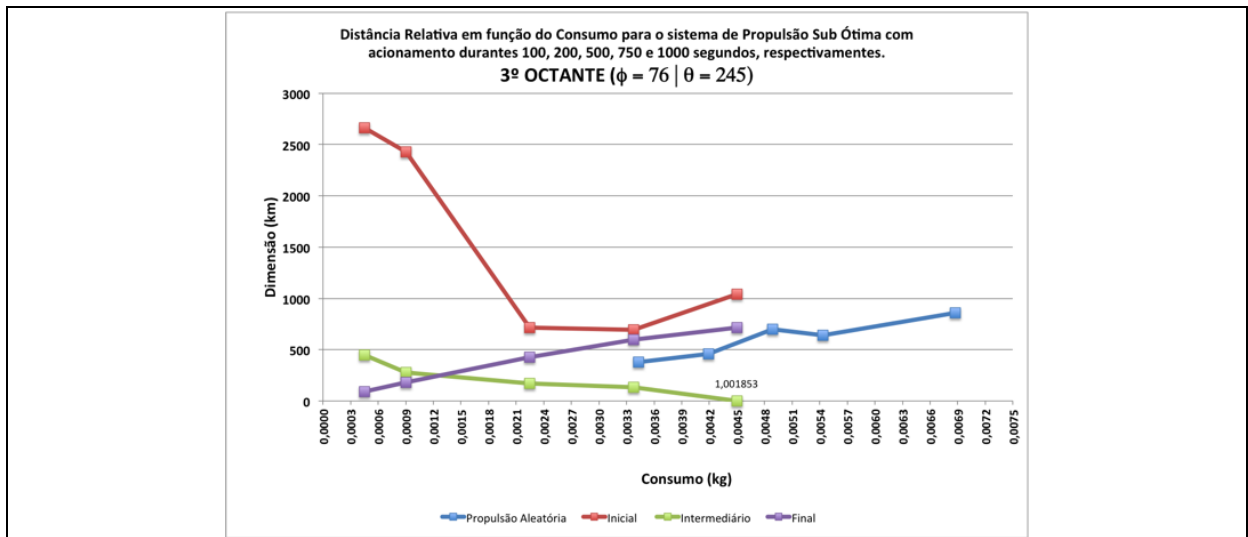


Figura 4.19 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 245^\circ$

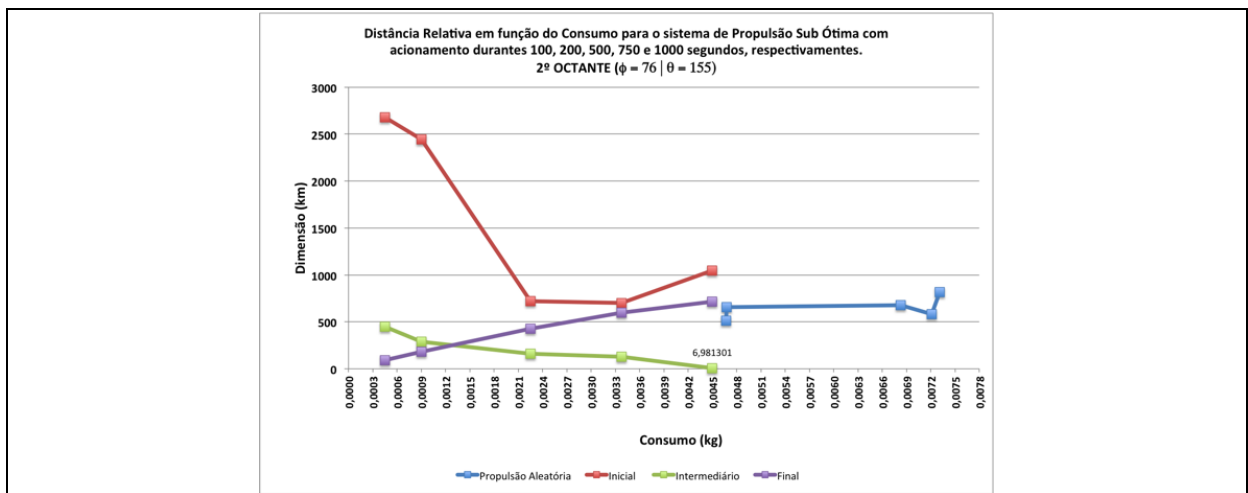


Figura 4.20 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 155^\circ$

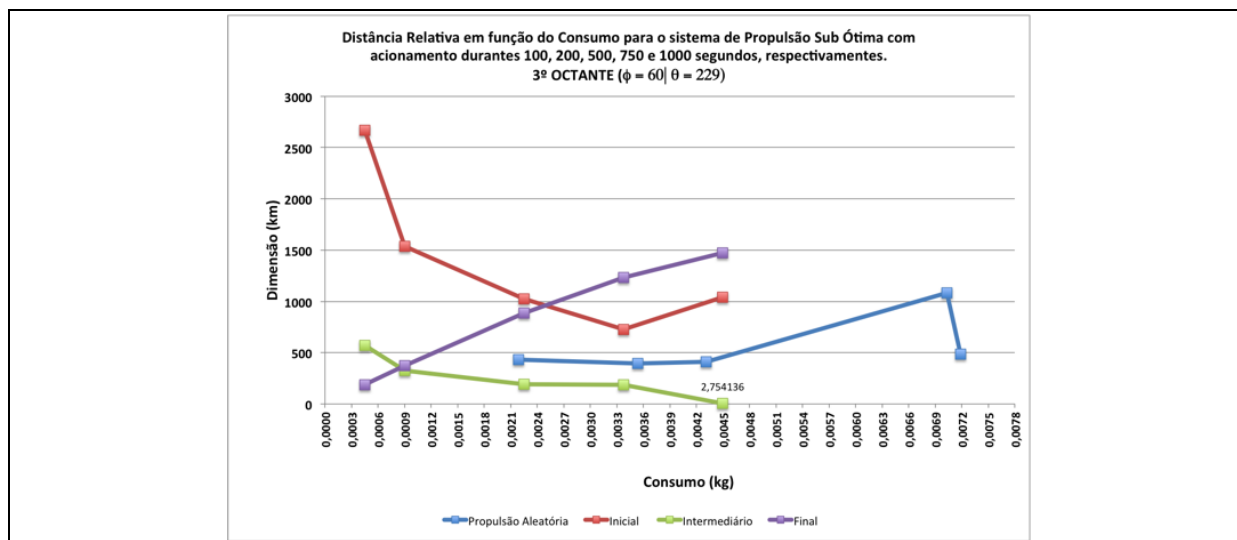


Figura 4.21 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 229^\circ$

Os resultados encontrados seguem um determinado padrão. Em todos os gráficos da propulsão inicial, assim como na propulsão final, a distância relativa tende a se manter na órbita nominal e conseguem fazer a manobra evasiva.

Do ponto de vista do consumo de combustível em relação ao tamanho do detrito, na propulsão inicial, à medida que aumentamos o tempo de acionamento da propulsão até 750 segundos, o veículo escapa de detritos menores. Entretanto, quando aumentamos o tempo de acionamento do sistema propulsor para 1.000 segundos, ou seja, aumentamos o consumo de combustível, há um crescimento no tamanho dos detritos dos quais o veículo poderá escapar.

Para a propulsão final, o tamanho do detrito é diretamente proporcional, quase linear, ao consumo de combustível, ou melhor, ao tempo de acionamento do sistema propulsor. Este comportamento é encontrado em todos os casos. Na propulsão intermediária, quando acionamos o sistema propulsor no meio da trajetória, existe um comportamento peculiar. À medida que aumentamos o tempo da propulsão, um pico de proximidade entre os objetos colisionais vai se formando, destacando-se para o caso de 1.000 segundos de propulsão acionada, quando os objetos ficam muito próximos, entre um e dois quilômetros, por volta dos 1.500 e 1.700 segundos da trajetória. Depois voltam a se afastar. Já na estratégia da propulsão aleatória, a distância entre o veículo e o detrito espacial tende a aumentar, enquanto o propulsor está ligado e se aproximar quando estão sob o efeito apenas da força gravitacional. Mas, os objetos se afastam mais do que se aproximam, logo, no final da trajetória, há uma enorme distância relativa, dando a entender que o veículo saiu da sua órbita nominal e não conseguiu mais retornar. Do ponto de vista do consumo de combustível em relação ao tamanho do detrito, esta estratégia não é a mais econômica, mas, entre as encontradas, a mais econômica encontra-se no terceiro octante, para o par de ângulos $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 229^\circ$.

Com base nos resultados o octante considerado como o mais econômico entre todos é o terceiro para todas as estratégias, evitando colisão com detritos de tamanho na ordem de até 2,7 quilômetros, um tamanho que é bastante considerável, para o

padrão dos detritos catalogados pelas agências espaciais, conforme vimos no Capítulo 1 , mais especificamente, no item 1.2. Detritos Espaciais. A grande maioria dos detritos catalogados são na ordem de centímetros. Confira no Apêndice A todos os gráficos para os demais octantes e seus respectivos pares de ângulos, considerando o tamanho do detrito em relação ao consumo de combustível e a dinâmica relativa entre os corpos colisionais.

Capítulo 5

Considerações Finais

“O entendimento para aqueles que o possuem, é uma fonte de vida..”

-- Ellen G. White

5.1 Conclusão

Neste trabalho foram dadas contribuições para o estudo de manobras orbitais evasivas em ambientes de detritos espaciais, considerando as forças não gravitacionais de arrasto atmosférico e de propulsão. Os objetos colisionais (veículo e detrito) estão sujeitos à força gravitacional, o detrito à força de arrasto atmosférico e o veículo à força de propulsão. Os resultados preliminares, encontrados por [Jesus et al., 2012] foram confirmados com as nossas simulações. Mostramos como realizar uma manobra evasiva, quando a distância relativa entre os objetos (distância entre os seus centros) for menor que o tamanho do detrito em rota de colisão, de modo que o satélite permaneça em sua órbita nominal, utilizando o sistema de propulsão, a partir de escolha de parâmetros tecnológicos, tais como o fator de potência do motor (a frequência de ejeção dos gases do propelente), a velocidade de exaustão dos gases e o fator de massa (taxa entre a massa total do veículo e a massa inicial do combustível). Encontramos a solução numérica da dinâmica relativa entre o veículo operacional e o detrito espacial, considerando as forças gravitacional, arrasto atmosférico e propulsão. O efeito do arrasto atmosférico é o de afastar os objetos colisionais, além de favorecer a colisão entre eles para velocidades relativas muito elevadas. A força de propulsão retarda o efeito do arrasto atmosférico, mas ao longo da trajetória ela é vencida e o arrasto afasta os objetos. As condições iniciais favoráveis às colisões são redistribuídas para velocidades elevadas e para constante de desacoplamento, λ , menor. Neste trabalho, estabelecemos estratégias subótimas para realizar manobras evasivas mais econômicas do ponto de vista de consumo de combustível, frente a colisões com detritos espaciais de diversos tamanhos. Encontramos posições privilegiadas para os objetos colisionais no III Octante, tal que as manobras evasivas são eficientes e econômicas para escapar de detritos da ordem de até 91,5 km. Estas manobras evasivas subótimas ocorreram, principalmente, para queimas nos últimos 100 segundos de manobra.

Para os modelos com força de propulsão e também com propulsão e arrasto atmosférico encontramos uma solução semi-analítica, para o caso de densidade atmosférica constante. Neste caso, houve diferença na distância relativa final, mas ainda não foi suficiente para mudar o comportamento da trajetória relativa entre os objetos colisionais. Este fato se deve ao modelo da densidade atmosférica adotado neste trabalho.

5.2 Pesquisas Futuras

O tema Manobras Evasivas em ambiente de detritos espaciais é muito extenso e abriga muitas propostas de pesquisas em diversos níveis. A parte analítica ainda é carente de ser construída, quando forças não conservativas são acrescentadas na dinâmica e pretendemos estudar este mesmo fenômeno considerando força de arrasto atmosférico para densidade atmosférica não constante. O desafio matemático e computacional será significativo. Além disso, o que foi realizado neste trabalho considerou um ambiente apenas com um detrito espacial sobre o qual atuou a força de arrasto. Um problema mais completo precisa ser estudado, no qual o arrasto atua também sobre o satélite e ainda o ambiente ser constituído de uma nuvem de detritos espaciais. Portanto, um futuro trabalho pode ser realizado para criar um modelo mais completo da dinâmica relativa em ambiente de detritos espaciais, considerando mais forças não conservativas que podem ocorrer nas regiões operacionais (LEO, MEO e GEO), com modelo de densidade atmosférica mais preciso, visto que neste trabalho investigamos a dinâmica só em LEO e com densidade constante. Por outro lado, o modelo matemático da dinâmica relativa sob uma condição ótima do ponto de vista do consumo de combustível precisa ser deduzido e incorporado às equações do movimento dos corpos. Esta parte demandaria mais conhecimento em Teoria de Controle Ótimo que poderá proporcionar a obtenção de uma solução mais econômica.

Referências Bibliográficas

- [Barrar 1963] Barrar, R.B. (1963). Periodic Orbits near the Critical Inclination Angle. *Armed Services Technical Information Agency*, Janeiro.
- [Celestino et al. 2006] Celestino, C.C., Winter, O.C. e Prado, A.F.B.A. (2006). Manobras orbitais para evitar a colisão entre um veículo espacial com uma nuvem de detritos espaciais na região de GPS. *V Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações - DINCON*.
- [Clohessy e Wiltshire 1960] Clohessy, W.H. e Wiltshire, R.S. (1960). Terminal Guidance System for Satellite Rendezvous. *Journal of the Aerospace Sciences*, 653-659.
- [Cordelli et al. 1997] Cordelli, A., Farinella, P. e Rossi, A. (1997). The influence of the fragmentation threshold on the long term evolution of the orbital debris environment. *submitted to Elsevier Preprint*.
- [Curtis 2005] Curtis, H.D., (2005). *Orbital Mechanics for Engineering Students*. Elsevier Butterworth-Heinemann. 1st edition. Burlington.
- [Curtis 2010] Curtis, H.D., (2010). *Orbital Mechanics for Engineering Students*. Elsevier. 2nd edition. Flórida.
- [Davis et al. 1979] Davis, D.R., Chapman, C.R., Greenberg, R. e Harris, A.W. (1979). Collisional evolution of asteroids: Populations, rotations, and velocities. *Asteroids*, 528-557.
- [Davis et al. 1985] Davis, D.R., Chapman, C.R., Weidenschilling, S.J. e Greenberg, R. (1985). Collisional history of asteroids: Evidence from Vesta and the Hirayama families. *Icarus*, (62): 30-53.
- [Davis et al. 1989] Davis, D.R. et al. (1989). Asteroid collisional history: Effects on sizes and spins. *Asteroids II, edited by R. P. Binzel, T. G erels, and M. S. Matthews, University of Arizona Press, Tucson*, 805-826.
- [Davis et al. 1994] Davis, D.R., Ryan, E.V. e Farinella, P. (1994). Asteroid collisional evolution: Results from current scaling algoritms. *Planet Space Sci.*,(42): 599-610.
- [Doornbos et al. 2005] Doornbos, E., Klinkrad, H. e Visser, P. (2005). Atmospheric density calibration using satellite drag observations. *Advances in Space Research*,(36): 515-521.
- [ESA Space Debris Working Group 1998] ESA Space Debris Working Group, (1998). *Space Debris*. ESA SP-1109.
- [ESA 2015] ESA, E.S.A. (2015). *Space Debris*. [Online] Available at:

- http://www.esa.int/Our_Activities/Operations/Space_Debris/About_space_debris [Accessed 11 Junho 2015].
- [Farinella et al. 1992] Farinella, P. et al. (1992). Asteroid collisional evolution : An integrated model for the evolution of asteroid rotation rates. *Astron. Astrophys.*,(253): 604-614.
- [Felipe e Prado 2001] Felipe, G.d. e Prado, F.B.d.A. (2001). MANOBRAS DE RENDEZ-VOUS ENTRE ÓRBITAS KEPLERIANAS COM CONTROLE IMPULSIVO. *Revista SBA: CONTROLE & AUTOMAÇÃO*, 12.
- [Ferreira e Jesus 2014] Ferreira, J.S. e Jesus, A.D.C. (2014). *Manobras Evasivas em ambiente de Nuvem e de Detritos Espaciais e Fragmentação*. SEMIC. Feira de Santana: Probic UEFS.
- [Fujiwara et al. 1989] Fujiwara, A. et al. (1989). Experiments and scaling laws on catastrophic collisions. *Asteroids*, II(R.P. Binzel, T. Gehrels and M.S. Matthews (Univ.of Arizona Press)): 240-265.
- [Goddard 1919] Goddard, R.H. (1919). A method of reaching extreme altitudes. *Smithsonian Inst. Publish, Misc.*, 17[2].
- [Greenberg et al. 1978] Greenberg, R., Wacker, J.F., Hartmann, W.K. e Chapman, C.R. (1978). Planetesimals to planets: Numerical simulation of collisional evolution. *Icarus* ,(35): 1-26.
- [Green et al. 1992] Green, S., McCOurt, F.R.w. e Vesovic, V. (1992). Calculation of pressure broadened spectral line shapes including collisional transfer of intensity. *Status and Future Developments in Transport Properties*,(W.A. Wakeham, and A.S. Dickinson, Eds. Kluwer Academic): 257-283.
- [Guo et al. 2011] Guo, Y. et al. (2011). Maneuver Strategy of Evader considering Detection System. *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conferences* , August, Portland, Oregon. 08-11.
- [Hohmann 1925] Hohmann, G. (1925). Der Hallux valgus und die übrigen Zehenverkrümmungen. In: *Ergebnisse der Chirurgie und Orthopädie*. Springer Berlin Heidelberg, 308-376.
- [Humi e Carter 2002] Humi, M. e Carter, T. (2002). Rendezvous Equations in a Central-Force Field with Linear Drag. *Journal Guidance, Control and Dynamics*, 5(1).
- [Imado e Miwa 1986] Imado, F. e Miwa, S. (1986). Fighter Evasive Maneuvs Against Proportional Navigation Missile. *Journal Aircraft*, 23(11): November.
- [JAXA 2010] JAXA, J.A.E.A. (2010). *JAXA / JAXA History*. [Online] Available at: <http://global.jaxa.jp/about/history/index.html> [Accessed 27 Augustus 2015].
- [Jesus 1999] Jesus, A.D.C., (1999). *Análise Estatística de Manobras Orbitais com Propulsão Finita Sujeita a Erros no Vetor Empuxo*. Doctoral Thesis. INPE, São José dos Campos, São Paulo, Brasil.
- [Jesus 2008] Jesus, A.D.C.d. (2008). *Dinâmica Orbital em Ambiente de Detritos Espaciais*. Relatório Técnico-Científico.

- [Jesus 2008] Jesus, A.D.C. (2008). *Dinâmica Orbital em Ambiente de Detritos Espaciais. Relatório Técnico*. Brasil: CNPq, PDE 200717/2006-5 (01/11/2006 a 31/10/2007).
- [Jesus et al. 2014] Jesus, A.D.C., Prado, A.F.B.A., Santos, F.B.M. e Souza, M.L.E. (2014). Study of the Nonimpulsive Orbital Maneuvers Feasibility through the Fuel Consumption and of the Thruster Power. *Advances in Space Dynamics*, 4(1): 201-212.
- [Jesus et al. 2012] Jesus, A.D., Ribeiro, R.S., Rossi, A. e Vieira Neto, E. (2012). Evasive maneuvers in space debris environment and technological parameters. *Mathematical Problems in Engineering*.
- [Jesus et al. 2015] Jesus, A.D.C., Sousa, R.R. e Neto, E.V. (2015). Evasive Maneuvers in Route Collision with Space Debris Cloud. *Journal Physics: Conference Series*,(641): 1-7.
- [Jesus e Teles 2007] Jesus, A.D.C. e Teles, N.T. (2007). Rendezvous Maneuvers under Thrust Deviations and Mass Variation. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 279 - 288.
- [Jung et al. 2003] Jung, B., Kim, K.S. e Kim, Y. (2003). Guidance law for Evasive Aircraft Maneuvers. *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*, August, Austin, Texas (AIAA 2003-5552) (DOI: 10.2514 6. 2003 5552). 11-14.
- [Kessler 1991] Kessler, D.J. (1991). Collision cascading: Limits of population growth in low Earth orbit. *Adv. Space Res*, 11(12): 63-66.
- [Kessler e Cour-Palais 1978] Kessler, D.J. e Cour-Palais, B.G. (1978). Collision frequency of artificial satellite: The creation of a debris belt. *J. Geophys. Res.*,(83): 2637-2646.
- [Kessler et al. 1989] Kessler, D.J., Robert, C.R. e Phillip, D.A.-M. (1989). Orbital debris environment for spacecraft designed to operate in low Earth orbit. *NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION WASHINGTON DC*,(NASA-TM-100-471.).
- [Kuga et al. 2000] Kuga, H.K., Rao, K.R. e Carrara, V. (2000). Satélites Artificiais– Movimento Orbital. *Apostila do INPE*.
- [Leonard 1986] Leonard, C.L. (1986). *Formationkeeping of spacecraft via differential drag*. MS Thesis Draper. MA: (Charles Stark) Lab. Inc. Cambridge.
- [Leonard et al. 1989] Leonard, C., Hollister, W. e Bergmann, E. (1989). Orbital formationkeeping with differential drag. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 12(1): 108-113.
- [NASA 2015] NASA (2015). *NASA - NSSDC - Spacecraft - Details*. [Online] Available at: <http://nssdc.gsfc.nasa.gov/nmc/spacecraftDisplay.do?id=1998-067A> [Accessed 14 Junho 2015].
- [NASA 2015] NASA (2015). *Orbital Debris Quarterly News*. [PDF] Available at: <http://orbitaldebris.jsc.nasa.gov/newsletter/pdfs/ODQNv19i1.pdf> [Accessed 13 Junho 2015].

- [NASA 2015] NASA, N.A.a.S.A. (2015). *What is Orbital Debris?* [Online] Available at: <http://www.nasa.gov/audience/forstudents/k-4/stories/what-is-orbital-debris-k4.html#.VXnSpUaLVZg> [Accessed 11 June 2015].
- [Petit e Farinella 1993] Petit, J.M. e Farinella, P., (1993). *Celest Mech.*
- [Pôssa e Ferreira, 2009] Pôssa, G.C. e Ferreira, J.L. (2009). Desenvolvimento de um Sistema de Detecção de Instabilidades de Plasma para um Propulsor a Plasma tipo Hall. *Tese de Mestrado, UNB.*
- [Prado e Broucke 1996] Prado, A.D.A. e Broucke, R. (1996). Transfer orbits in the Earth-Moon system using a regularized model. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 19(4): 929-933.
- [Press et al. 1992] Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T. e Flannery, B.P., (1992). *Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing.* CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. 2nd edition. New York.
- [Raimundo et al. 2003] Raimundo, P.C.P., Kuga, H.K. e Moraes, R.V.d. (2003). Órbitas Congeladas: Efeito do Arrasto Atmosférico. *Série Arquimedes. Anais do DINCON*, 2: 888-897.
- [Rossi et al. 1994] Rossi, A., Cordelli, A., Farinella, P. e Anselmo, L. (1994). Collisional evolution of the Earth's orbital debris cloud. *J. Geophys. Res.*, 99(23): 23.195-210.
- [Saad et al. 2008] Saad, A.N., Ismail, M.N. e Khalil, K.H.I. (2008). Decay of orbits due to the drag of rotation oblate atmosphere. *Planetary and Space Science*, (56): 537-541.
- [Schweighart 2002] Schweighart, S.A.a.R.J.S. (2002). Cross-Track Motion of Satellite Formations. *IEEE 02-428, IEEE 2002 Aerospace Conference, Big Sky, MT, March.*
- [Shinar e Steiberg 1997] Shinar, J. e Steiberg, D. (1997). Analysis of Optimal Maneuvers based on linearized two-dimensional kinematic model. *Journal of Aircraft. vol. 1, n° 8*, 795-802 (DOI: 10.2514 3.58855).
- [Smirnova et al. 2010] Smirnova, M.N., Kondrat'ev, K.N. e Smirnov, N.N. (2010). Space debris fragments impact on containments filled with Two-Phase Fluid. *IAC-11-A6.3.20.*
- [Sousa 2013] Sousa, R.R.d. (2013). *Manobras Evasivas em Ambientes de Detritos Espaciais.* Monografia. Feira de Santana: Universidade Estadual de Feira de Santana.
- [Tsiolkovsky 1903] Tsiolkovsky, K.E. (1903). Exploration of the universe with reaction machines. *The Science Review*, 5.
- [Verhoef e Noomen 2002] Verhoef, T. e Noomen, R. (2002). SATELLITE DECAY COMPUTATION AND IMPACT POINT PREDICTION. *Advantage Space Research*, 313-319.
- [Well et al. 1982] Well, K.H., Faber, B. e Berget, E. (1982). Optinuzation of Tactical Aircraft Maneuvers utilizing High Angles at Attack. *Journal Guidance*, 5(2):

(AIAA 80-1596R).

[Wildhack 1958] Wildhack, W.A. (1958). Effect of Transverse Atmospheric Drag on Satellite Orbits. *Science*, 309-10.

[Winter e Prado 2007] Winter, O.C. e Prado, A.F.B.d.A., (2007). *A conquista do Espaço. Do Sputnik à Missão Centenário*. Livraria da Física. 1st edition. São Paulo.

Apêndice A

Propulsão Sub Ótima no 1º Octante

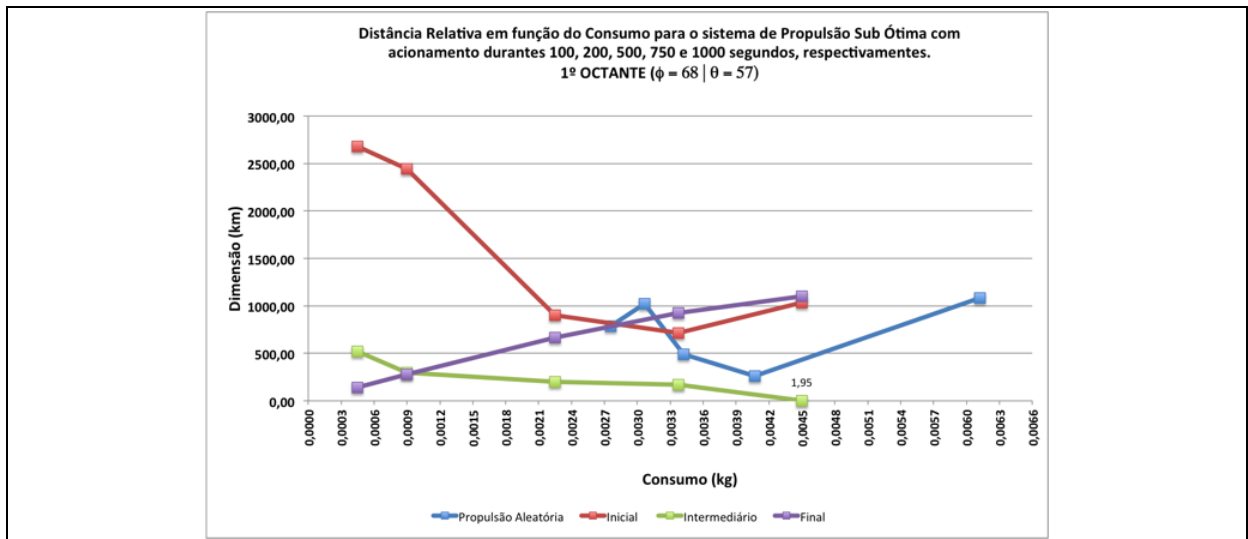


Figura A.5.1 Relação de Consumo para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 57^\circ$

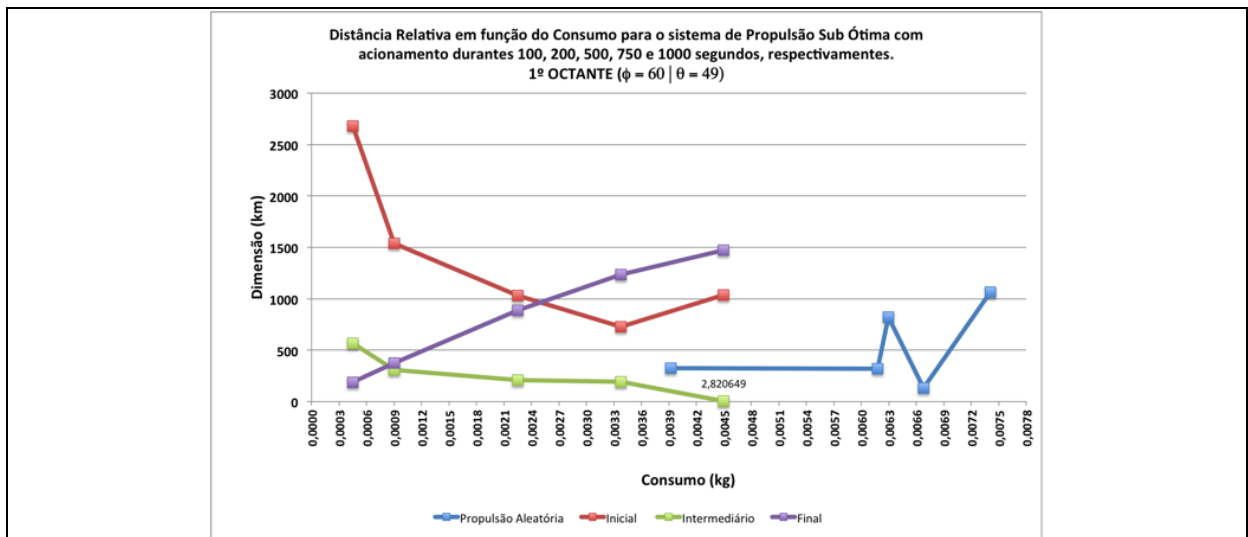


Figura A.5.2 Relação de Consumo para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 49^\circ$

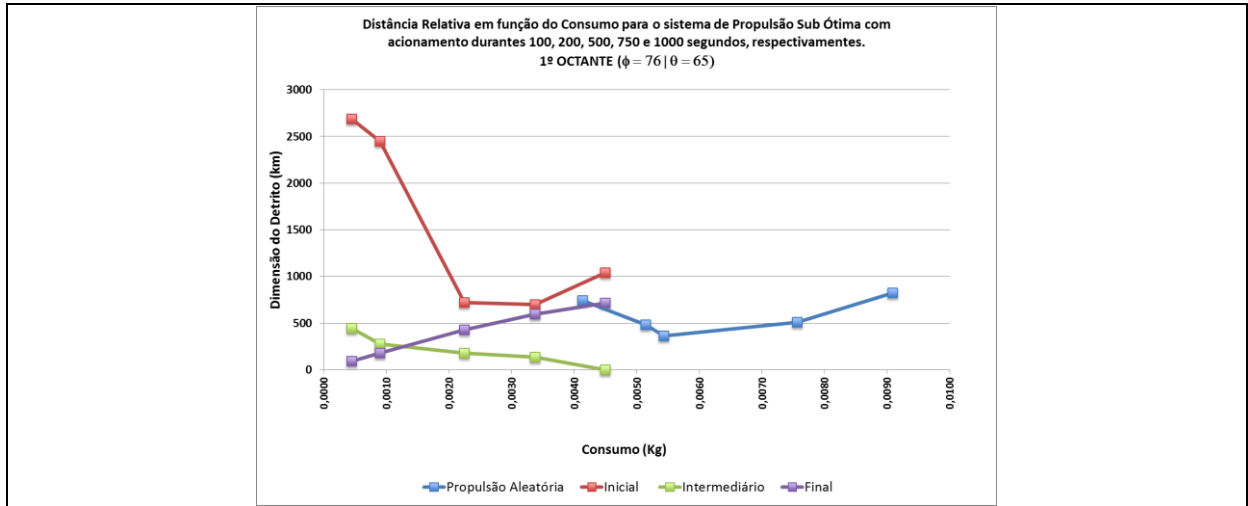


Figura A.5.3 Relação de Consumo para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 65^\circ$

Propulsão Sub Ótima para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 49^\circ$

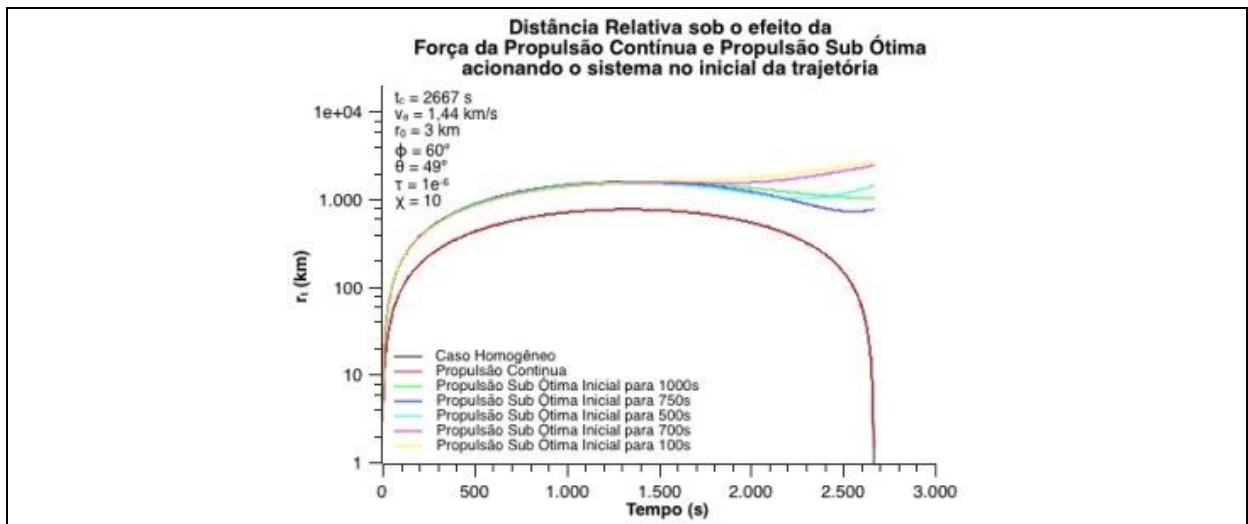


Figura A.5.4 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 49^\circ$

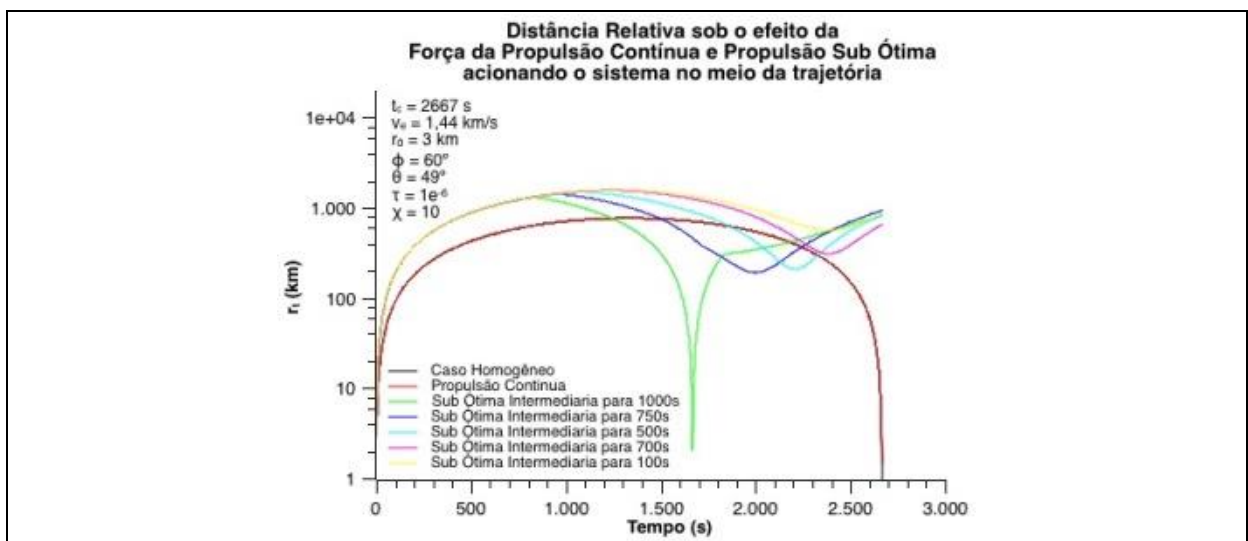


Figura A.5.5 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 49^\circ$

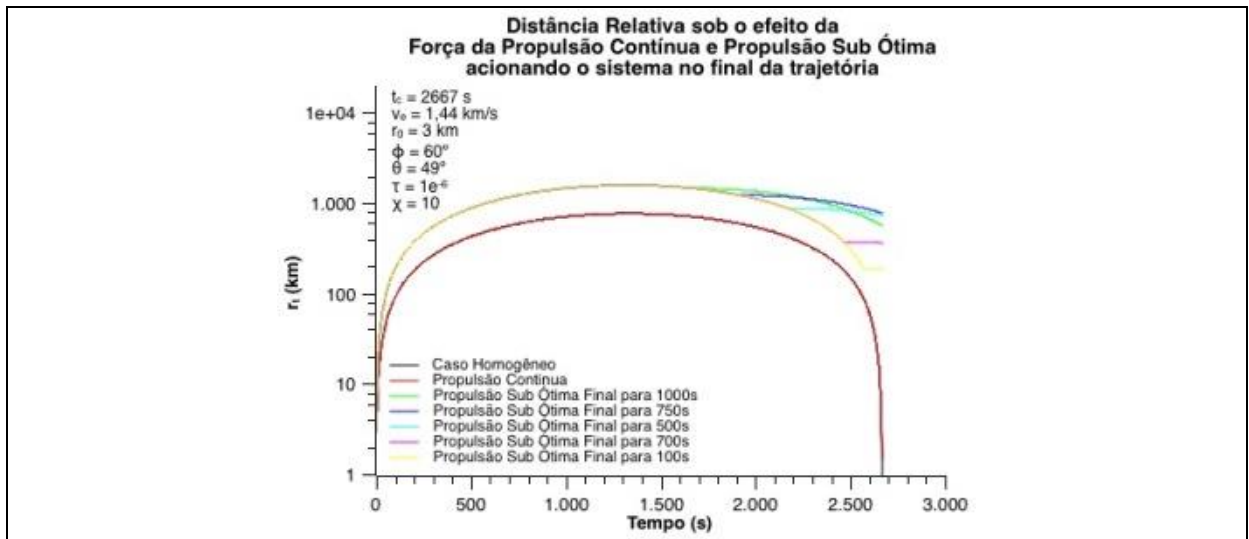


Figura A.5.6 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 49^\circ$

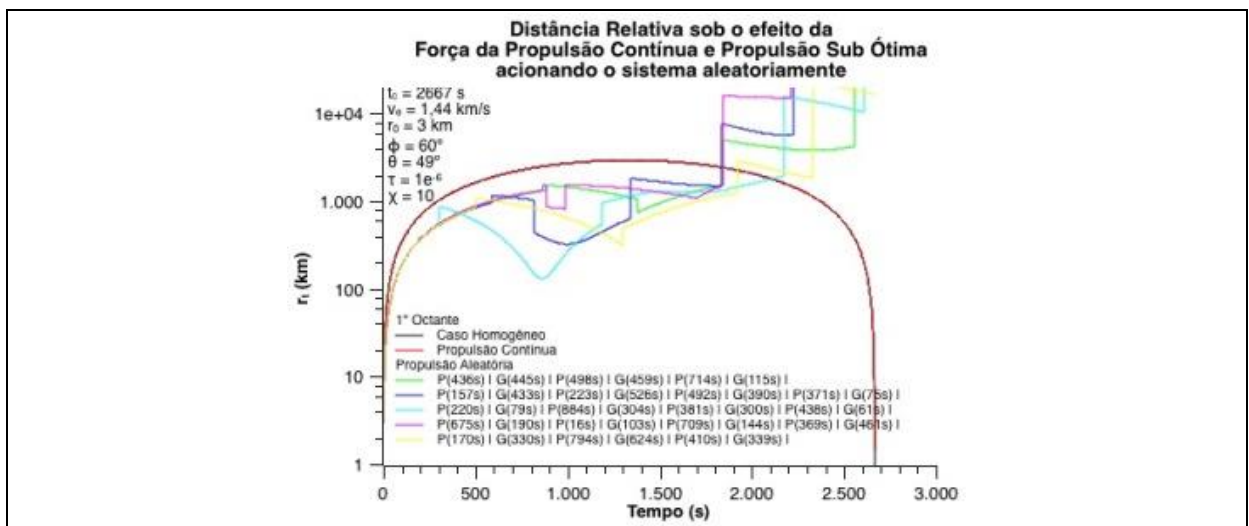


Figura A.5.7 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 49^\circ$

Propulsão Sub Ótima para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 57^\circ$

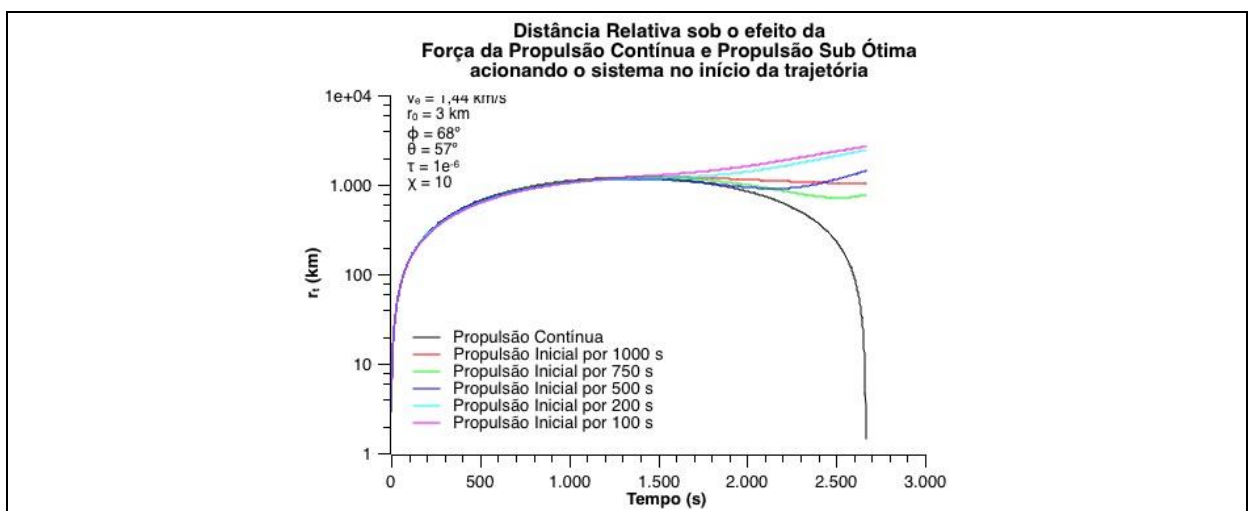


Figura A.5.8 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 57^\circ$

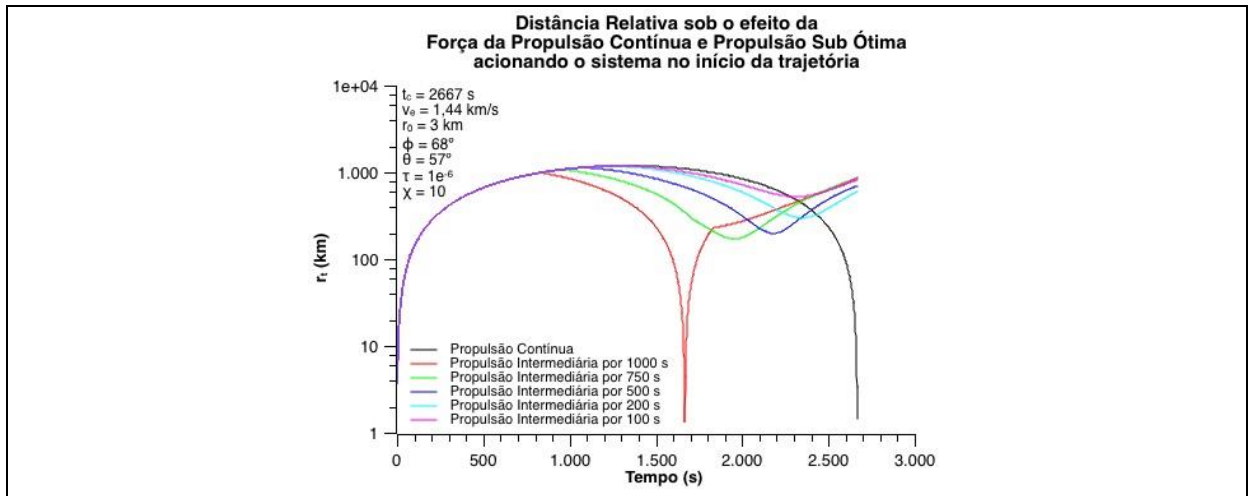


Figura A.5.9 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 57^\circ$

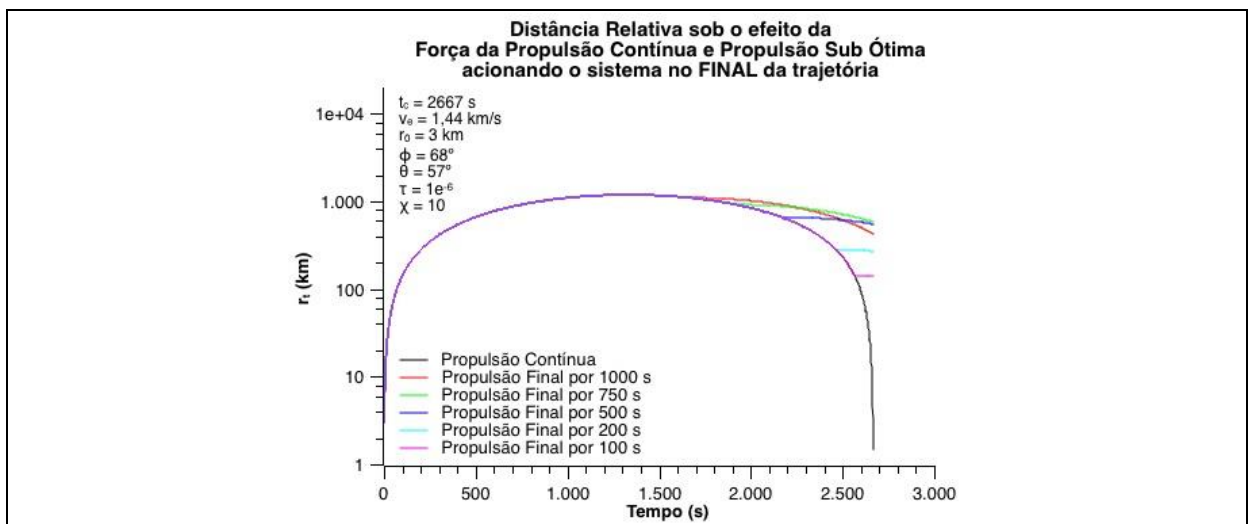


Figura A.5.10 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 57^\circ$

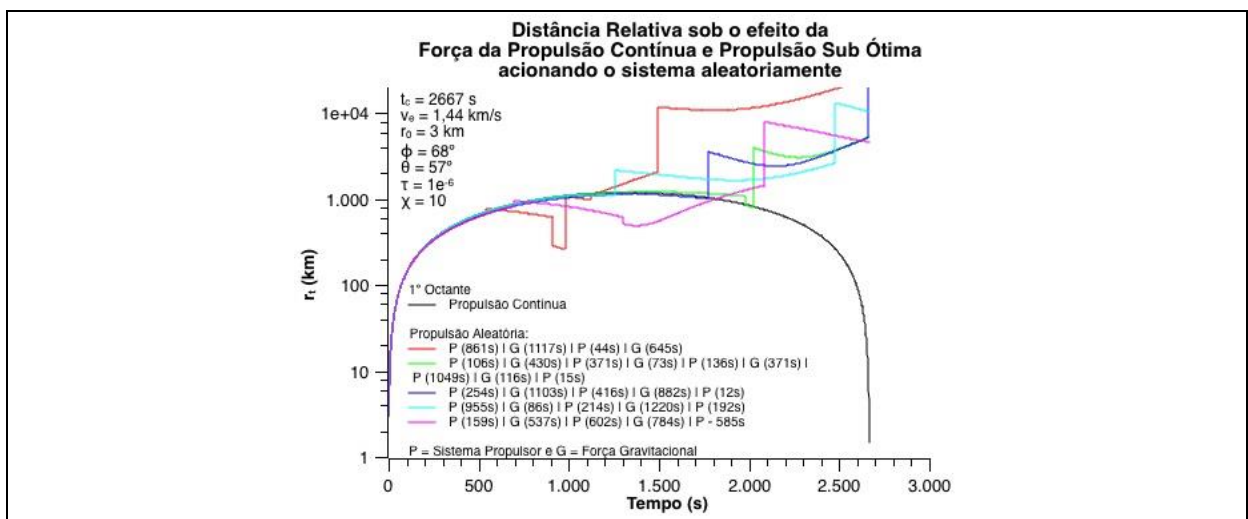


Figura A.5.11 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 57^\circ$

Propulsão Sub Ótima para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 65^\circ$

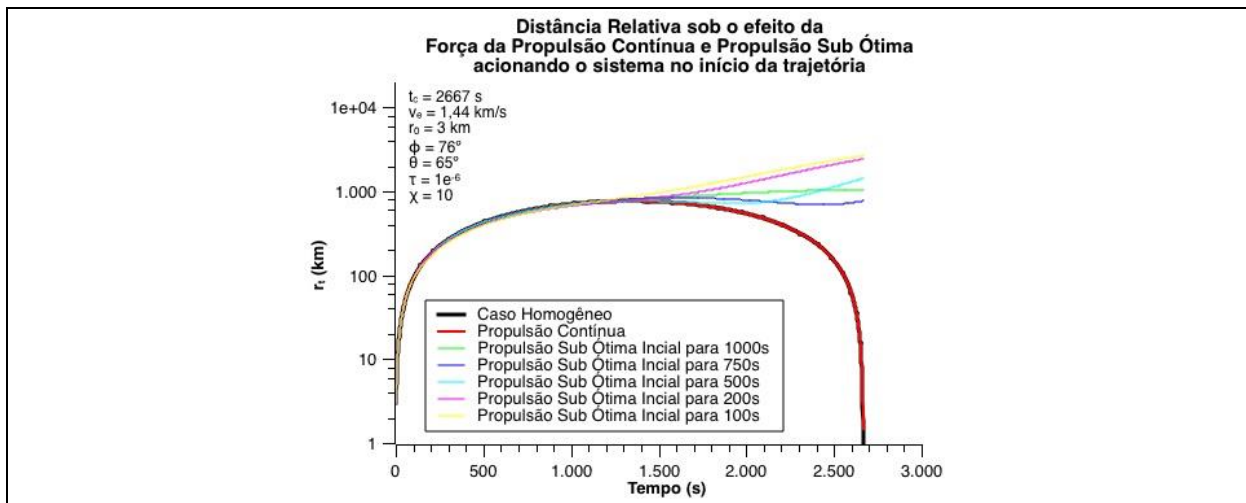


Figura A.5.12 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 65^\circ$

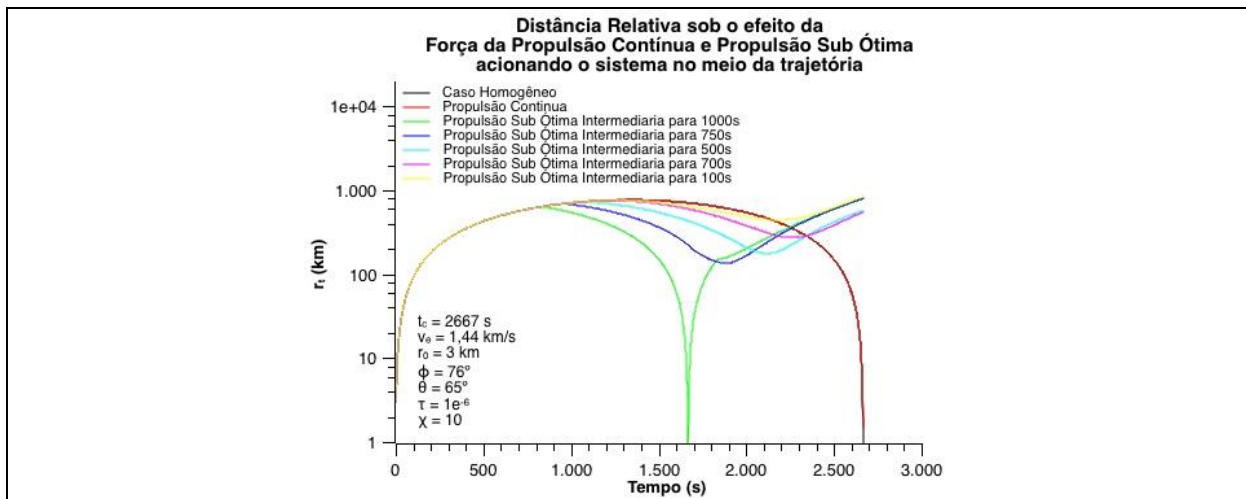


Figura A.5.13 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 65^\circ$

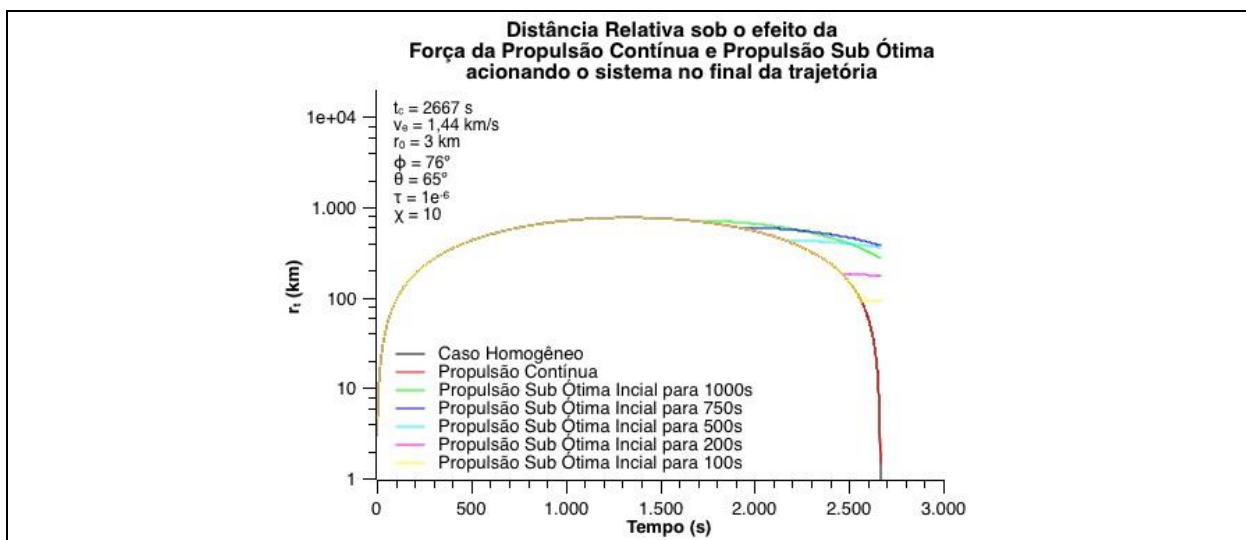


Figura A.5.14 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 65^\circ$

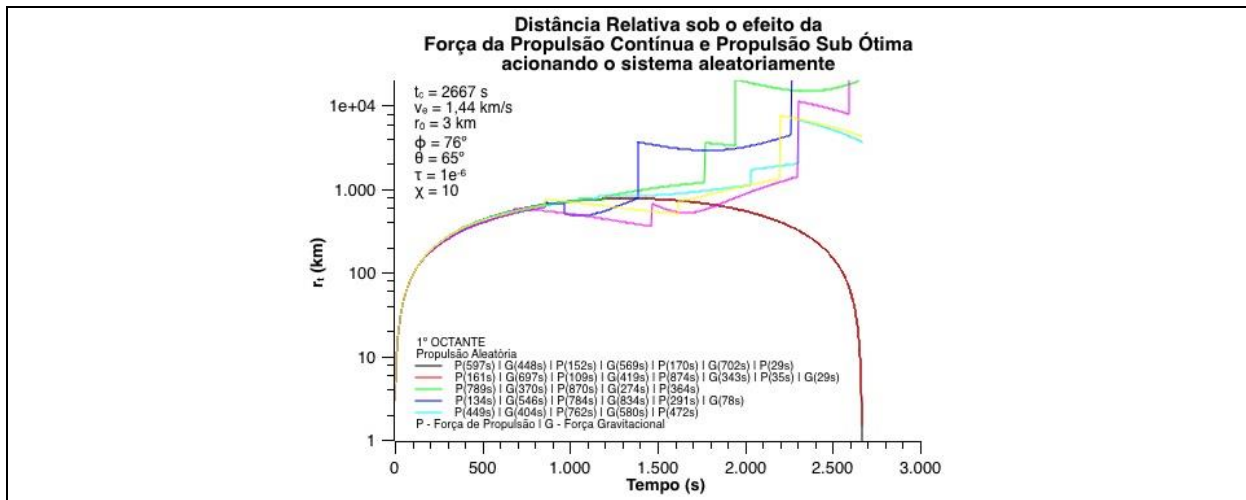


Figura A.5.15 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 65^\circ$

Propulsão Sub Ótima no 2º Octante

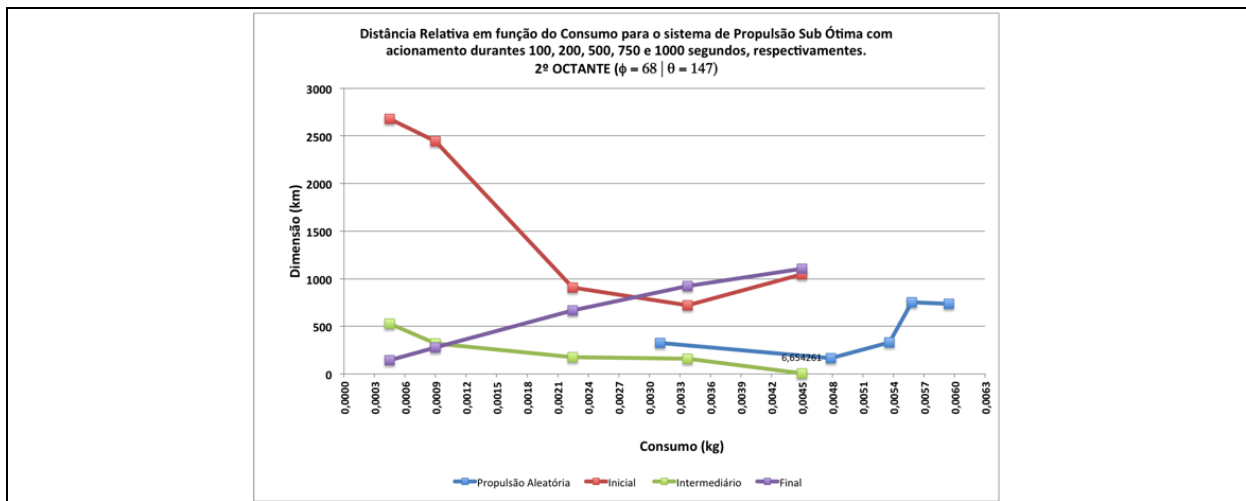


Figura A.5.16 Relação de Consumo para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 147^\circ$

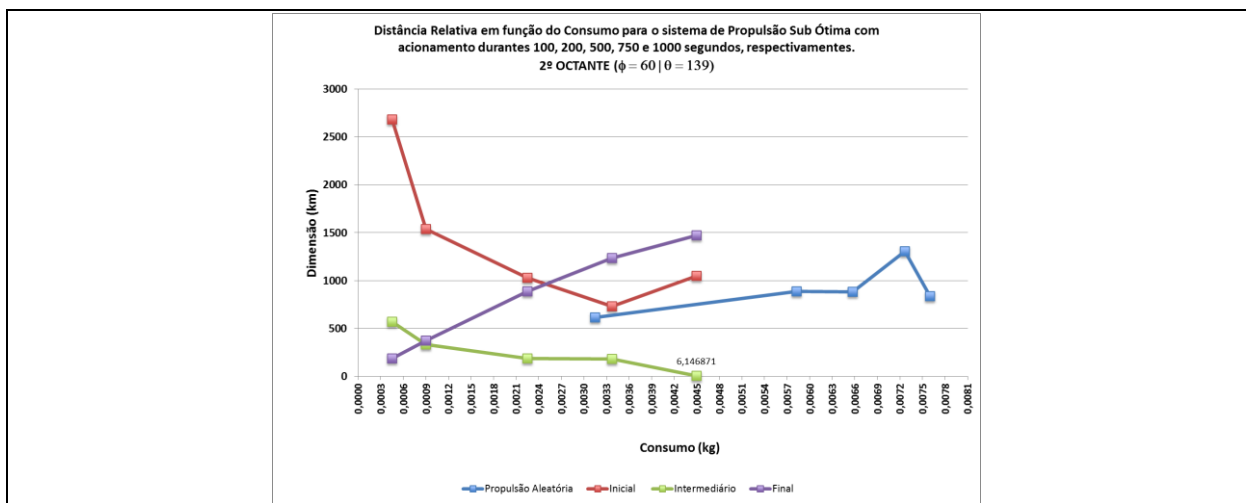


Figura A.5.17 Relação de Consumo para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 139^\circ$

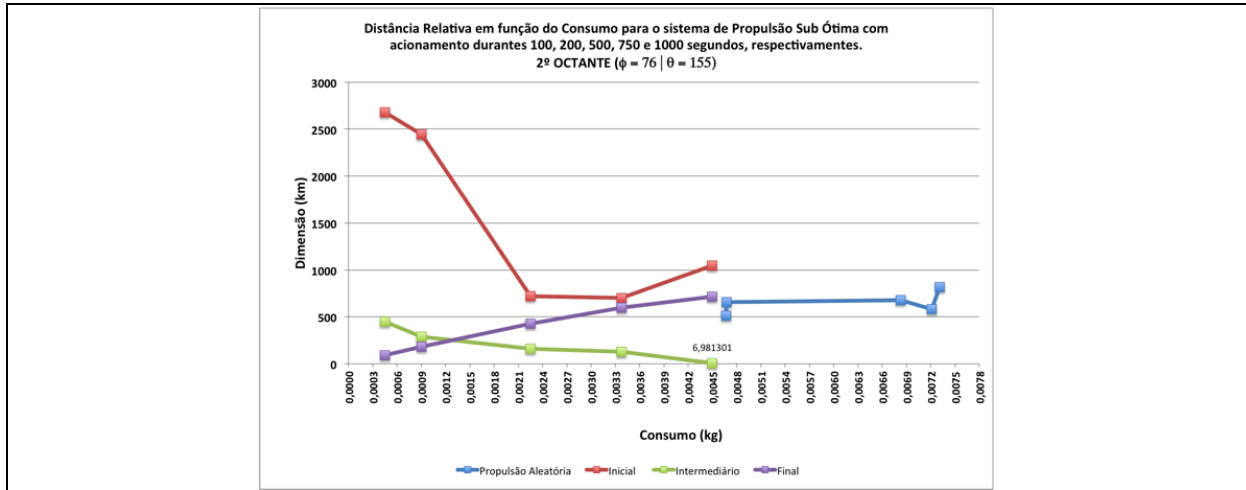


Figura A.5.18 Relação de Consumo para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 155^\circ$

Propulsão Sub Ótima para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 139^\circ$

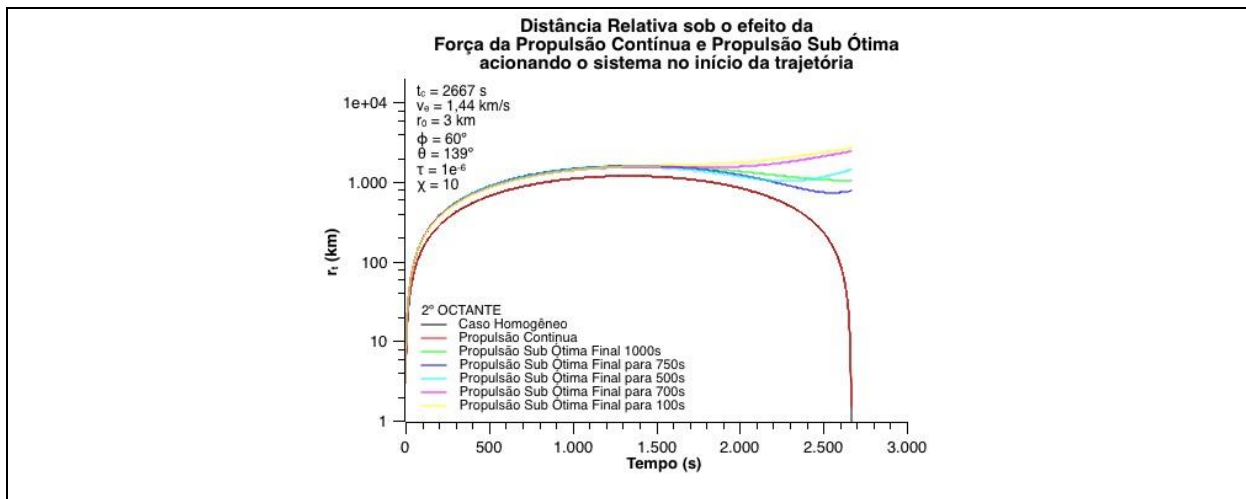


Figura A.5.19 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 139^\circ$

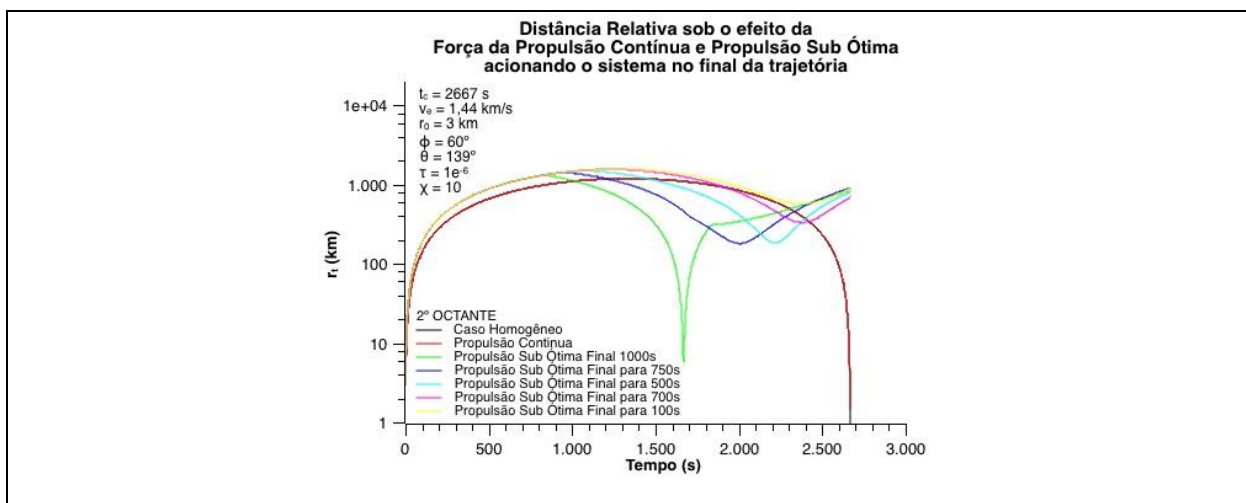


Figura A.5.20 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 139^\circ$

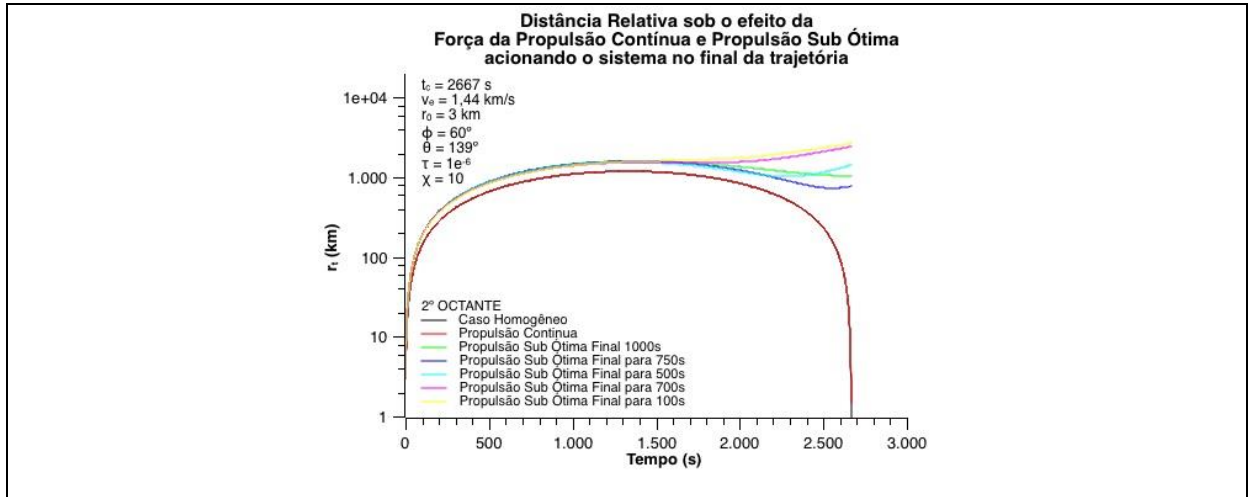


Figura A.5.21 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 139^\circ$

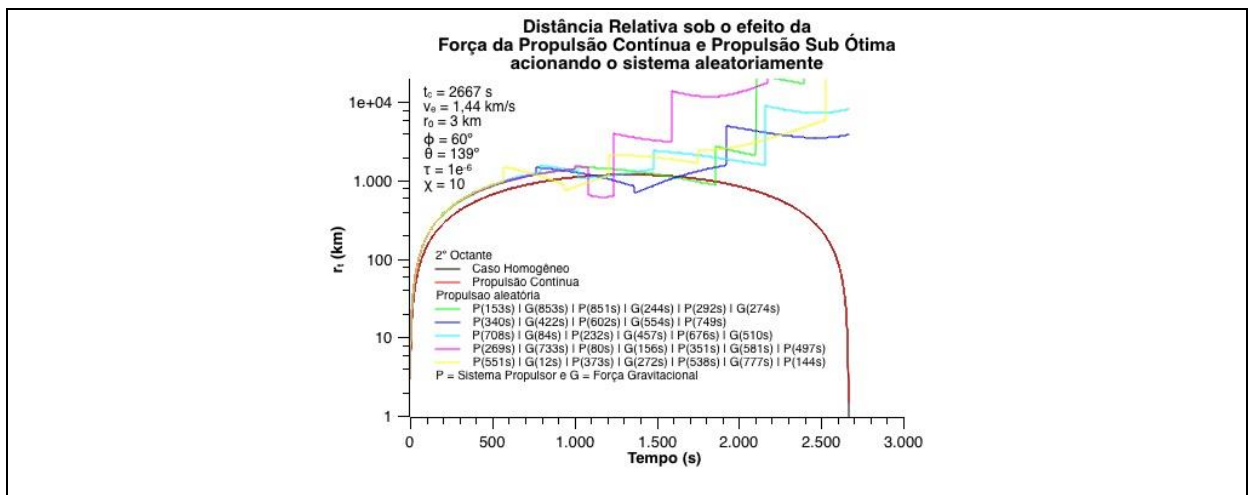


Figura A.5.22 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 139^\circ$

Propulsão Sub Ótima para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 147^\circ$

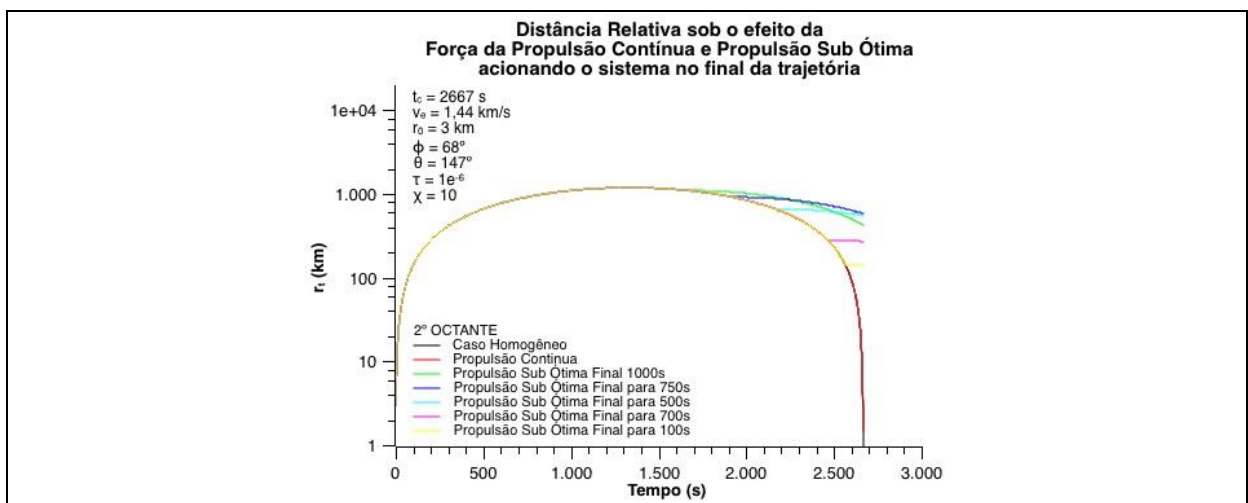


Figura A.5.23 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 147^\circ$

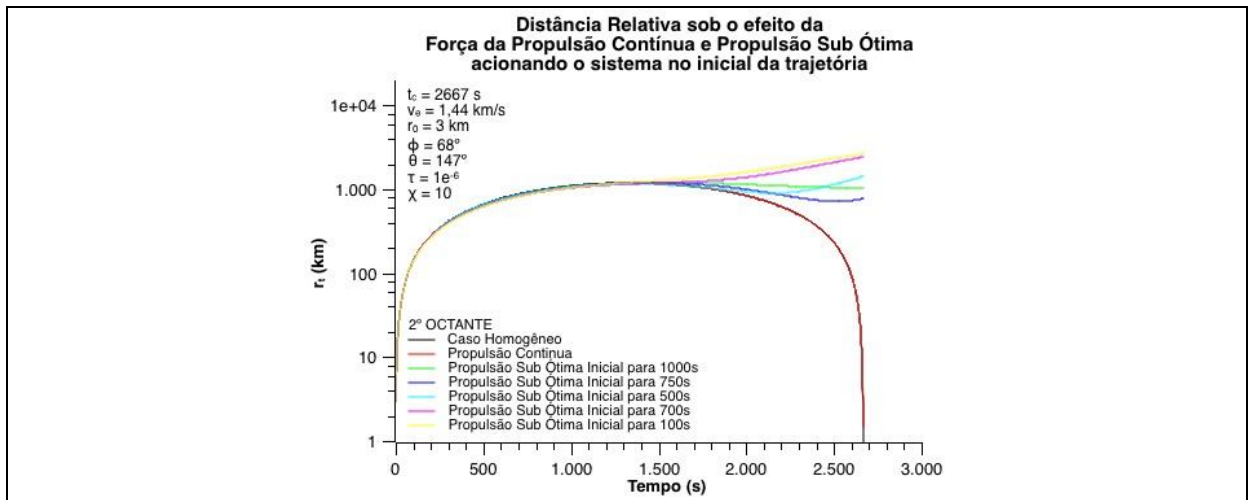


Figura A.5.24 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 147^\circ$

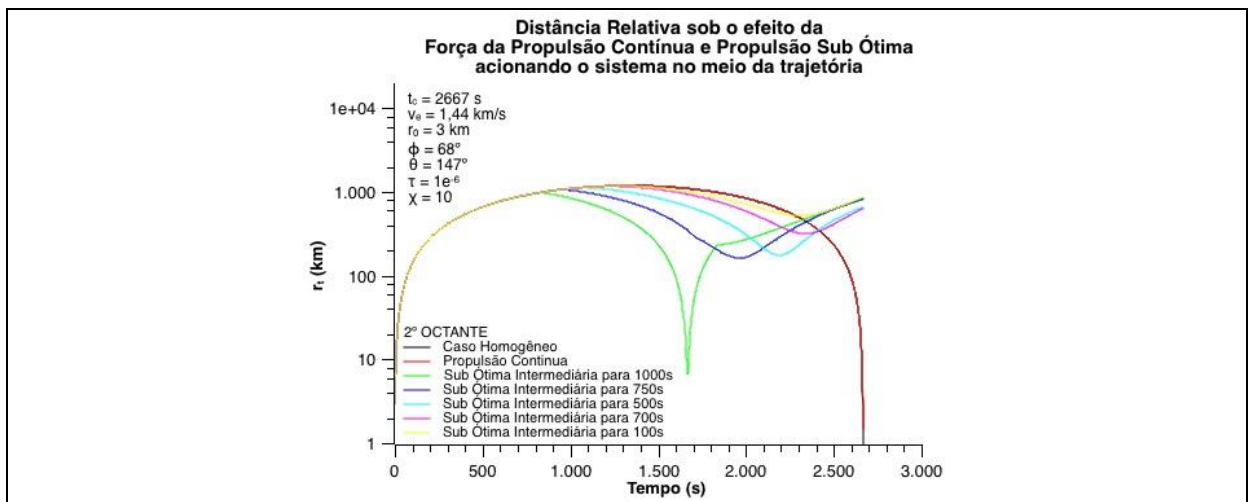


Figura A.5.25 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 147^\circ$

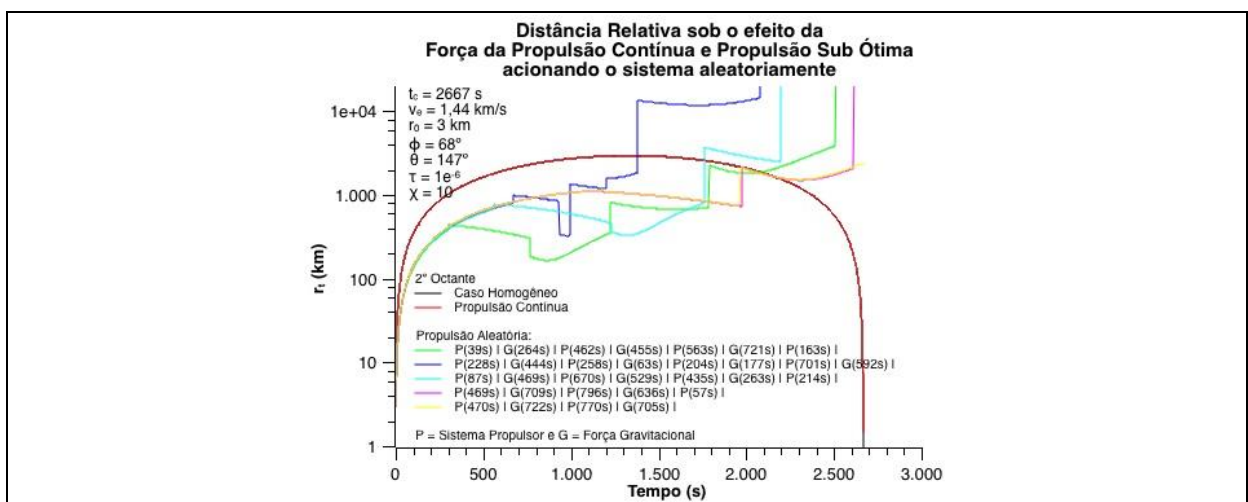


Figura A.5.26 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 147^\circ$

Propulsão Sub Ótima para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 155^\circ$

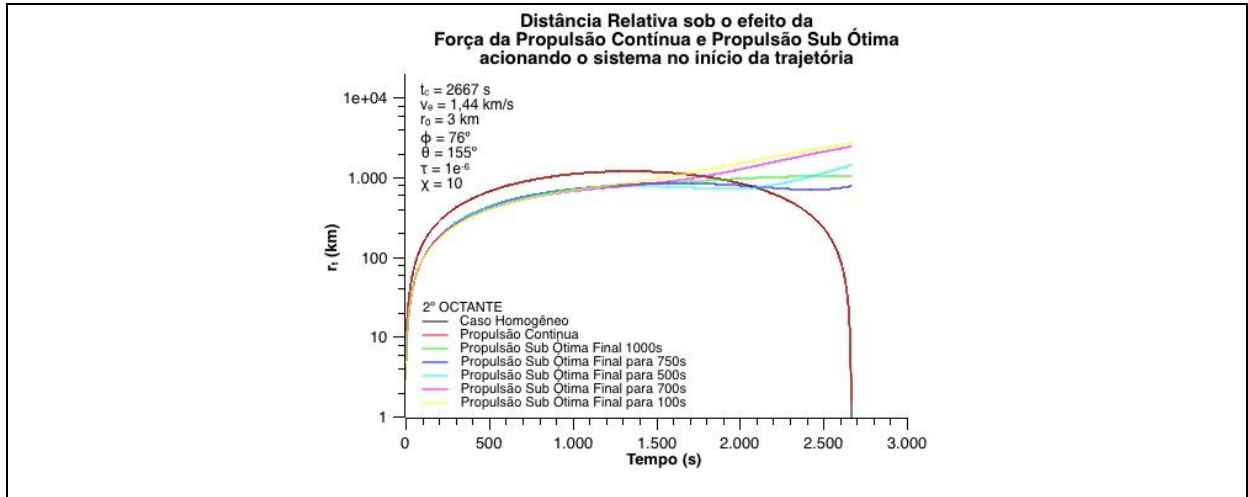


Figura A.5.27 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 155^\circ$

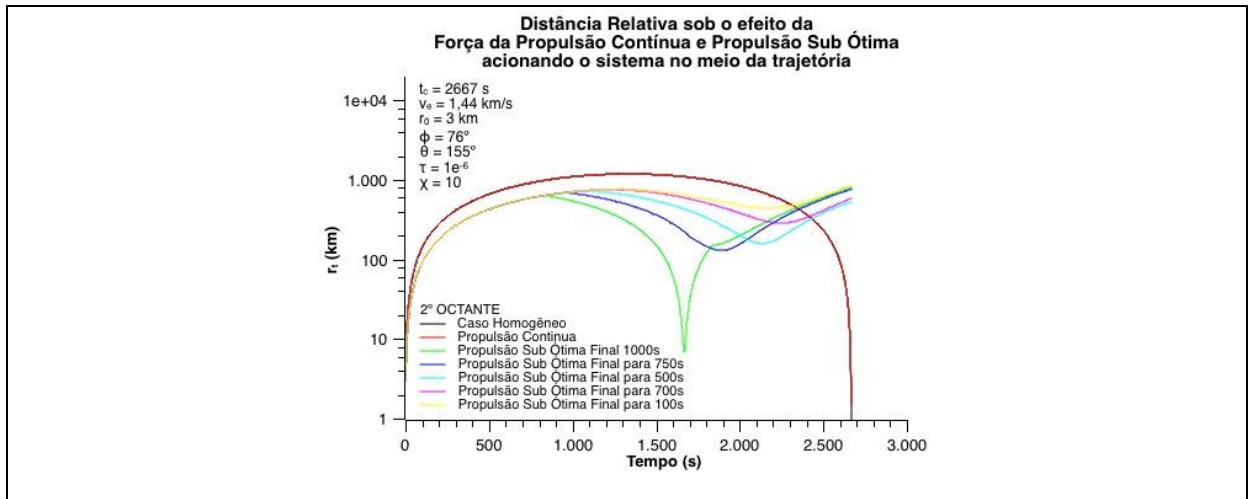


Figura A.5.28 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 155^\circ$

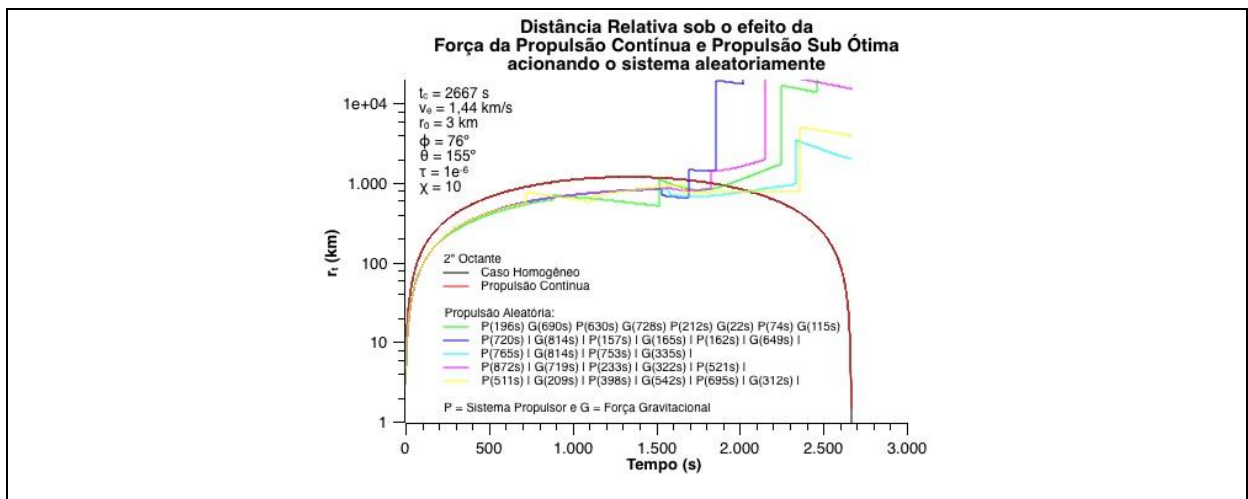


Figura A.5.29 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 155^\circ$

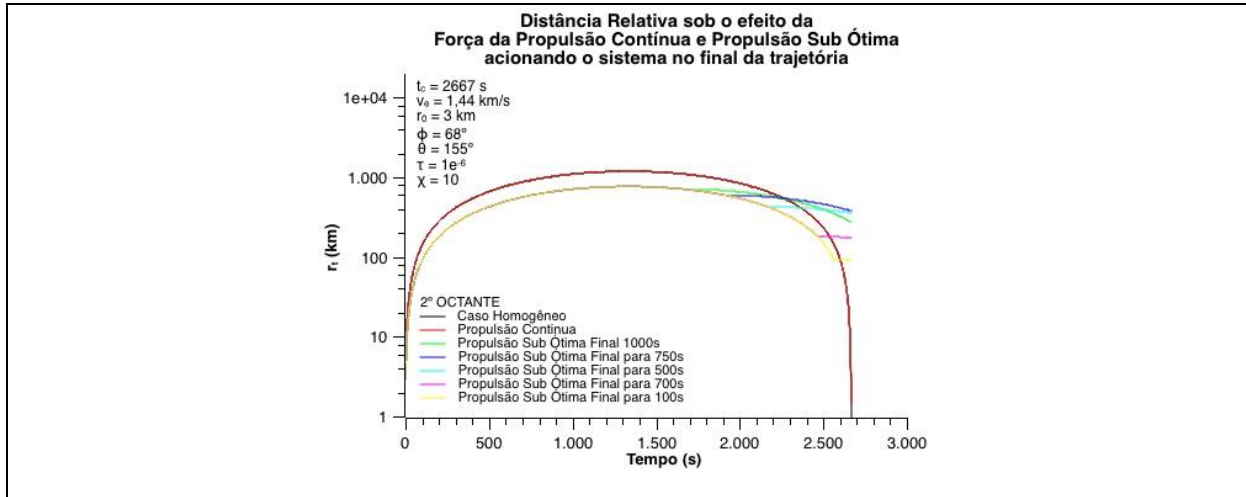


Figura A.5.30 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 155^\circ$

Propulsão Sub Ótima no 3º Octante

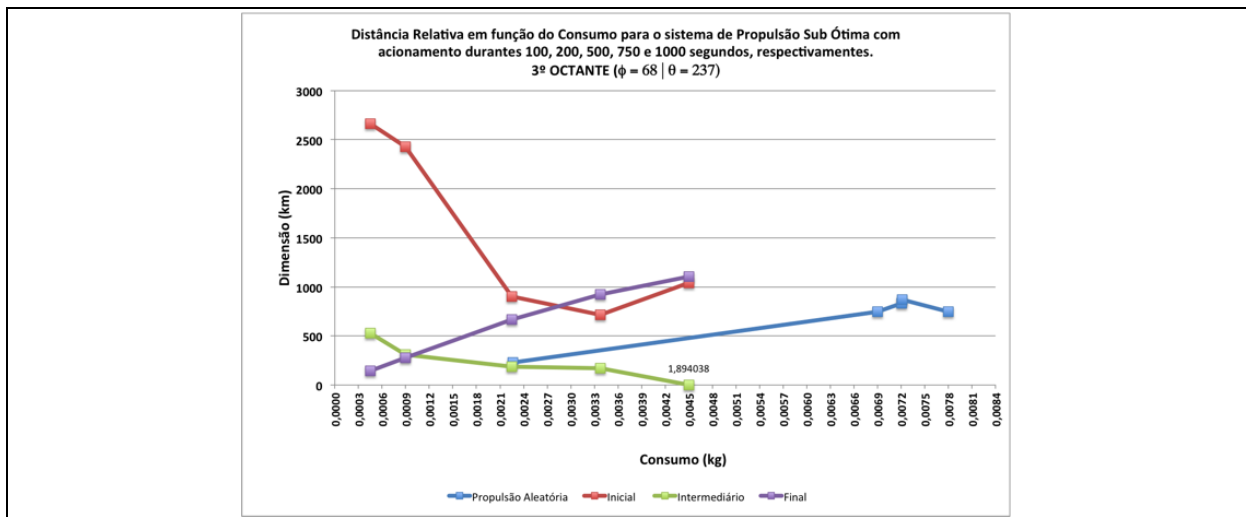


Figura A.5.31 Relação de Consumo para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 237^\circ$

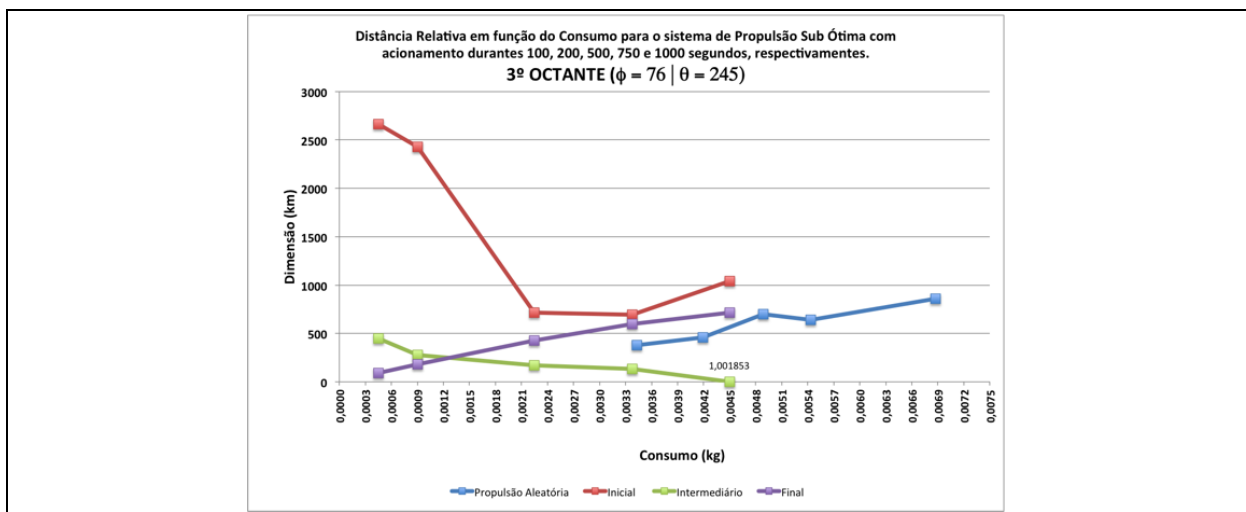


Figura A.5.32 Relação de Consumo para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 245^\circ$

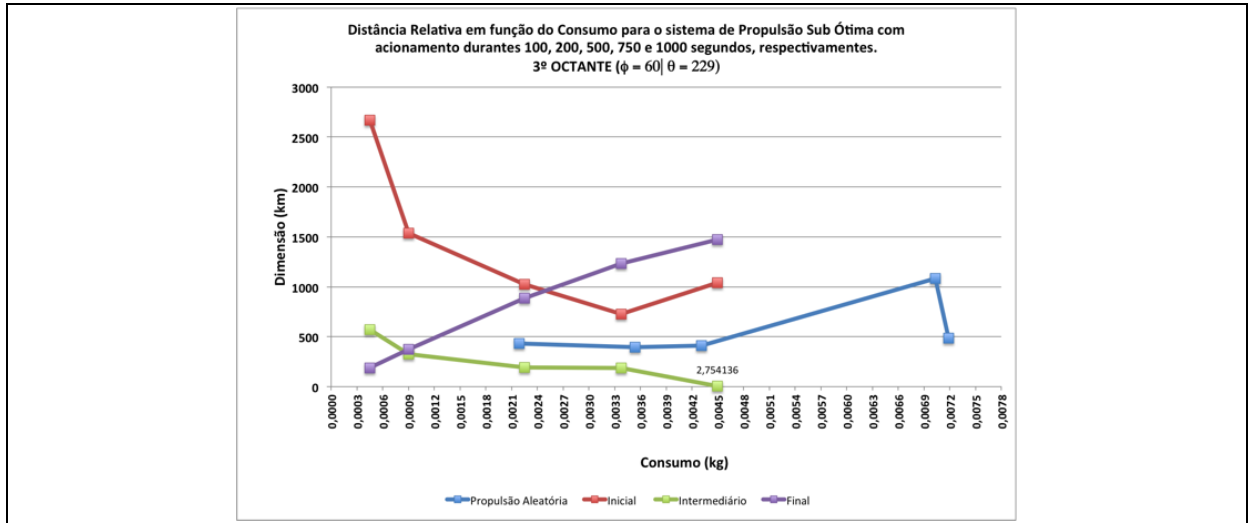


Figura A.5.33 Relação de Consumo para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 229^\circ$

Propulsão Sub Ótima para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 229^\circ$

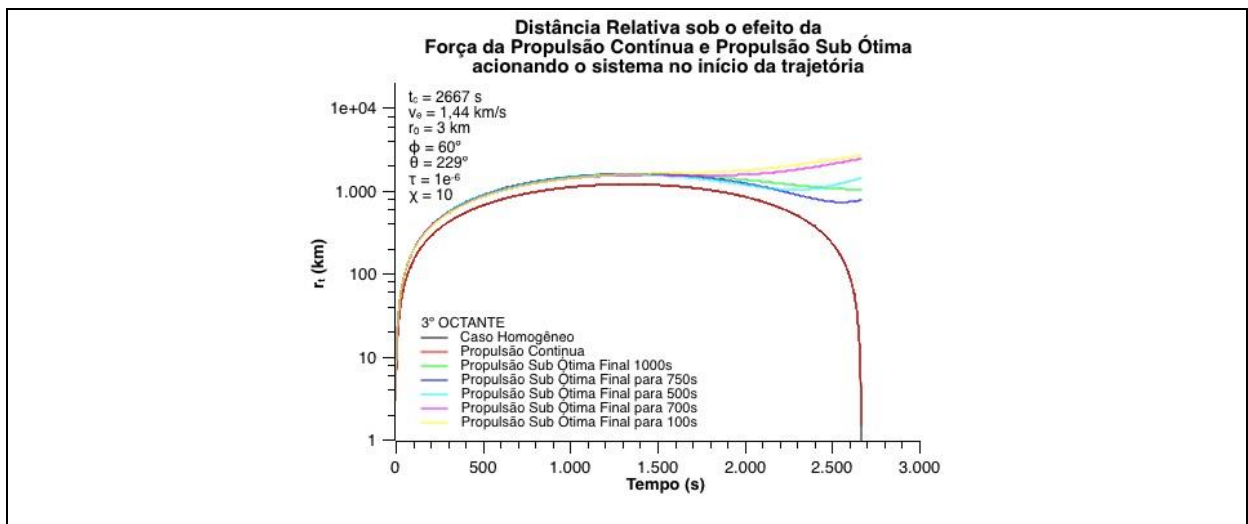


Figura A.5.34 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 229^\circ$

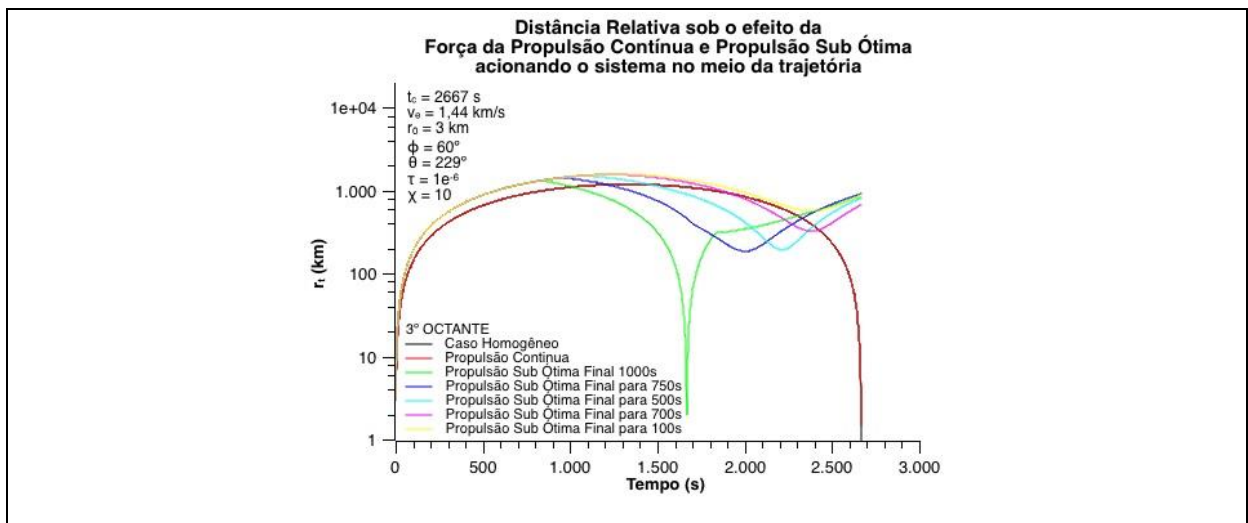


Figura A.5.35 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 229^\circ$

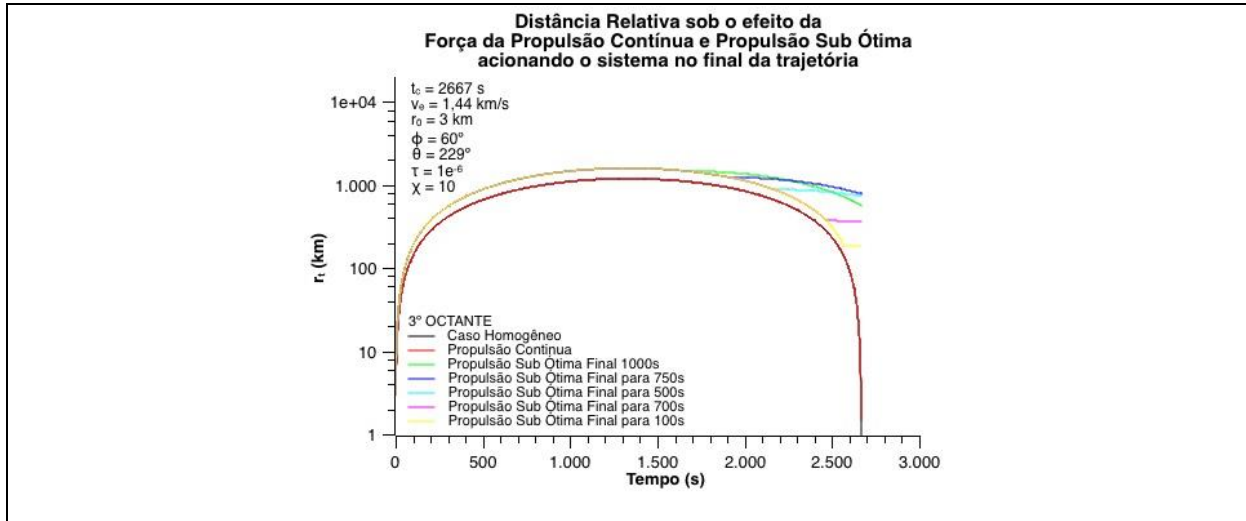


Figura A.5.36 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 229^\circ$

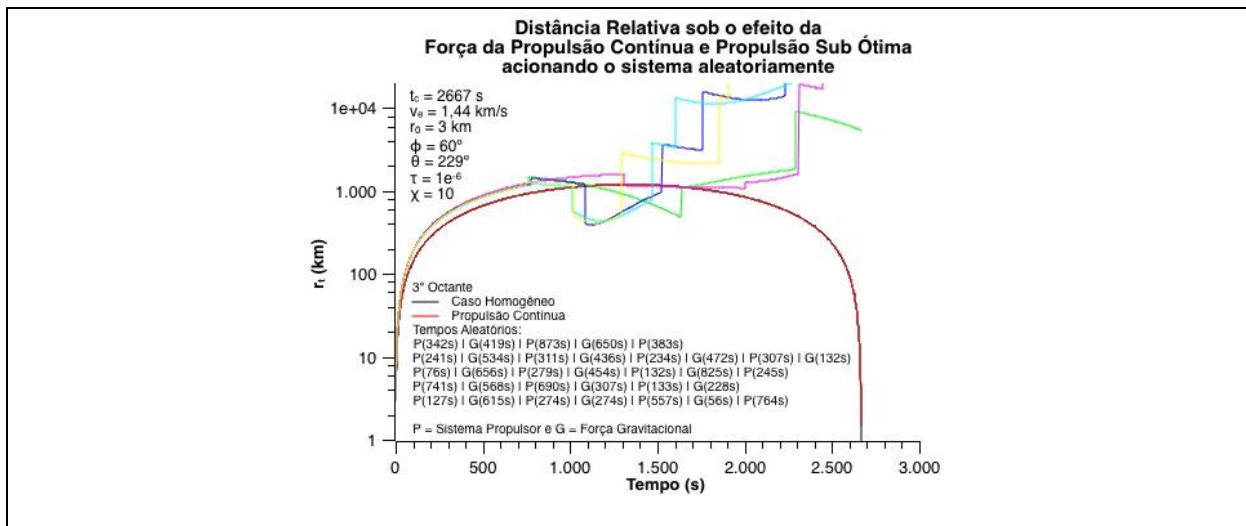


Figura A.5.37 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 229^\circ$

Propulsão Sub Ótima para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 237^\circ$

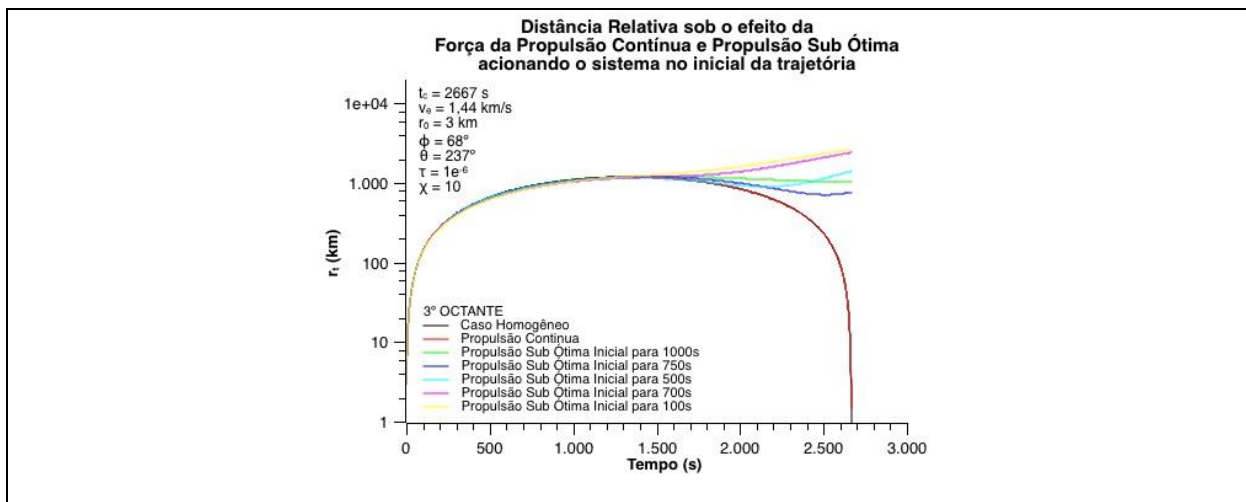


Figura A.5.38 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 237^\circ$

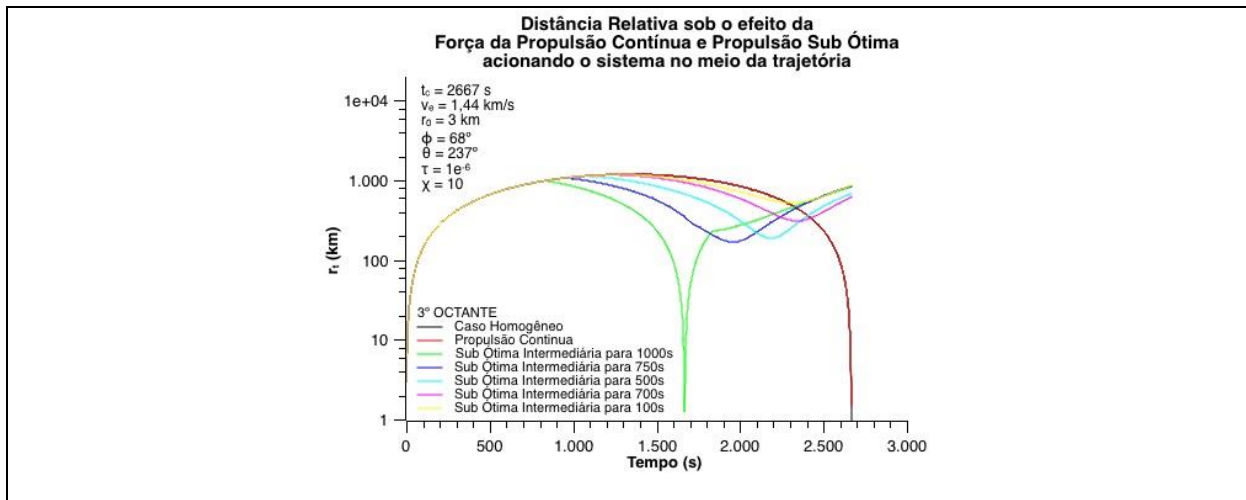


Figura A.5.39 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 237^\circ$

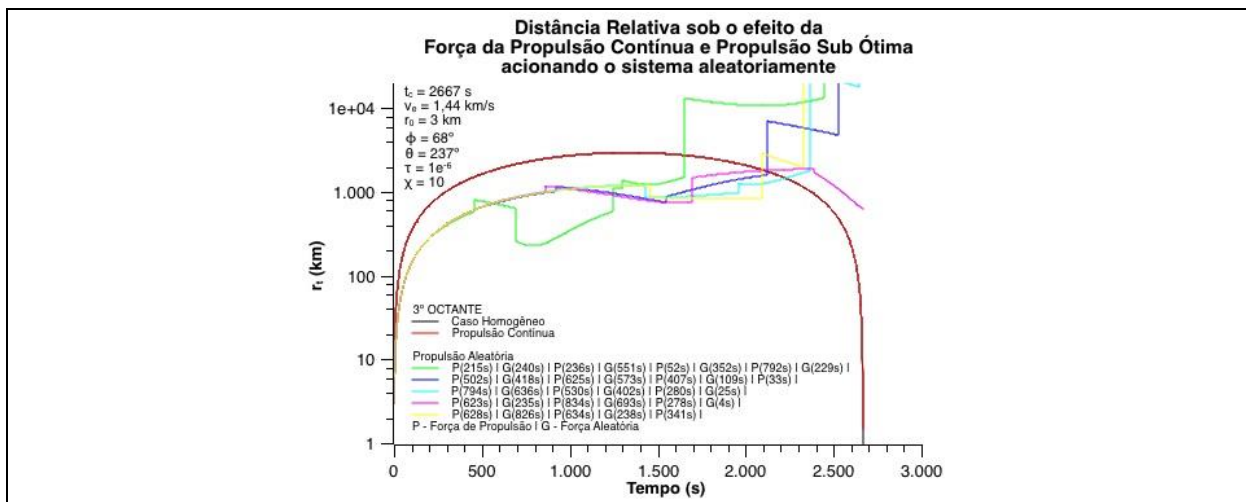


Figura A.5.40 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 237^\circ$

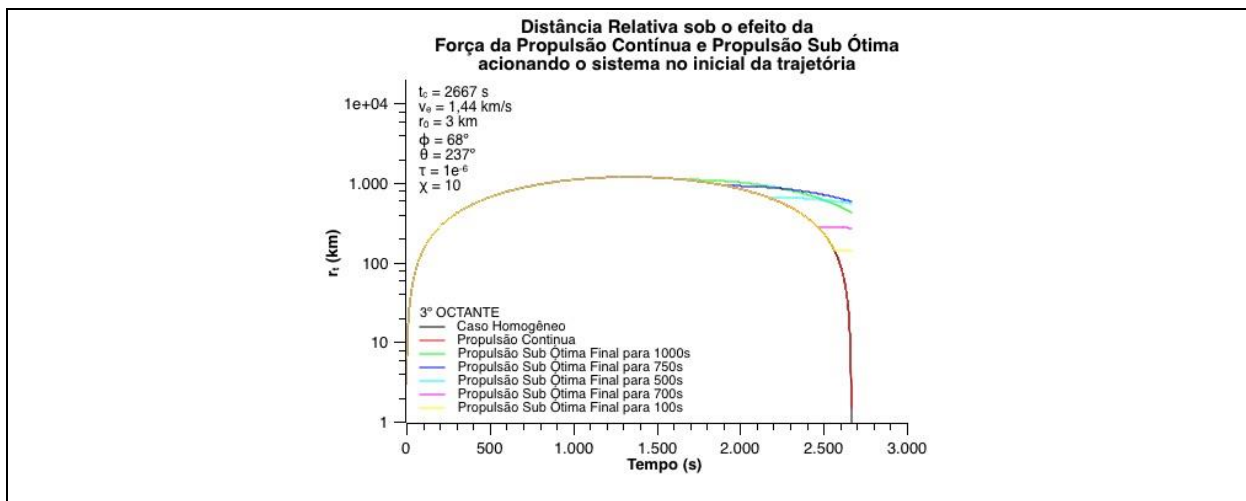


Figura A.5.41 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 237^\circ$

Propulsão Sub Ótima para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 245^\circ$

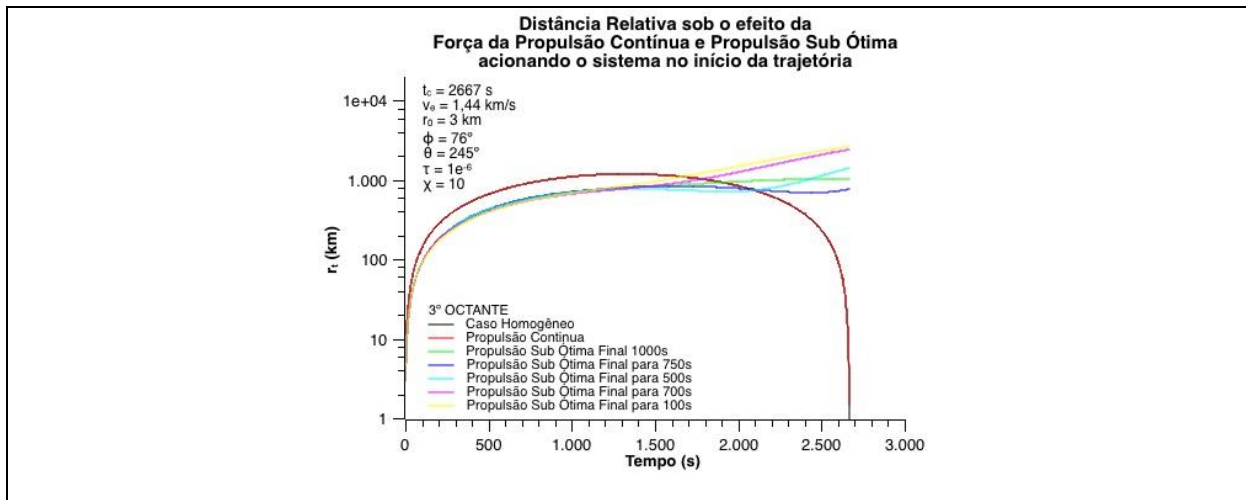


Figura A.5.42 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 245^\circ$

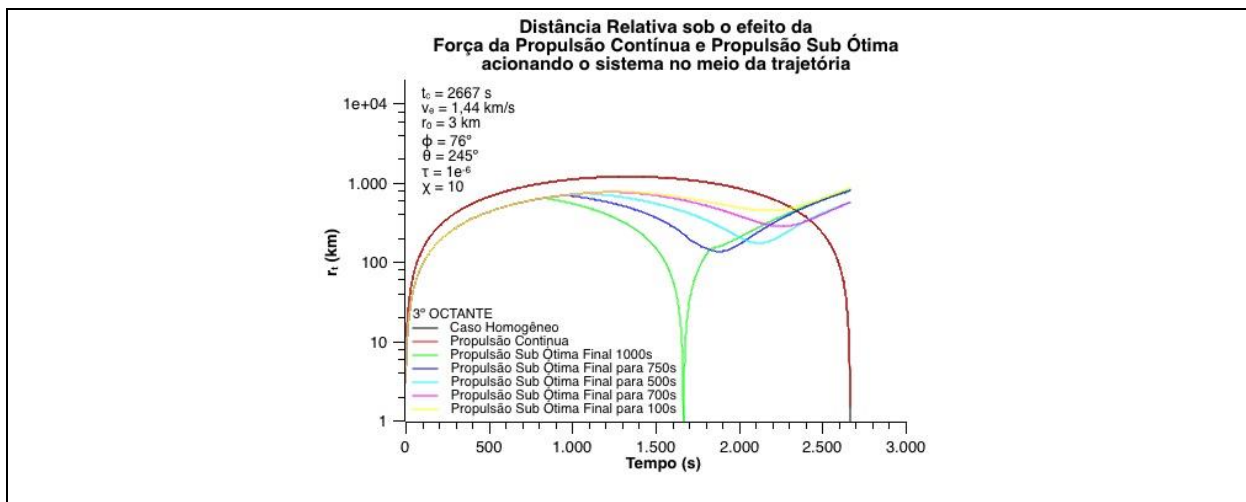


Figura A.5.43 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 245^\circ$

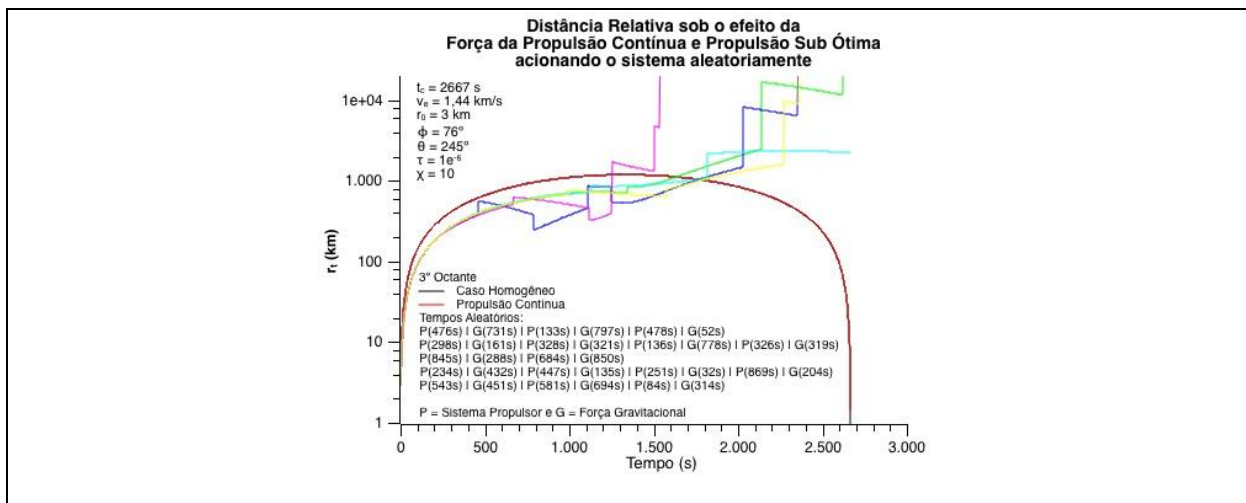


Figura A.5.44 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 245^\circ$

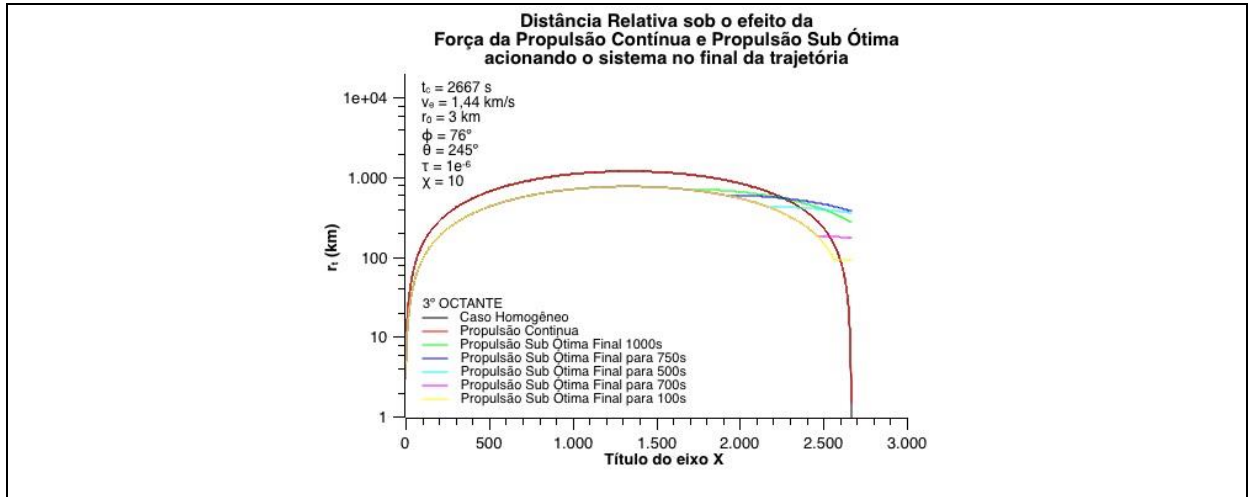


Figura A.5.45 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 245^\circ$

Propulsão Sub Ótima no 4º Octante

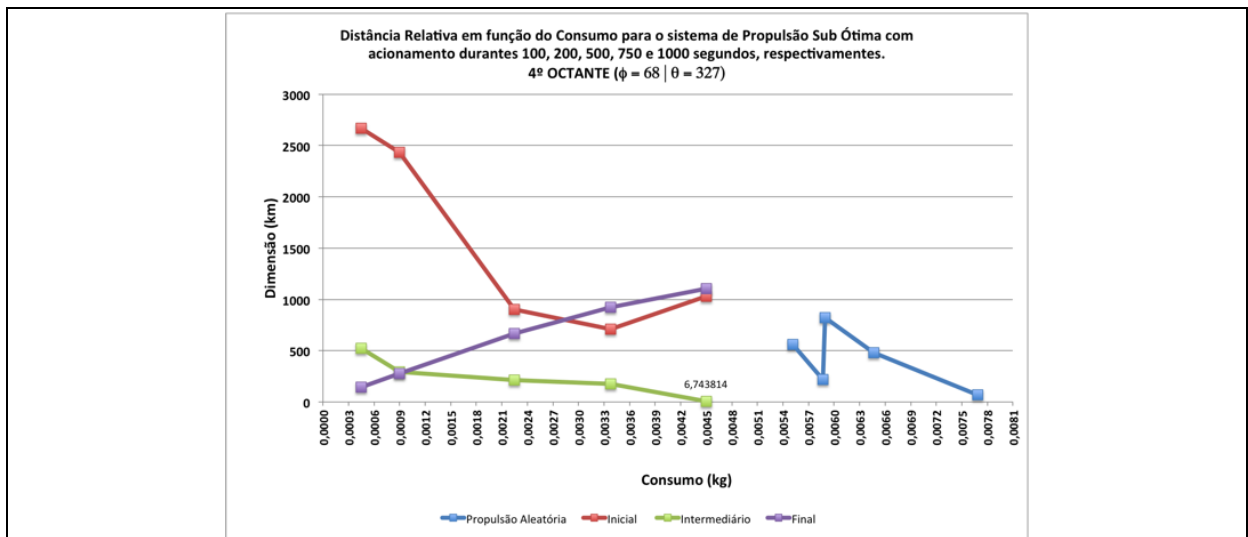


Figura A.5.46 Relação de Consumo para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 327^\circ$

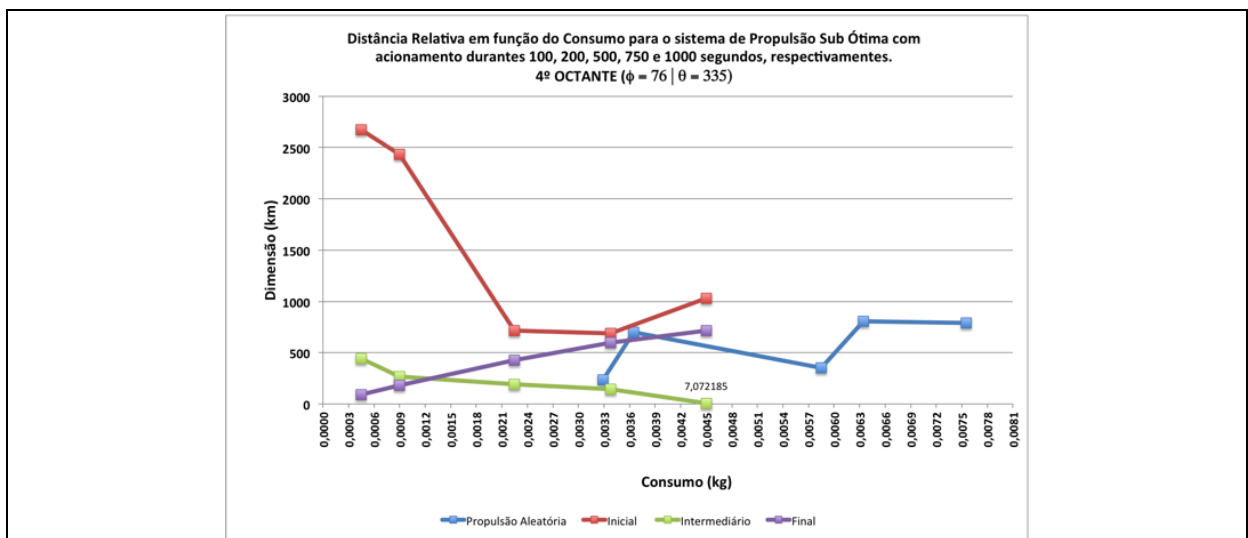


Figura A.5.47 Relação de Consumo para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 335^\circ$

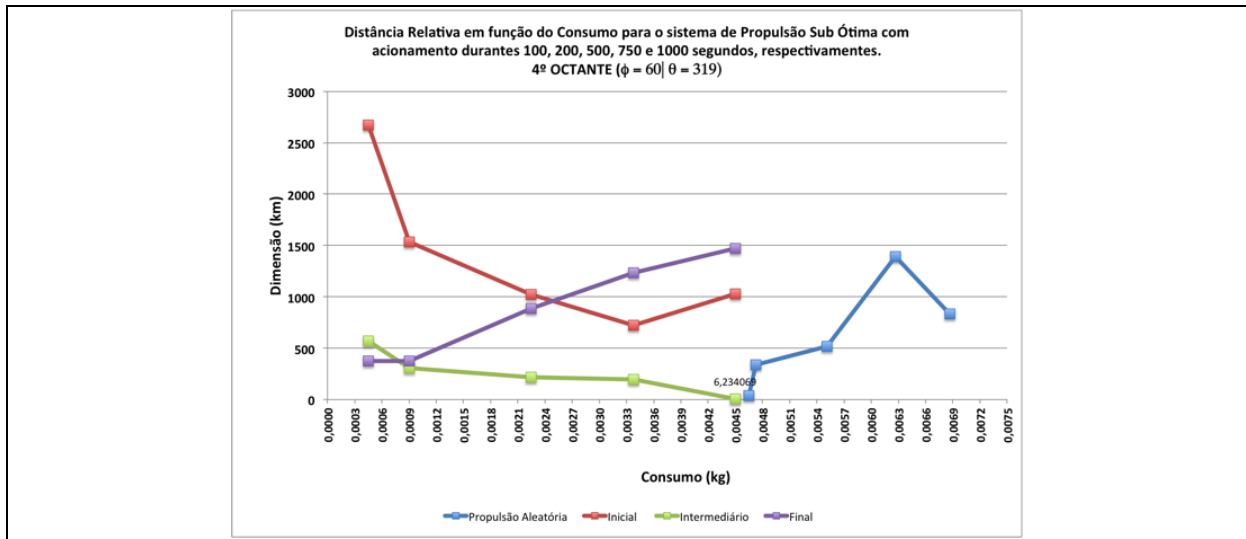


Figura A.5.48 Relação de Consumo para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 319^\circ$

Propulsão Sub Ótima para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 319^\circ$

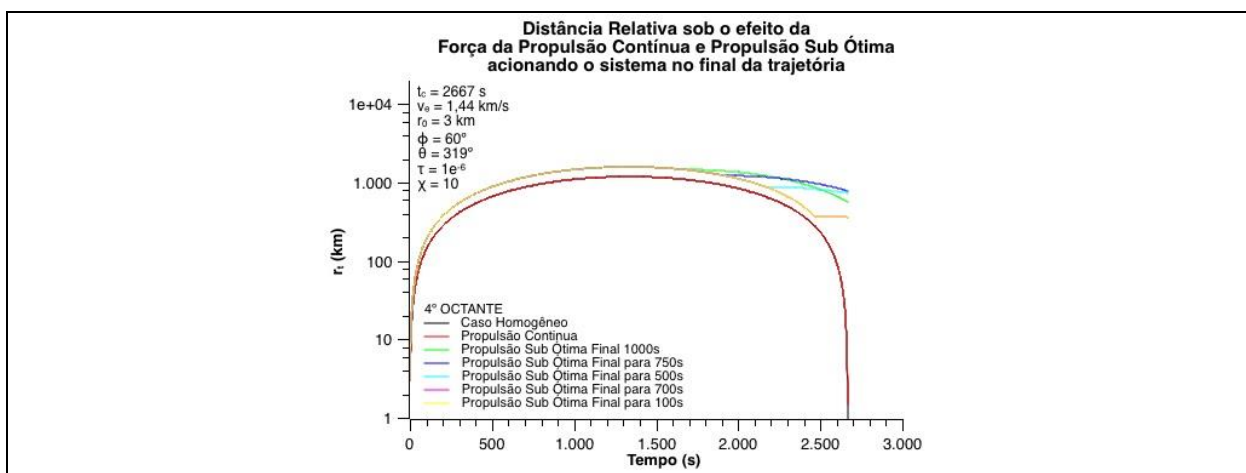


Figura A.5.49 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 319^\circ$

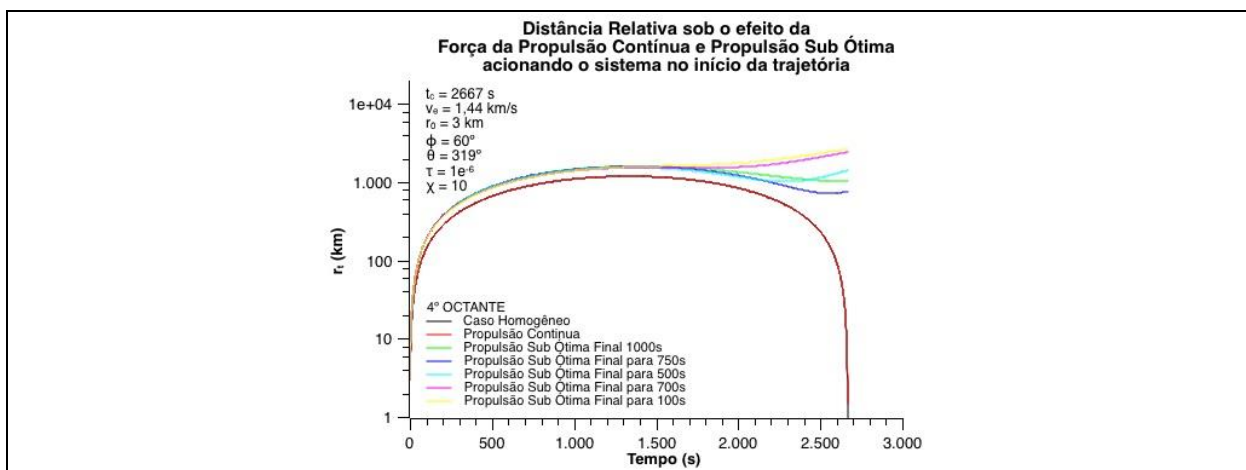


Figura A.5.50 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 319^\circ$

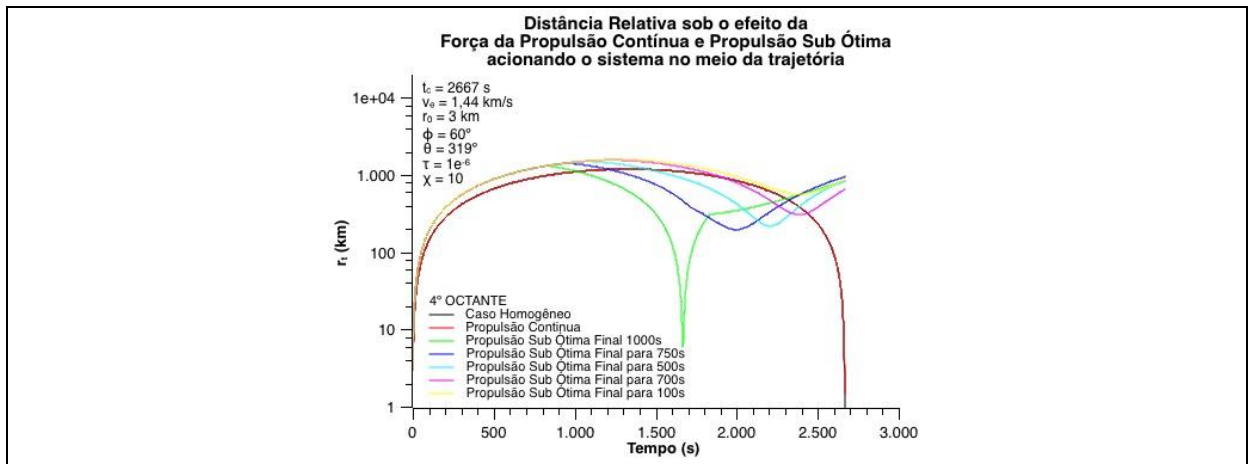


Figura A.5.51 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 319^\circ$

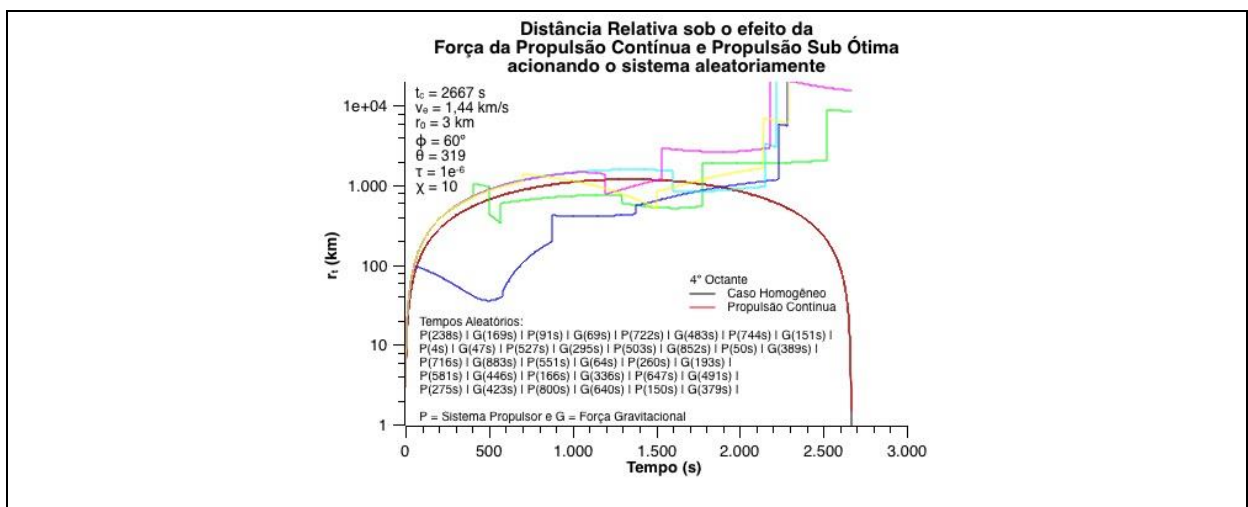


Figura A.5.52 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 60^\circ$ e $\theta = 319^\circ$

Propulsão Sub Ótima para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 327^\circ$

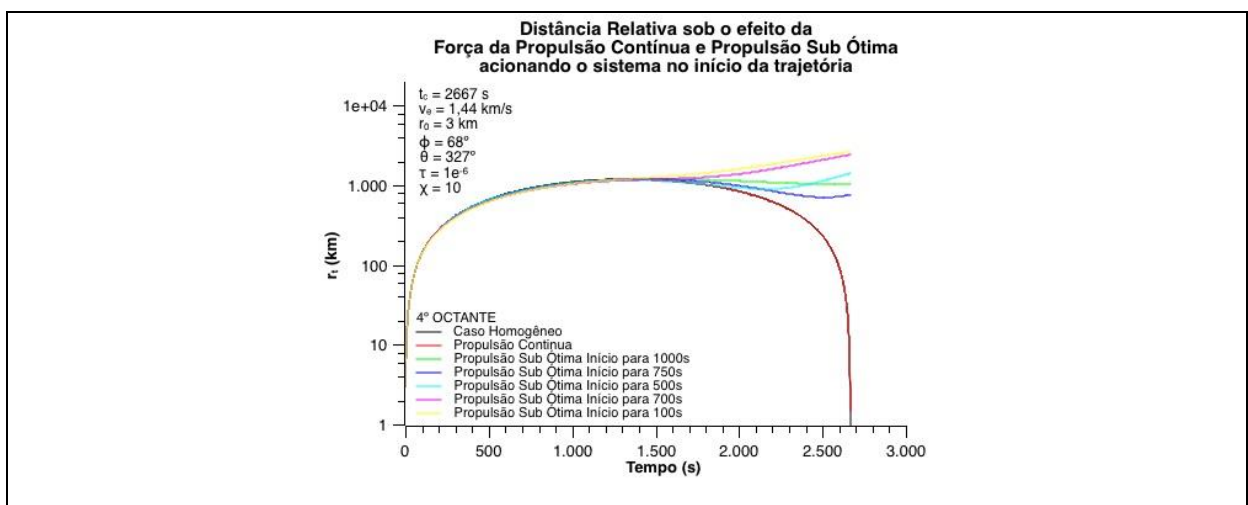


Figura A.5.53 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 327^\circ$

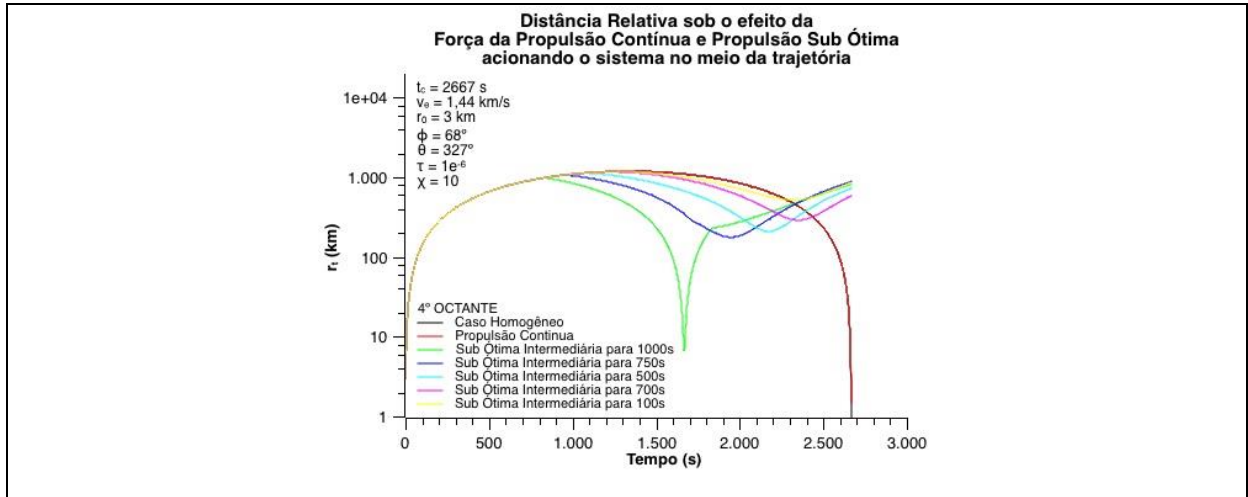


Figura A.5.54 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 327^\circ$

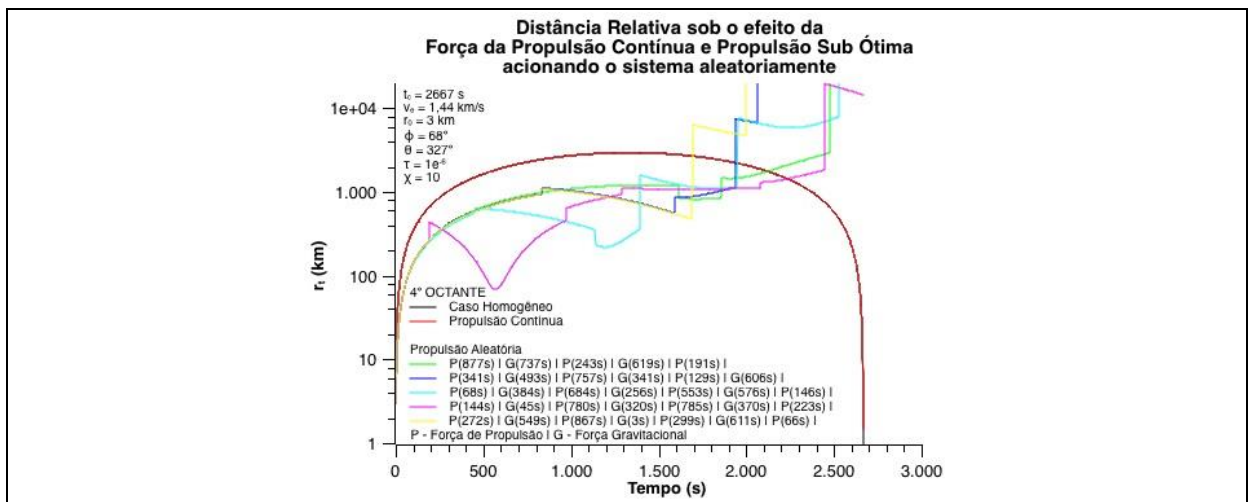


Figura A.5.55 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 327^\circ$

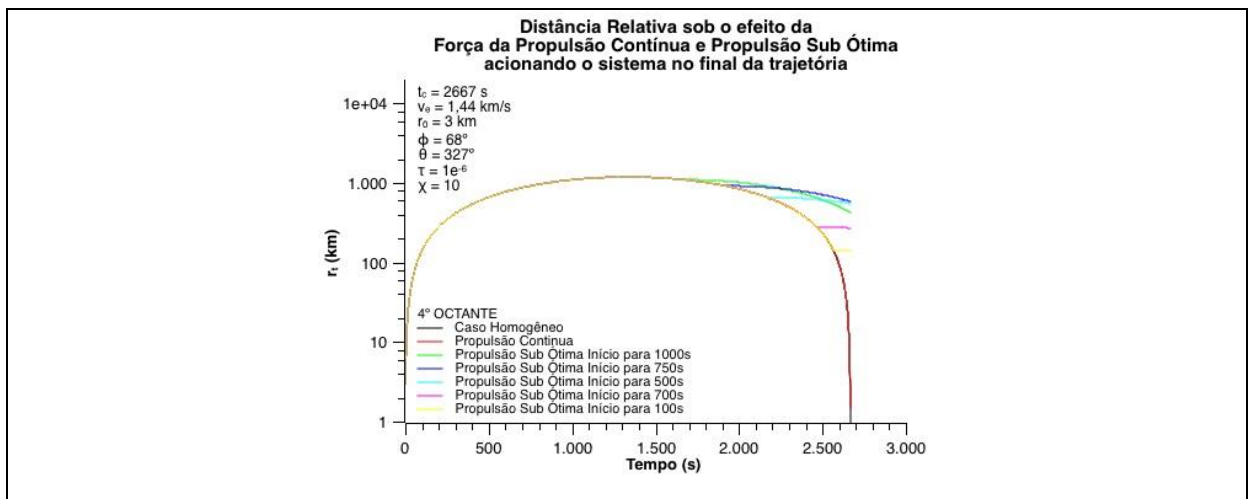


Figura A.5.56 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 68^\circ$ e $\theta = 327^\circ$

Propulsão Sub Ótima para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 335^\circ$

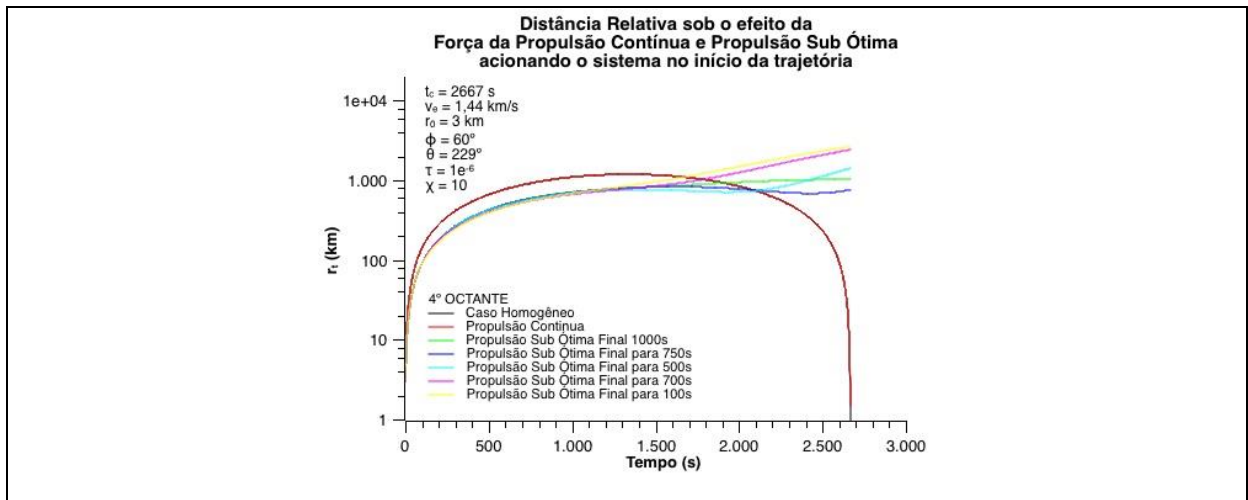


Figura A.5.57 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 335^\circ$

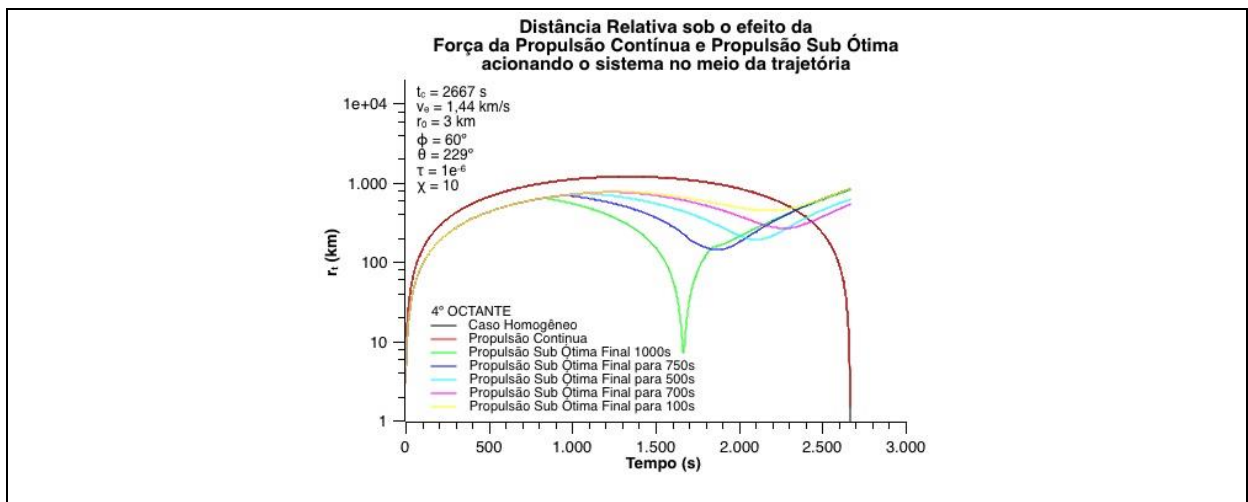


Figura A.5.58 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 335^\circ$

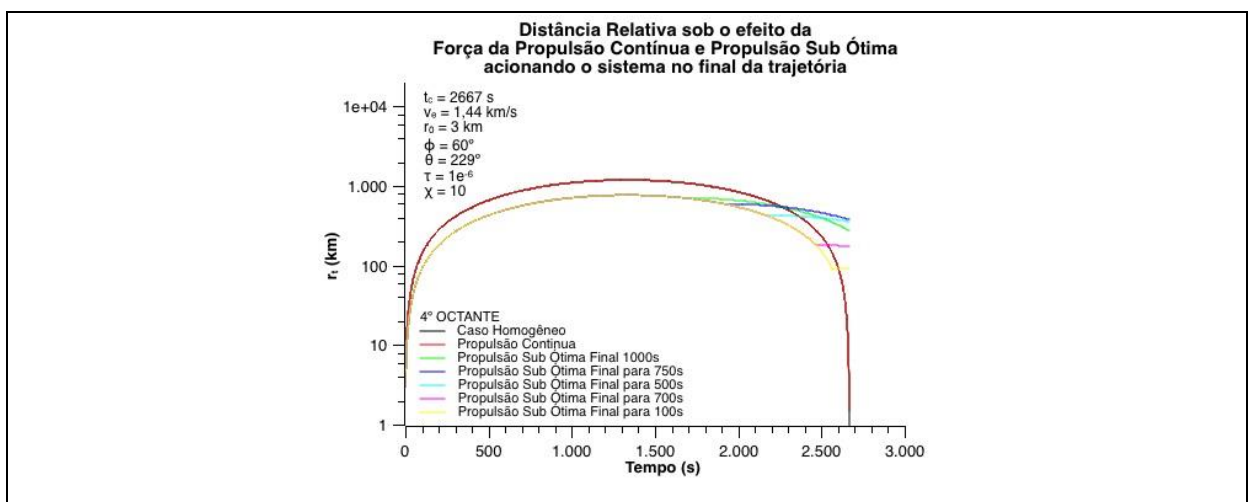


Figura A.5.59 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 335^\circ$

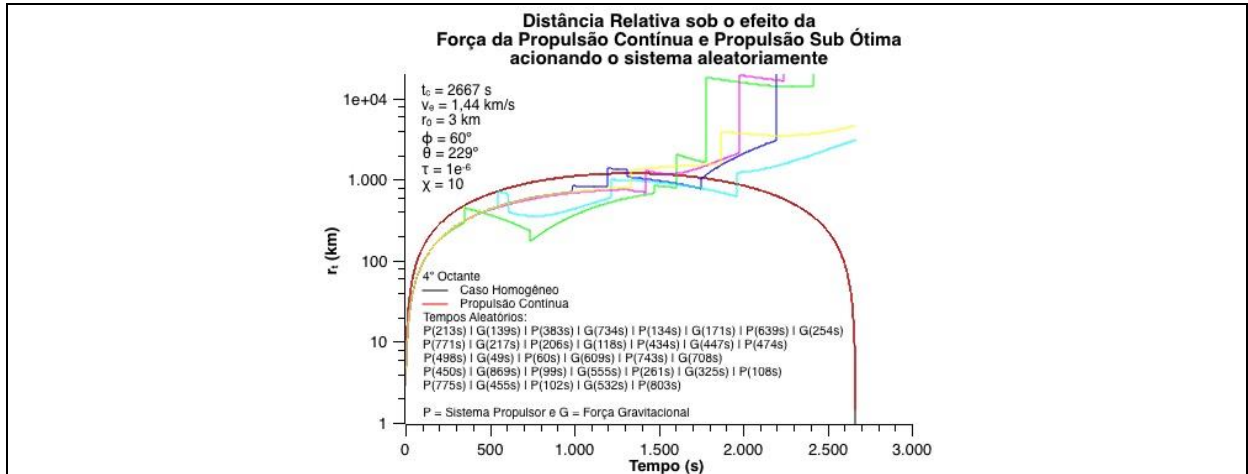


Figura A.5.60 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 76^\circ$ e $\theta = 335^\circ$

Propulsão Sub Ótima no 5º Octante

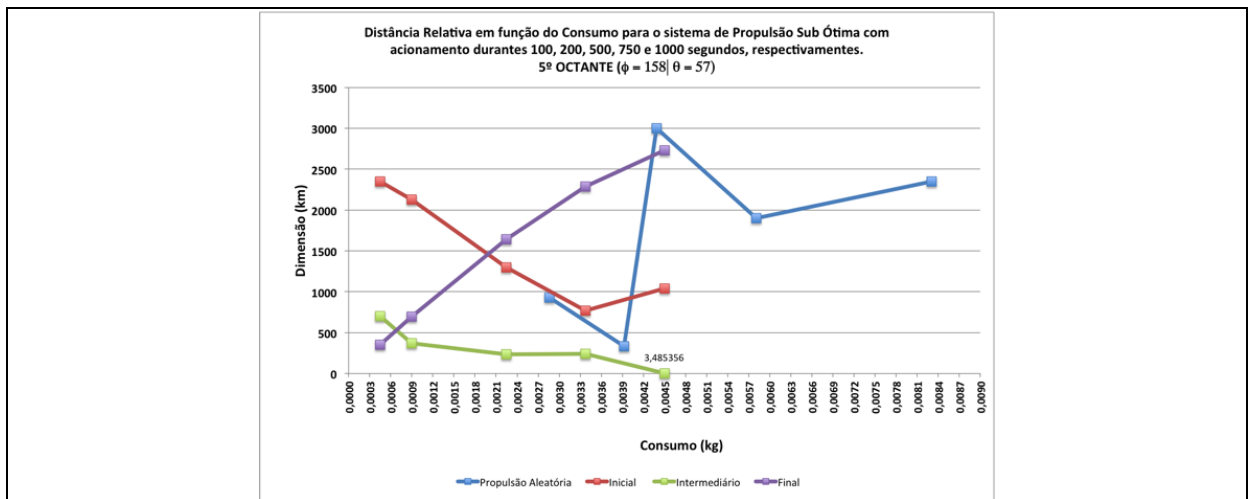


Figura A.5.61 Relação de Consumo para $\phi = 158^\circ$ e $\theta = 57^\circ$

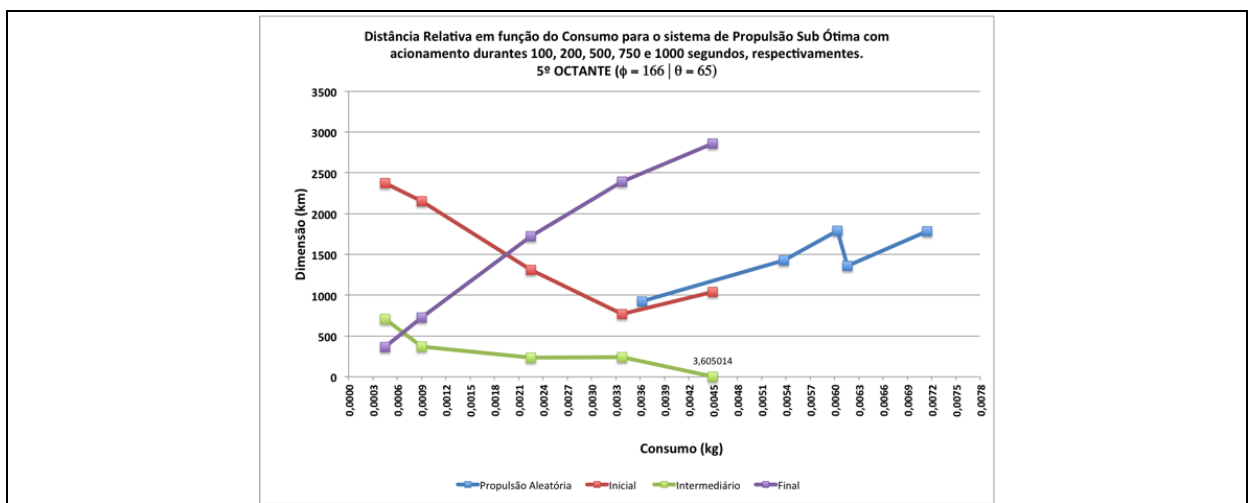


Figura A.5.62 Relação de Consumo para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 65^\circ$

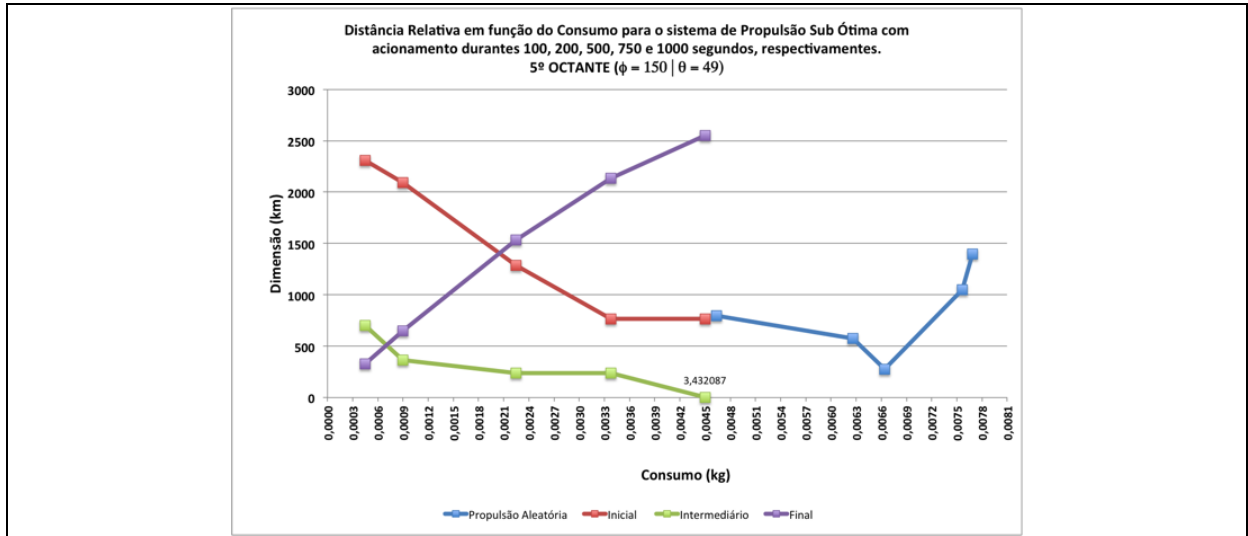


Figura A.5.63 Relação de Consumo para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 49^\circ$

Propulsão Sub Ótima para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 49^\circ$

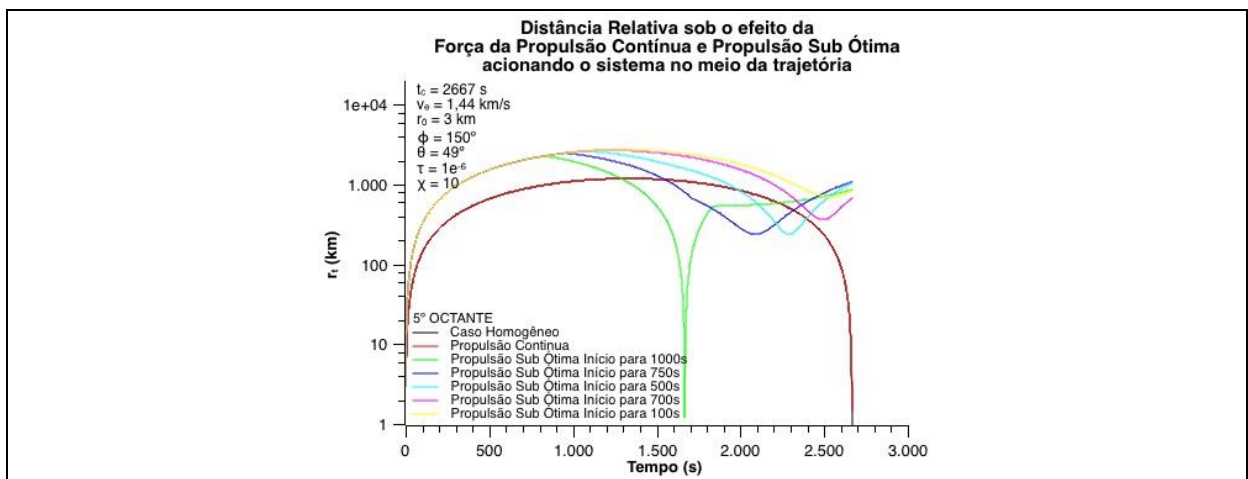


Figura A.5.64 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 49^\circ$

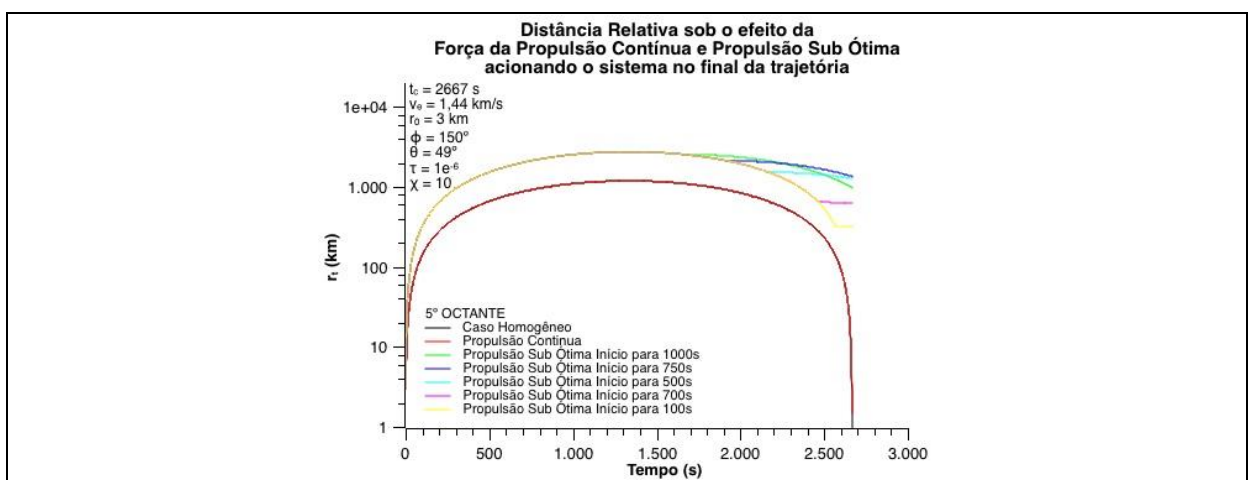


Figura A.5.65 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 49^\circ$

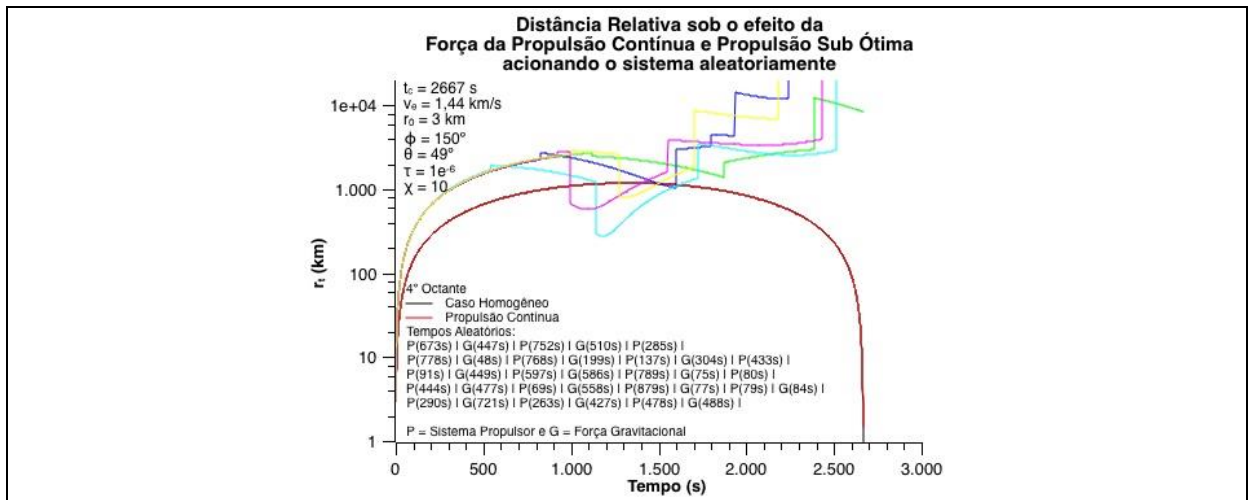


Figura A.5.66 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 49^\circ$

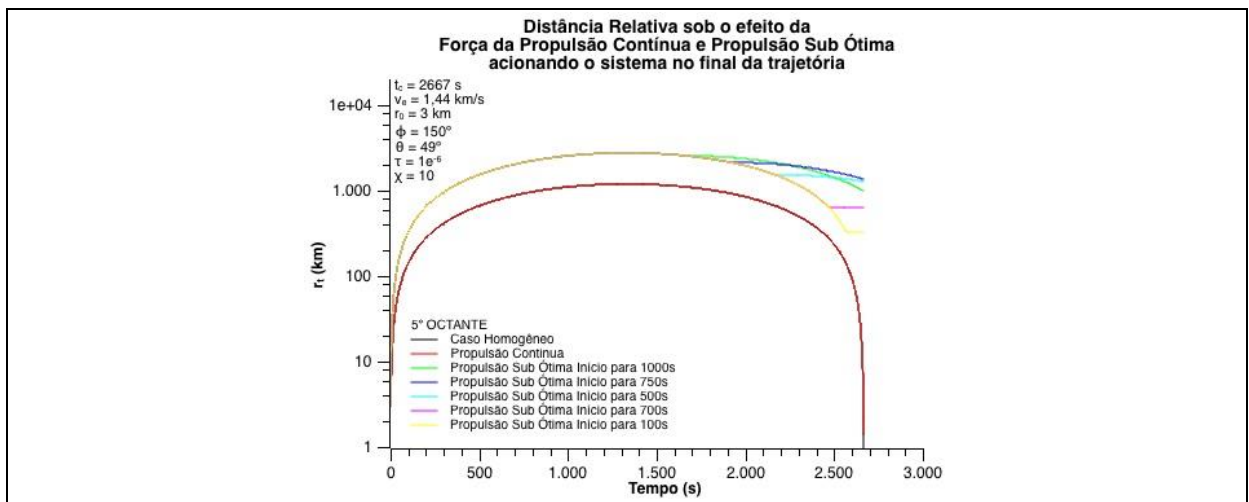


Figura A.5.67 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 49^\circ$

Propulsão Sub Ótima para $\phi = 158^\circ$ e $\theta = 57^\circ$

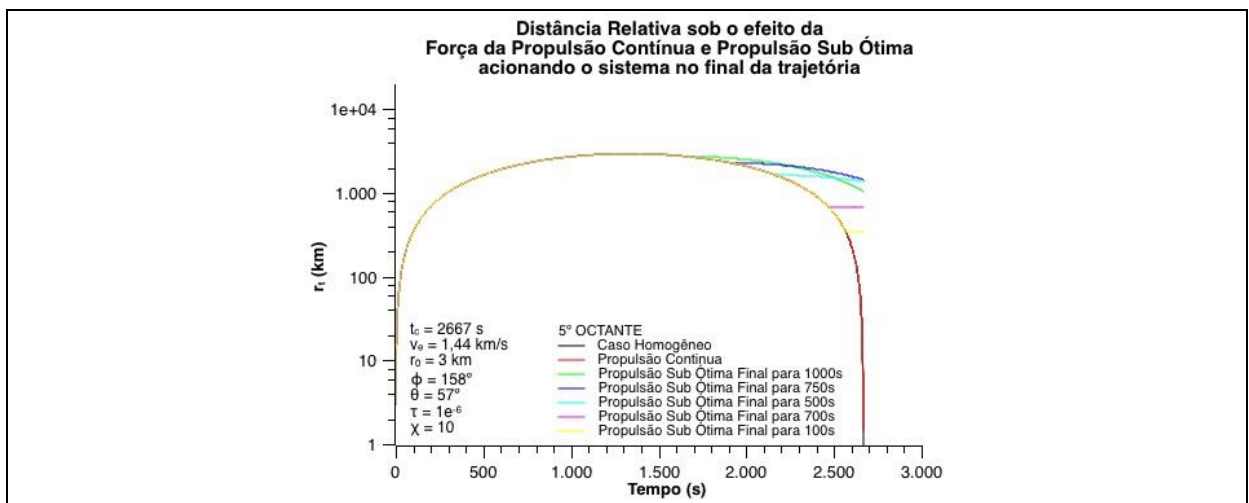


Figura A.5.68 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 158^\circ$ e $\theta = 57^\circ$

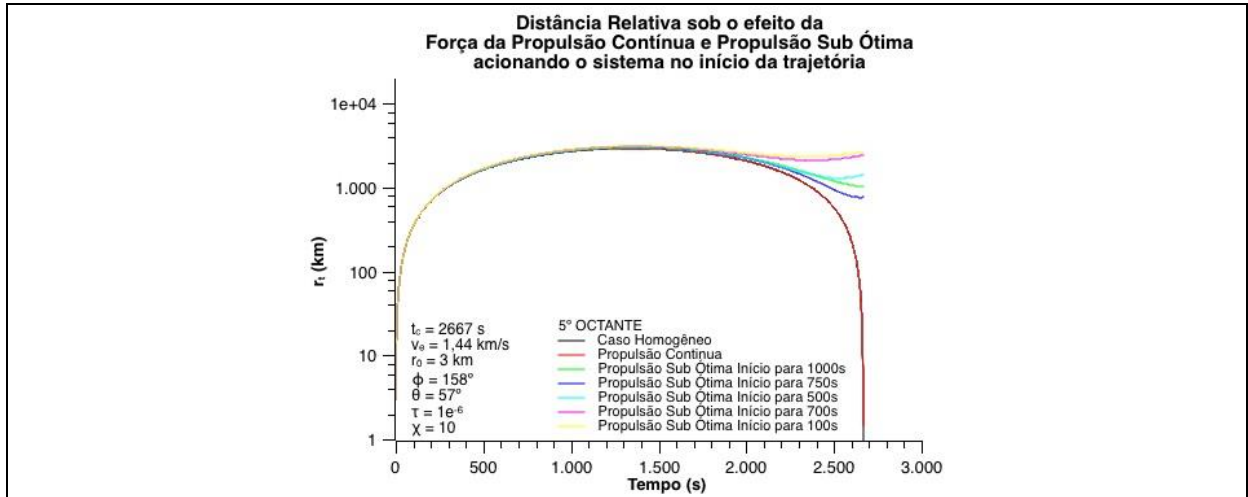


Figura A.5.69 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 158^\circ$ e $\theta = 57^\circ$

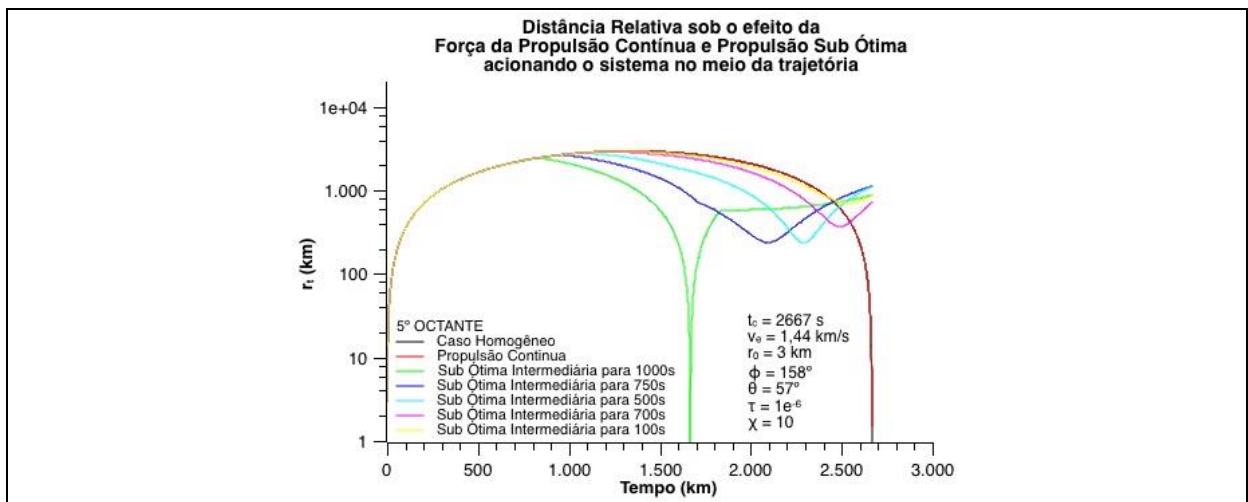


Figura A.5.70 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 158^\circ$ e $\theta = 57^\circ$

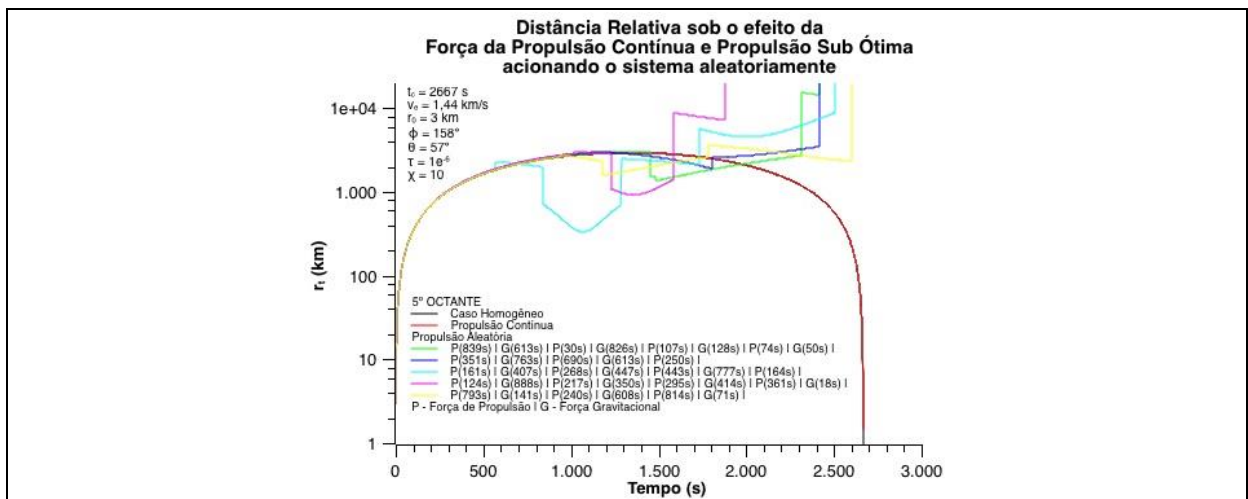


Figura A.5.71 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 158^\circ$ e $\theta = 57^\circ$

Propulsão Sub Ótima para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 65^\circ$

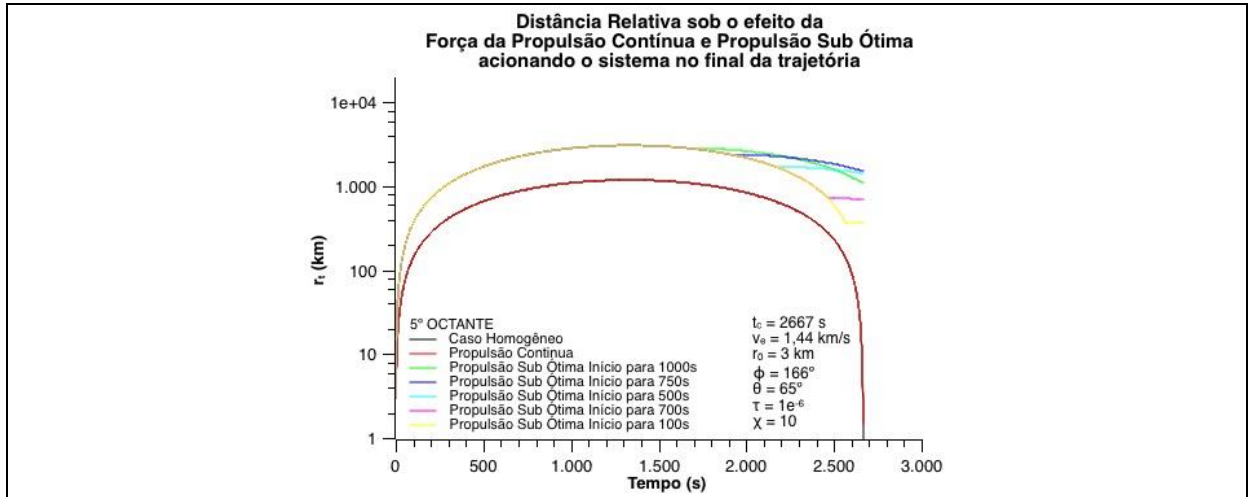


Figura A.5.72 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 65^\circ$

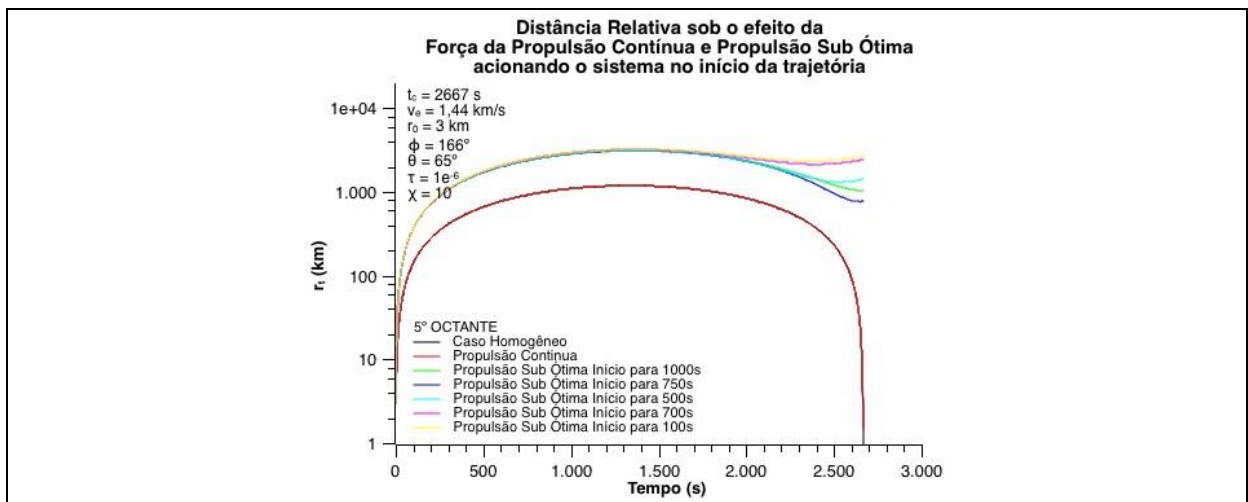


Figura A.5.73 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 65^\circ$

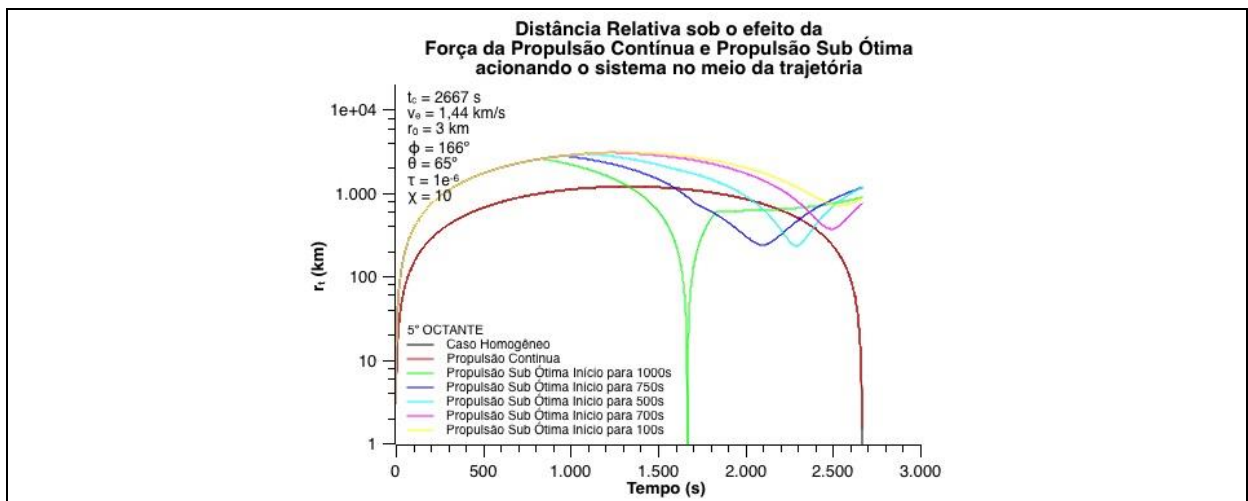


Figura A.5.74 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 65^\circ$

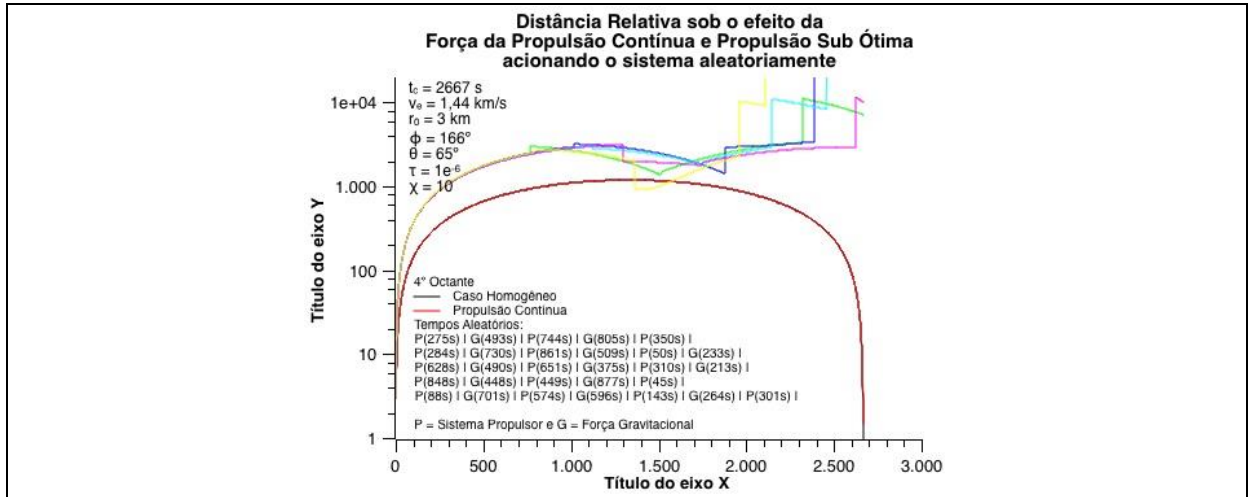


Figura A.5.75 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 65^\circ$

Propulsão Sub Ótima no 6º Octante

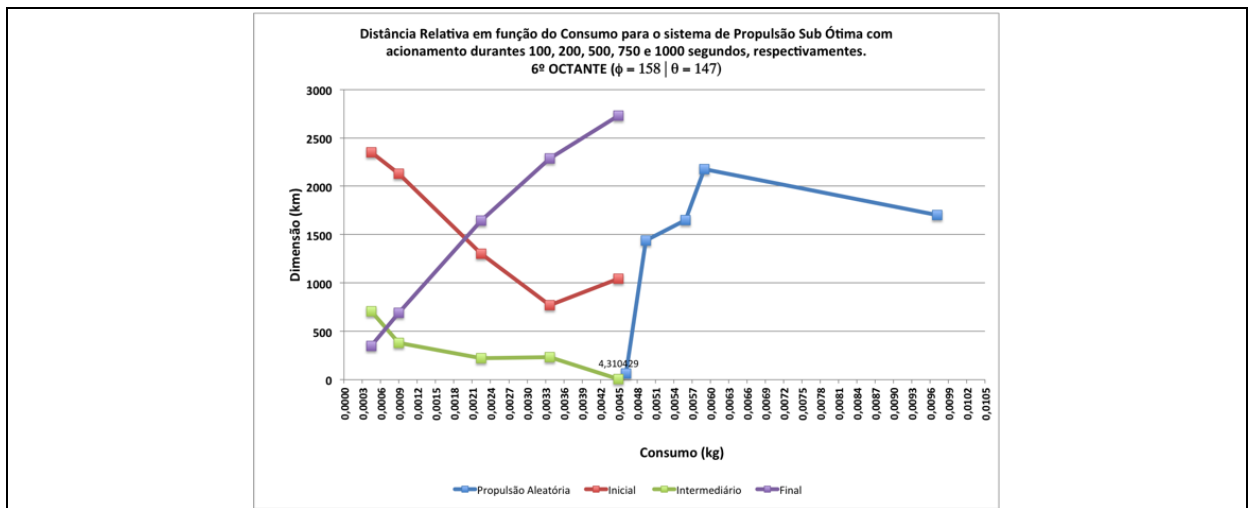


Figura A.5.76 Relação de Consumo para $\phi = 158^\circ$ e $\theta = 147^\circ$

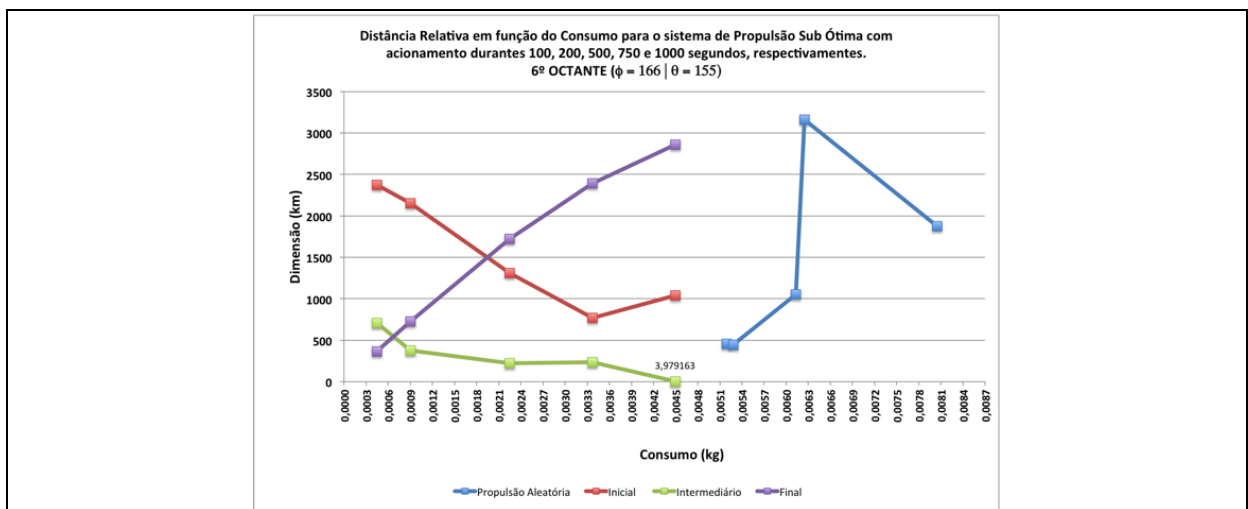


Figura A.5.77 Relação de Consumo para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 155^\circ$

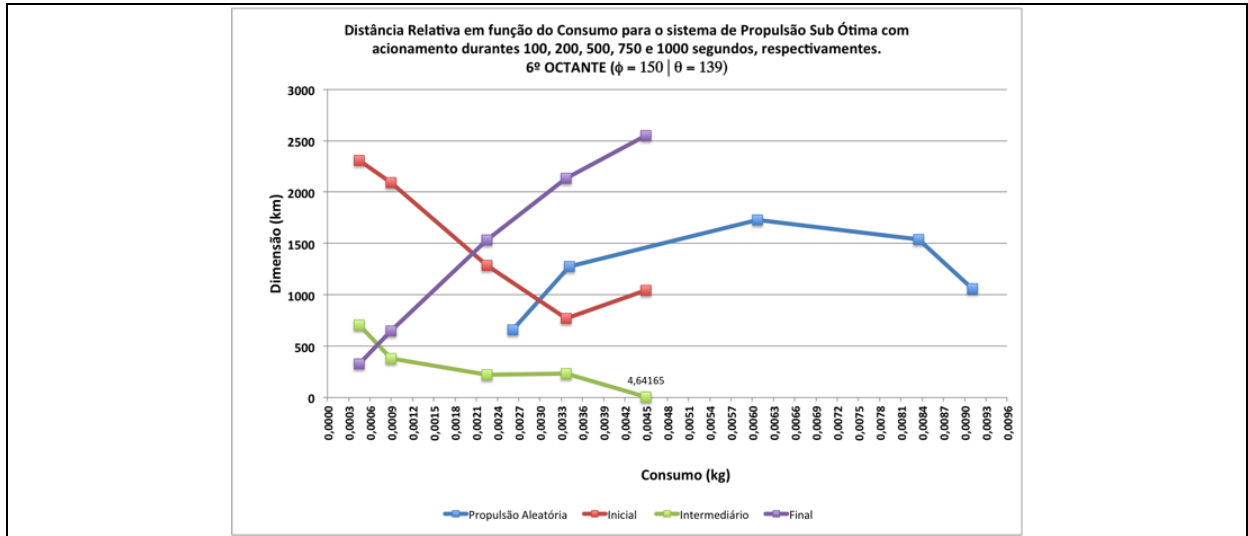


Figura A.5.78 Relação de Consumo para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 139^\circ$

Propulsão Sub Ótima para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 139^\circ$

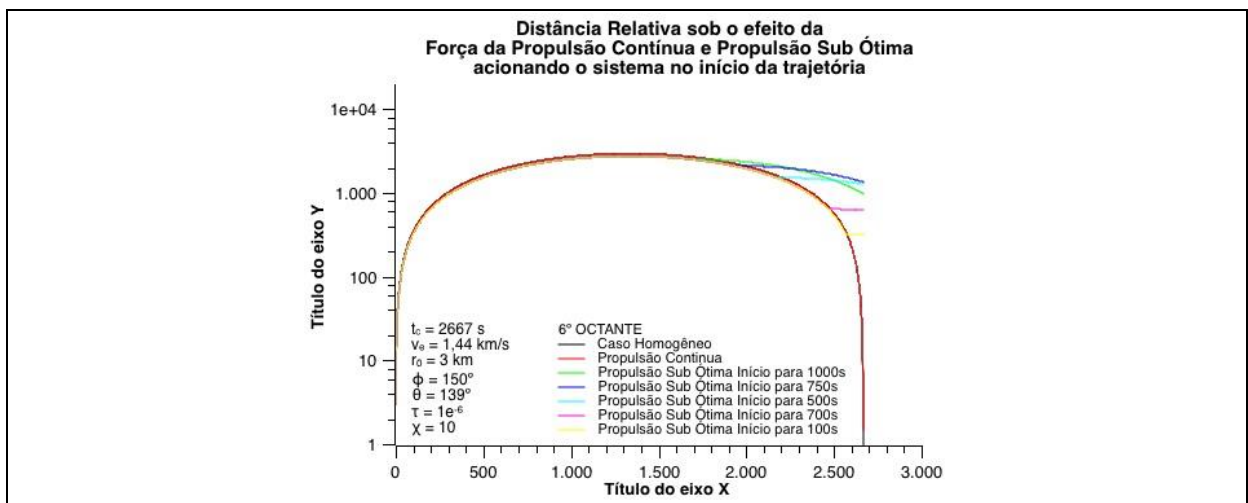


Figura A.5.79 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 139^\circ$

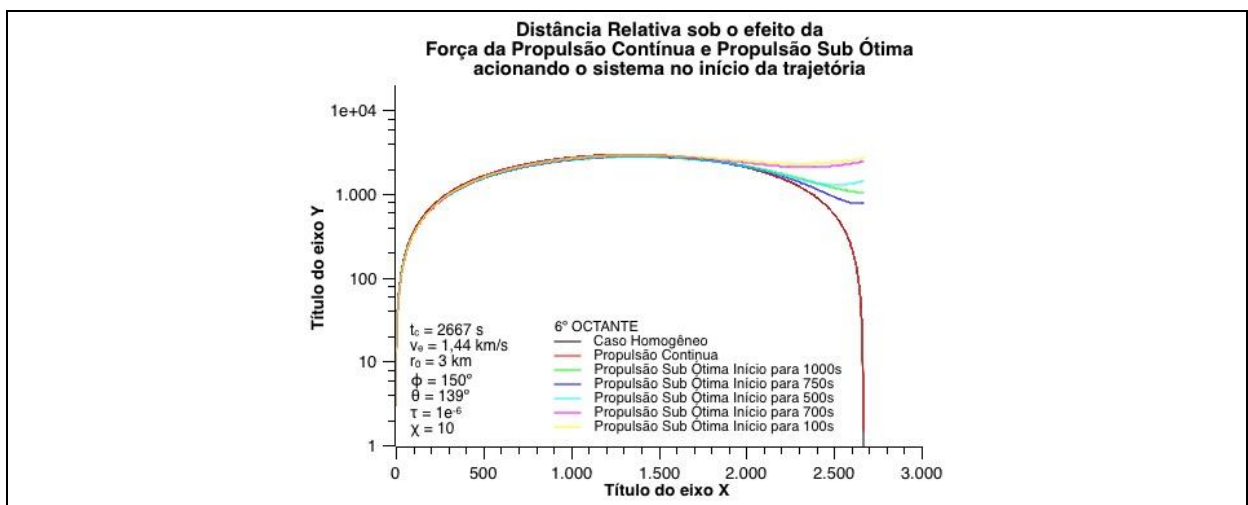


Figura A.5.80 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 139^\circ$

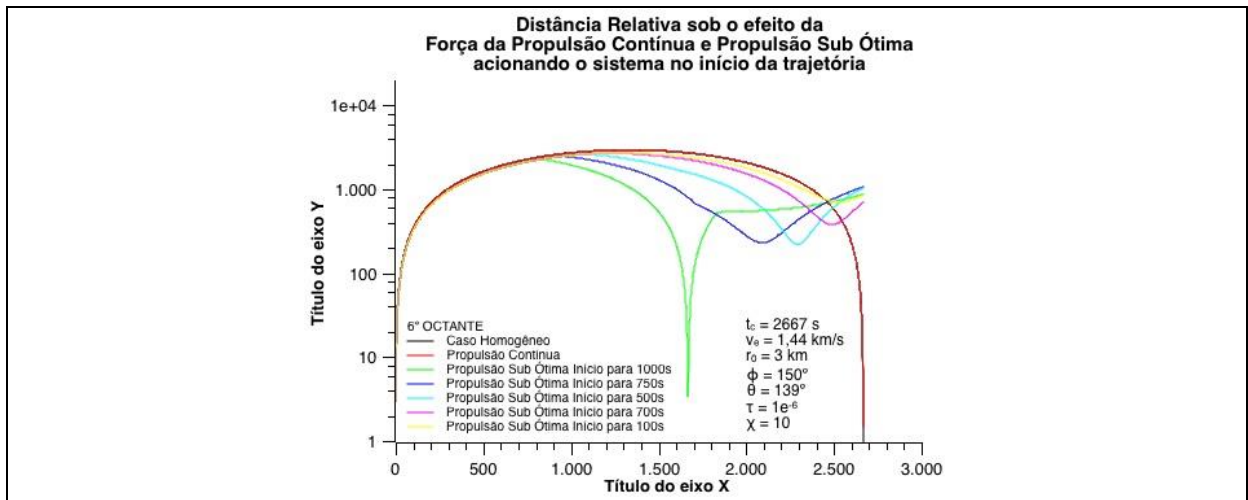


Figura A.5.81 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 139^\circ$

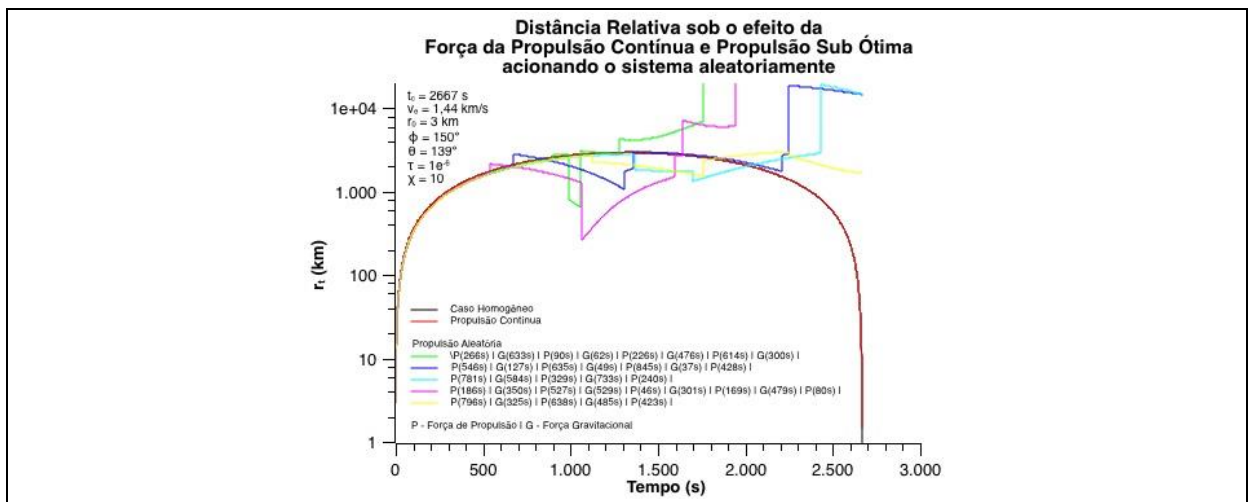


Figura A.5.82 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 139^\circ$

Propulsão Sub Ótima para $\phi = 158^\circ$ e $\theta = 147^\circ$

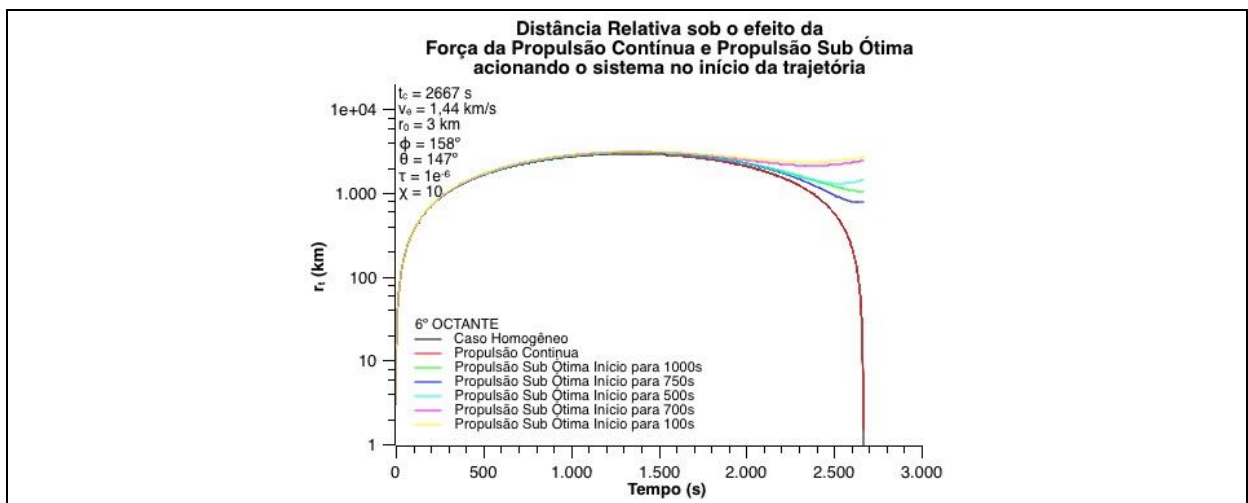


Figura A.5.83 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 158^\circ$ e $\theta = 147^\circ$

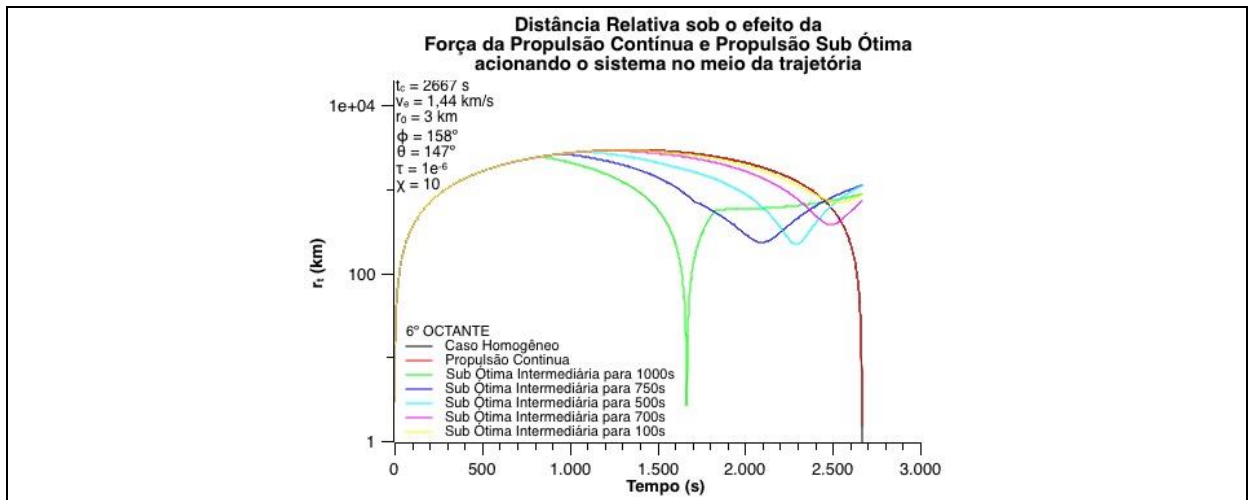


Figura A.5.84 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 158^\circ$ e $\theta = 147^\circ$

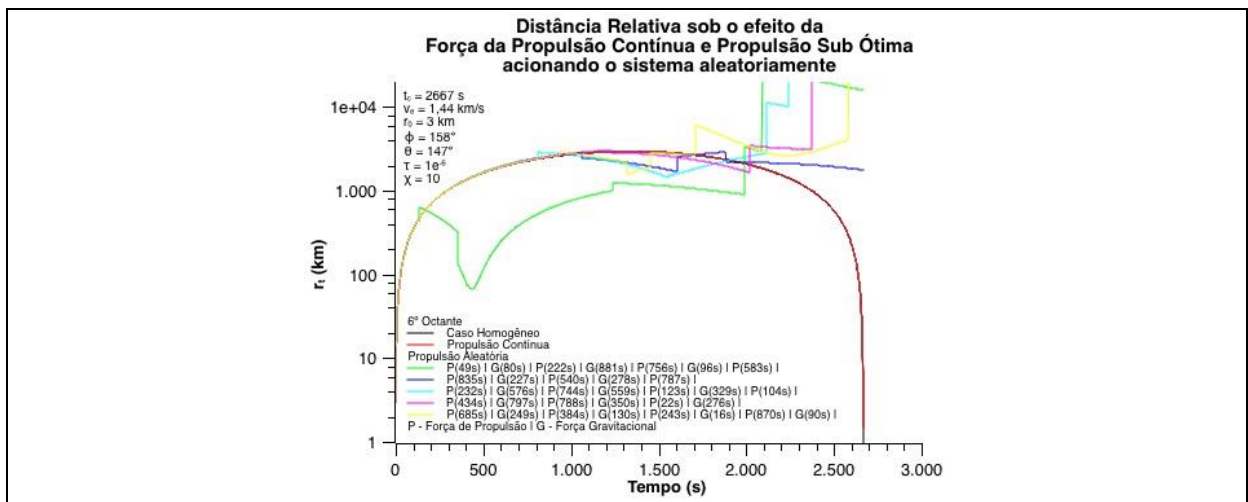


Figura A.5.85 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 158^\circ$ e $\theta = 147^\circ$

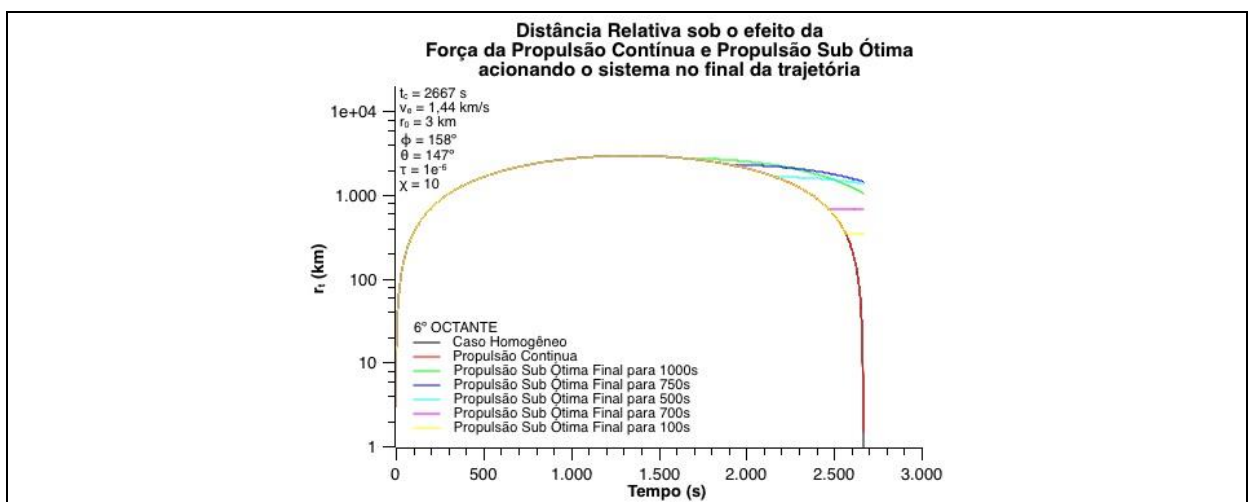


Figura A.5.86 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 158^\circ$ e $\theta = 147^\circ$

Propulsão Sub Ótima para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 155^\circ$

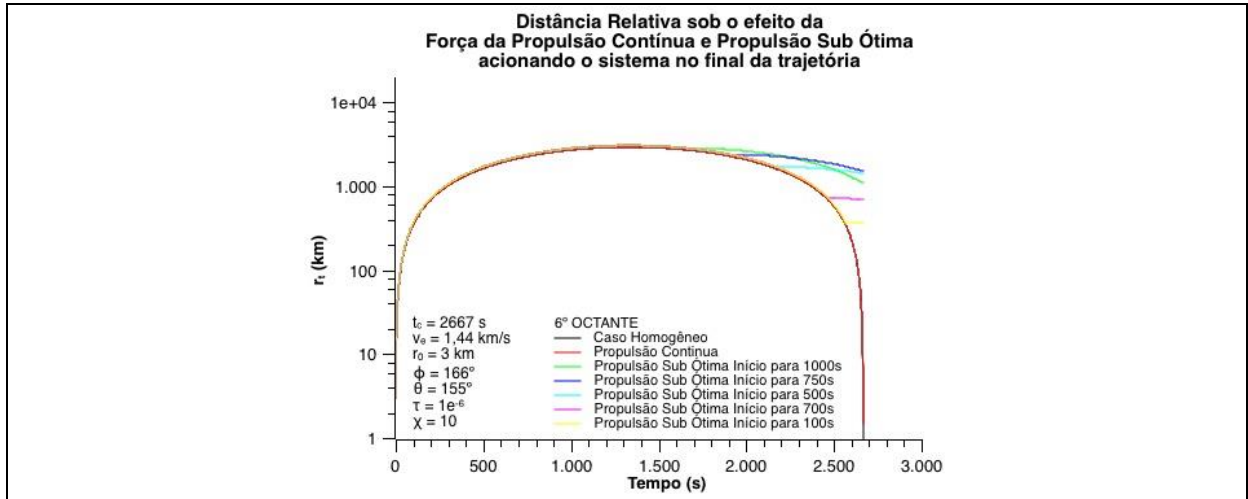


Figura A.5.87 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 155^\circ$

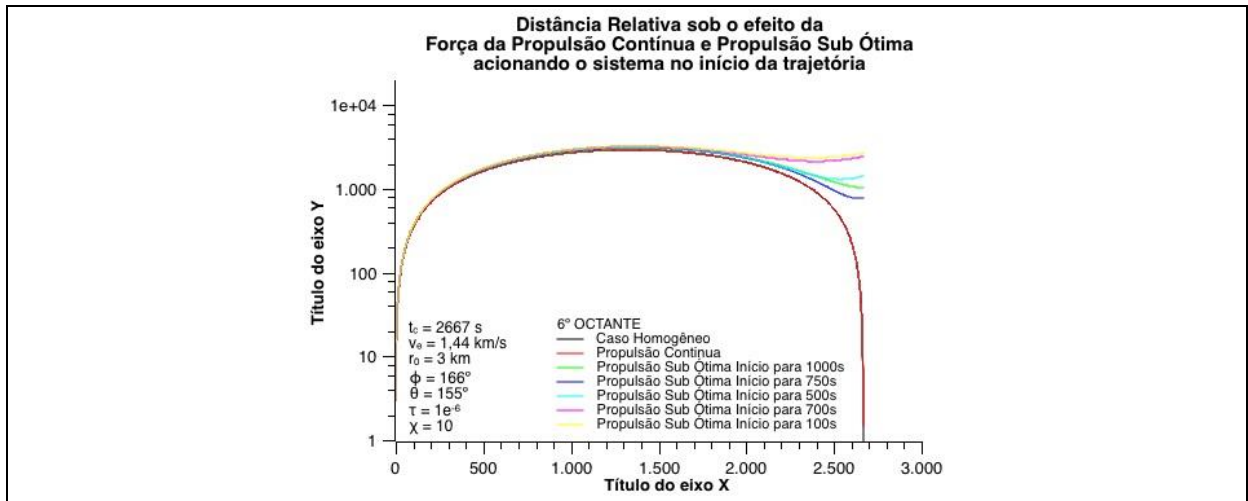


Figura A.5.88 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 155^\circ$

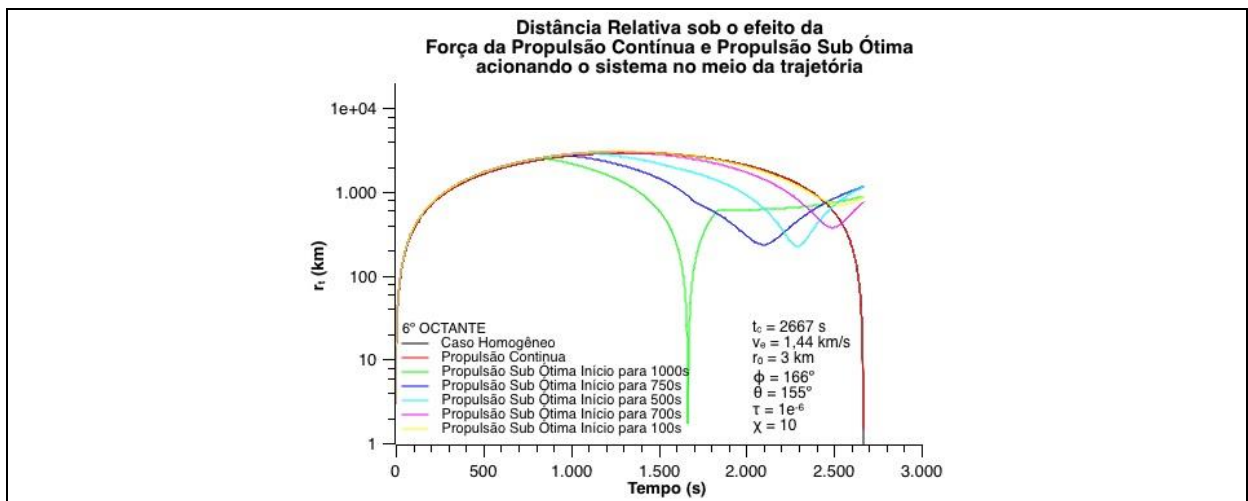


Figura A.5.89 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 155^\circ$

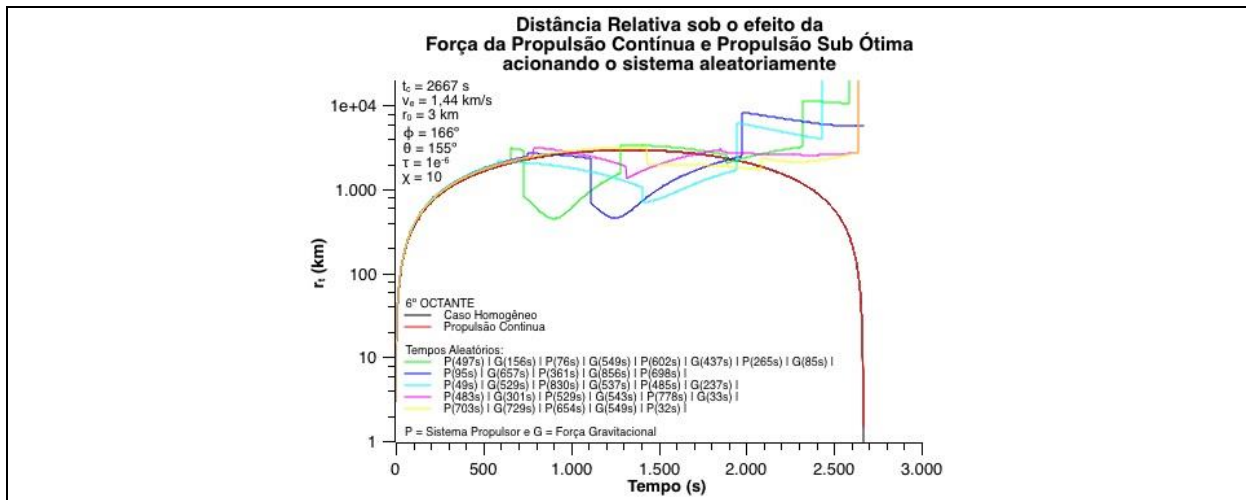


Figura A.5.90 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 155^\circ$

Propulsão Sub Ótima no 7º Octante

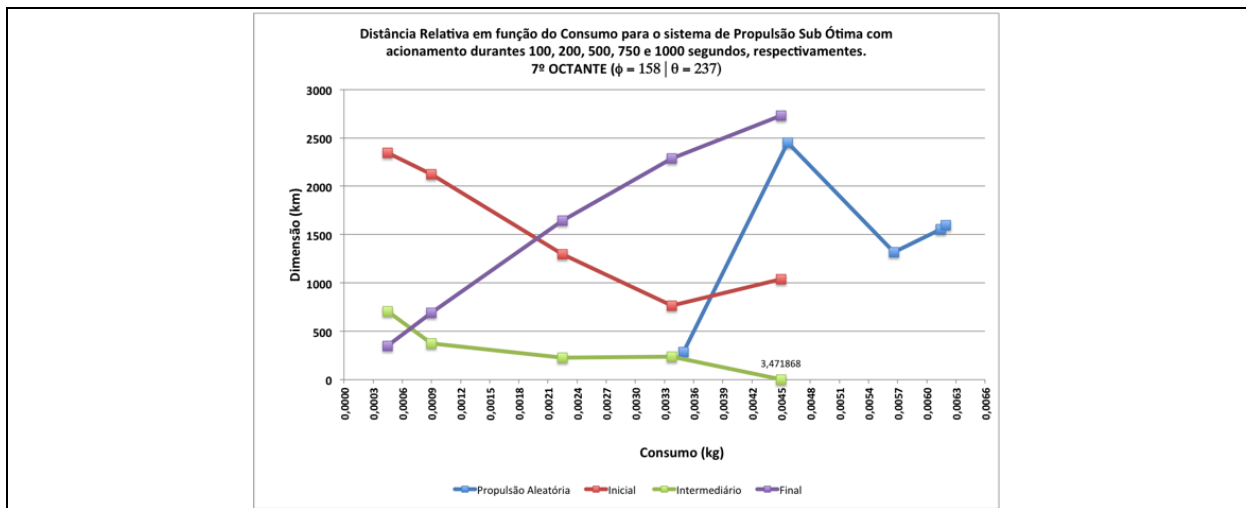


Figura A.5.91 Relação de Consumo para $\phi = 158^\circ$ e $\theta = 237^\circ$

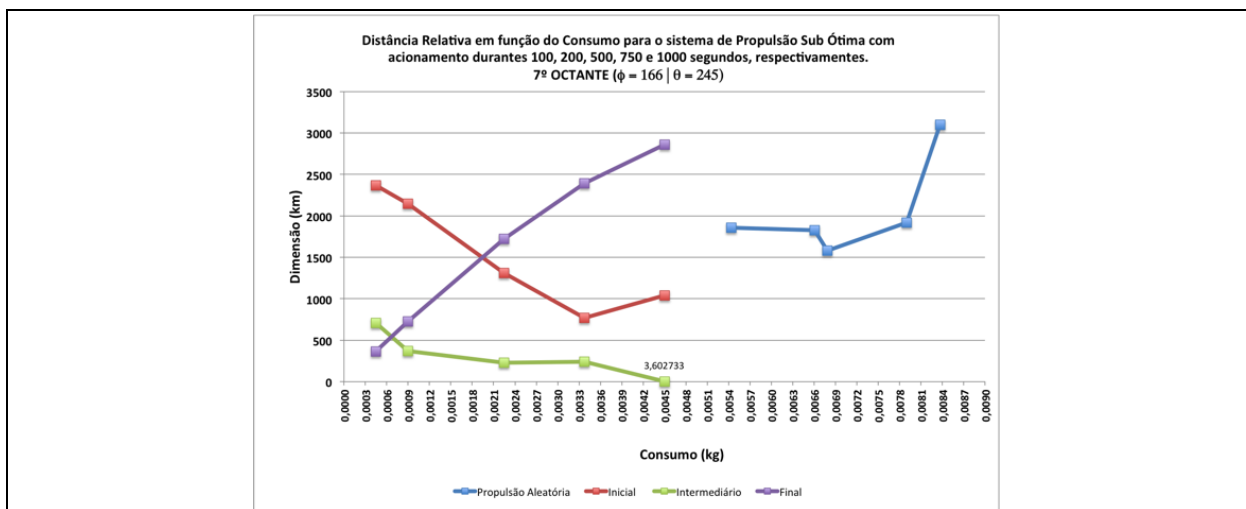


Figura A.5.92 Relação de Consumo para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 245^\circ$

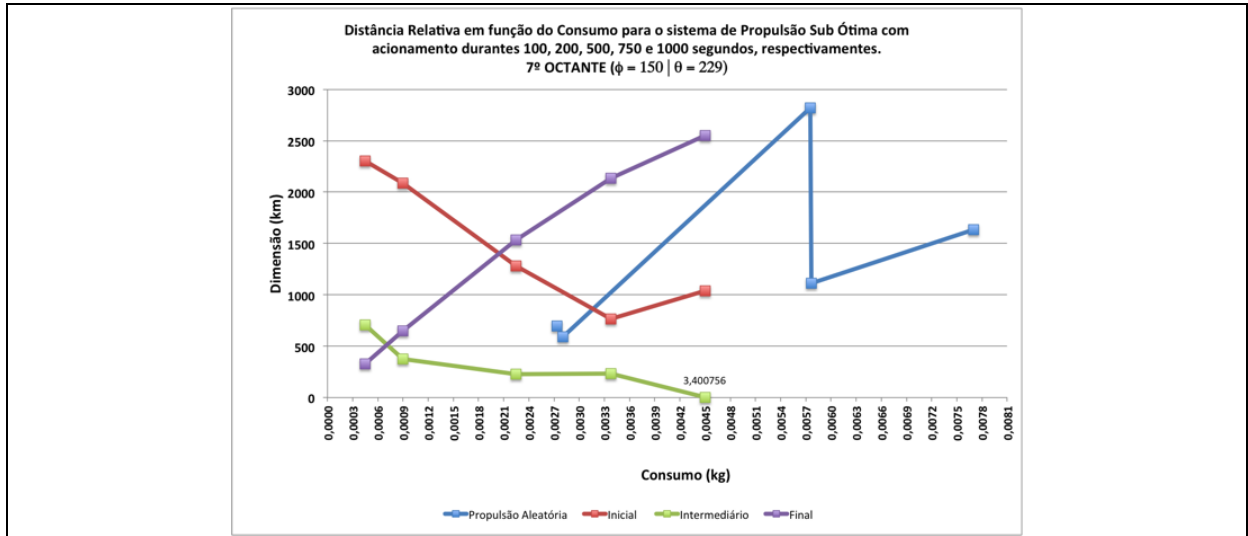


Figura A.5.93 Relação de Consumo para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 229^\circ$

Propulsão Sub Ótima para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 229^\circ$

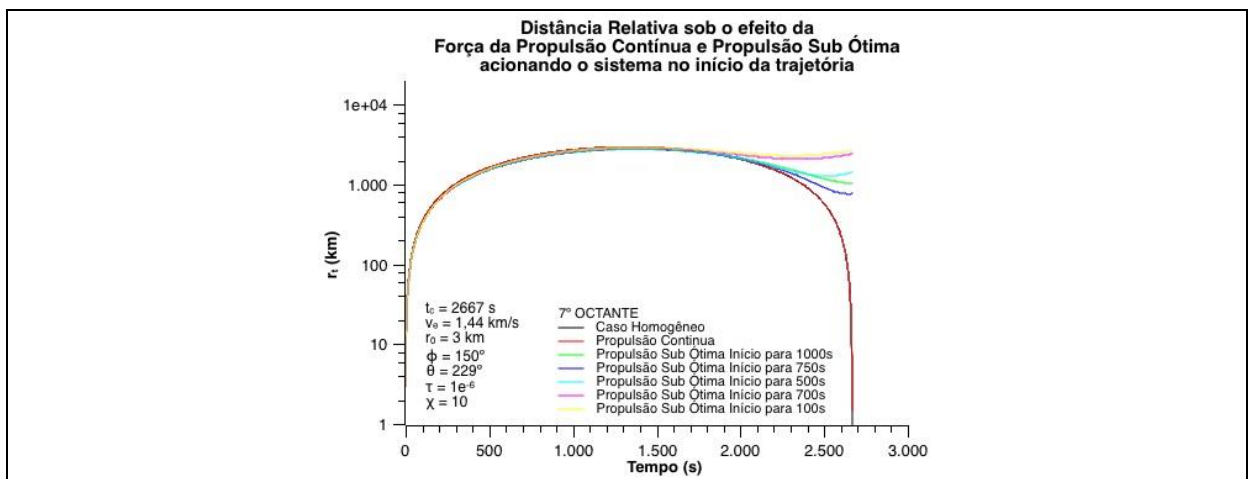


Figura A.5.94 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 229^\circ$

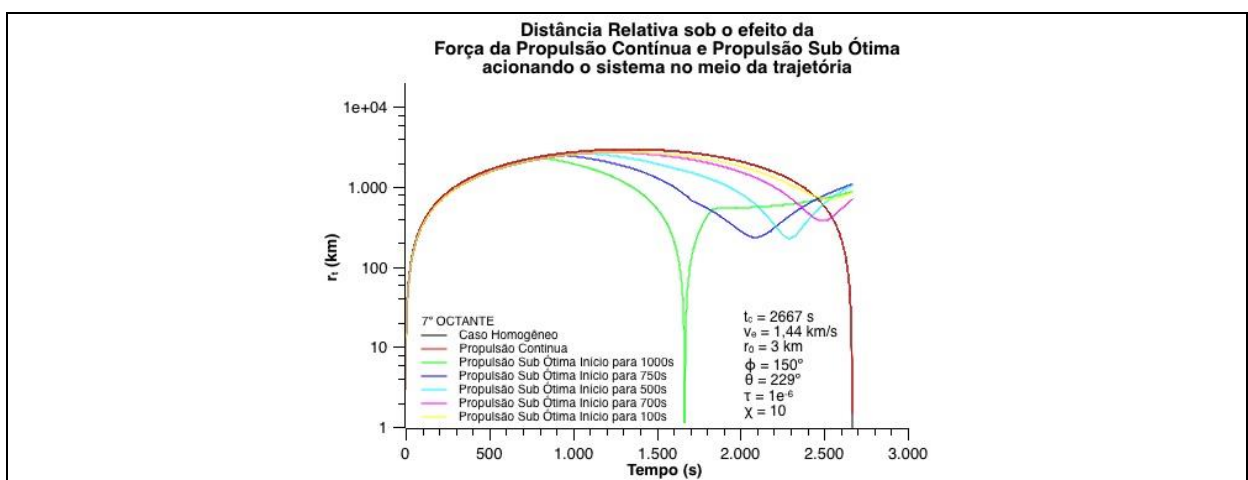


Figura A.5.95 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 229^\circ$

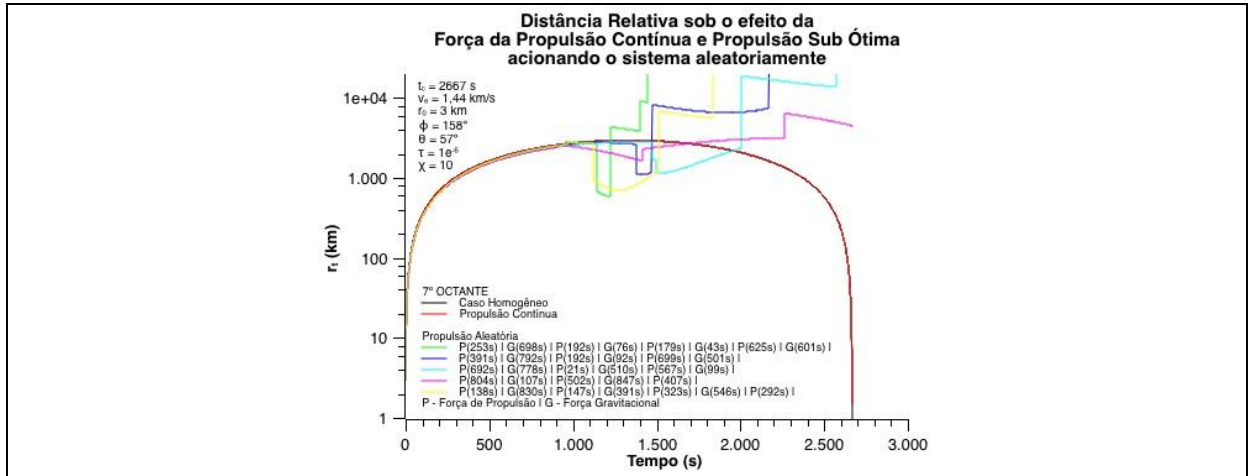


Figura A.5.96 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 229^\circ$

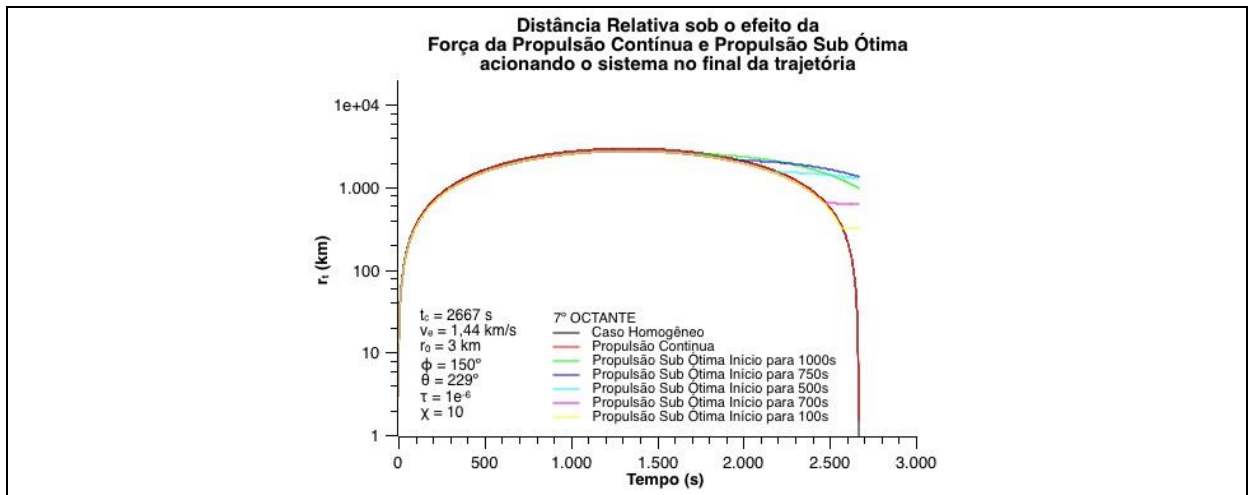


Figura A.5.97 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 229^\circ$

Propulsão Sub Ótima para $\phi = 158^\circ$ e $\theta = 237^\circ$

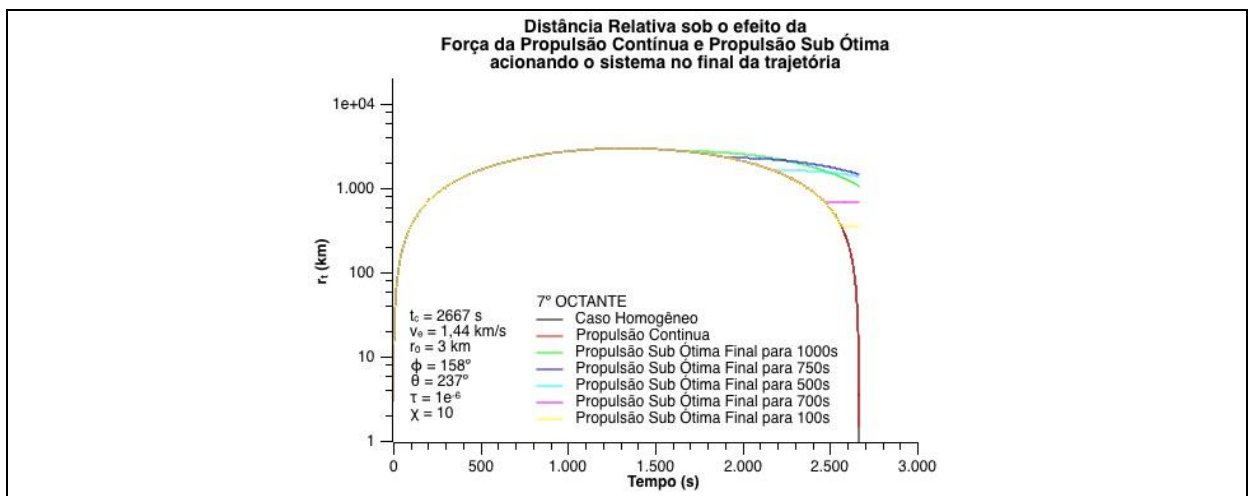


Figura A.5.98 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 229^\circ$

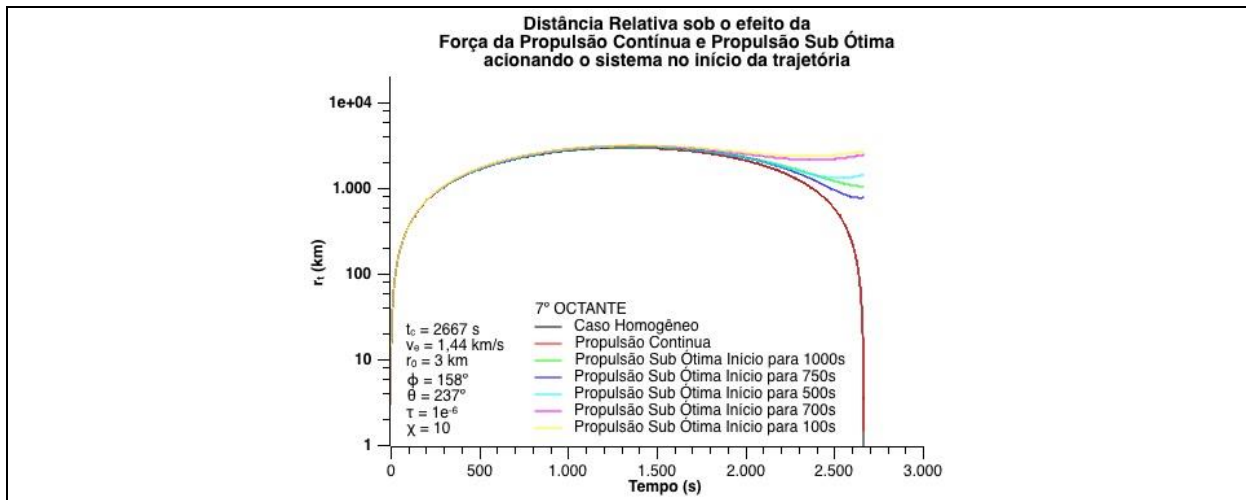


Figura A.5.99 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 229^\circ$

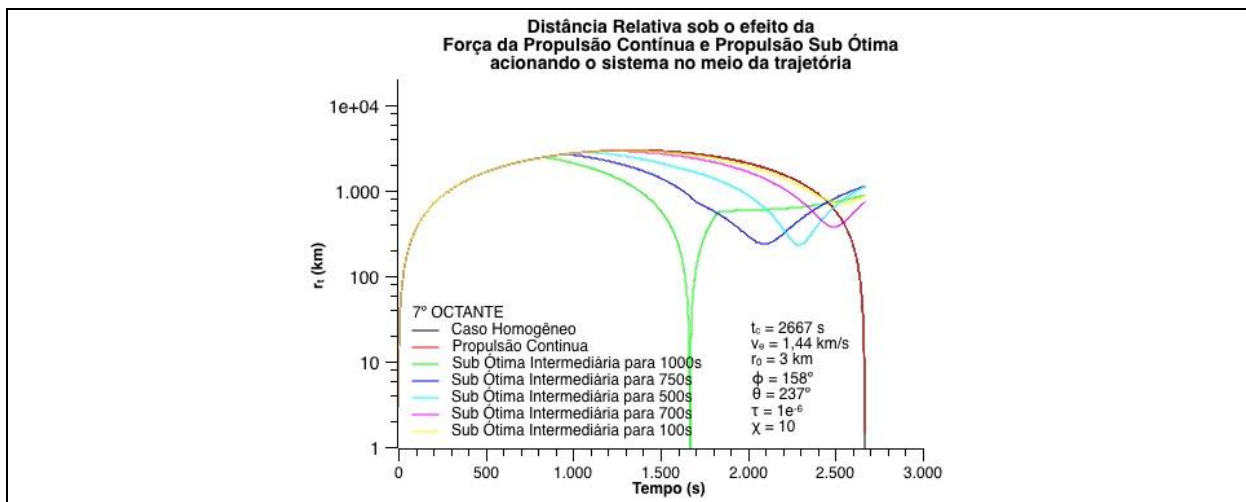


Figura A.5.100 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 229^\circ$

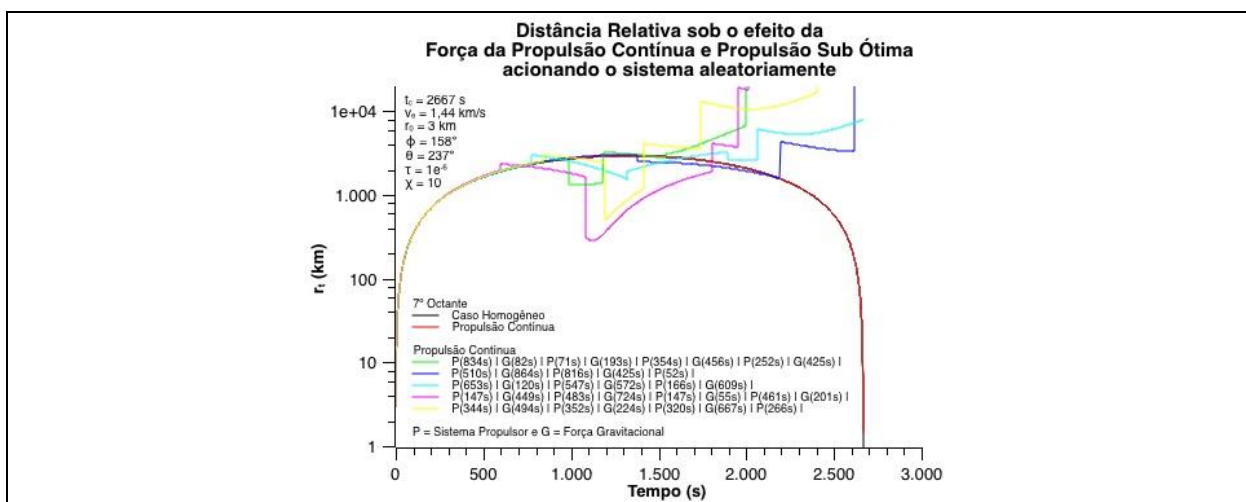


Figura A.5.101 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 229^\circ$

Propulsão Sub Ótima para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 245^\circ$

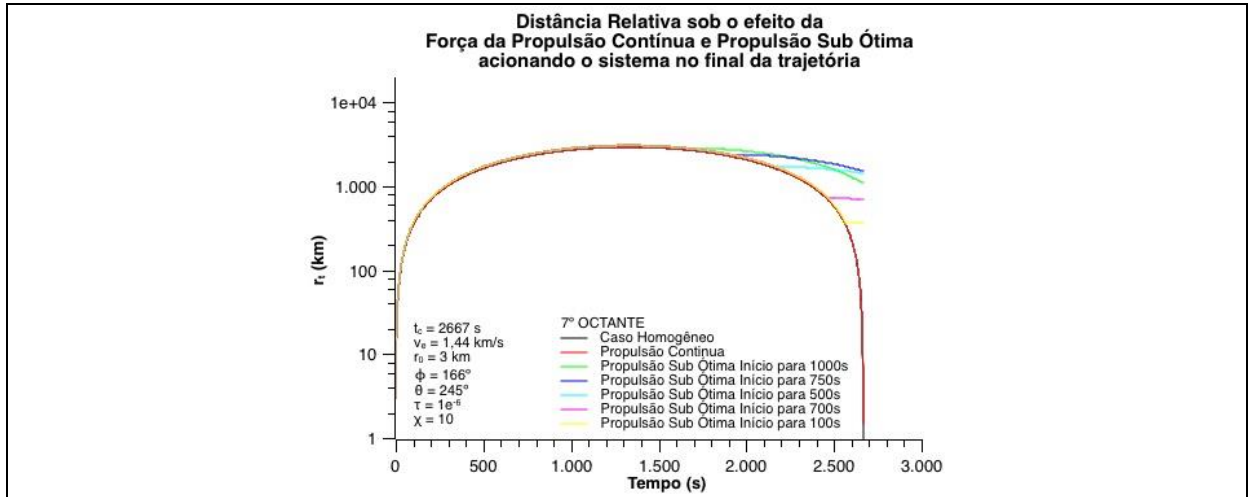


Figura A.5.102 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 245^\circ$

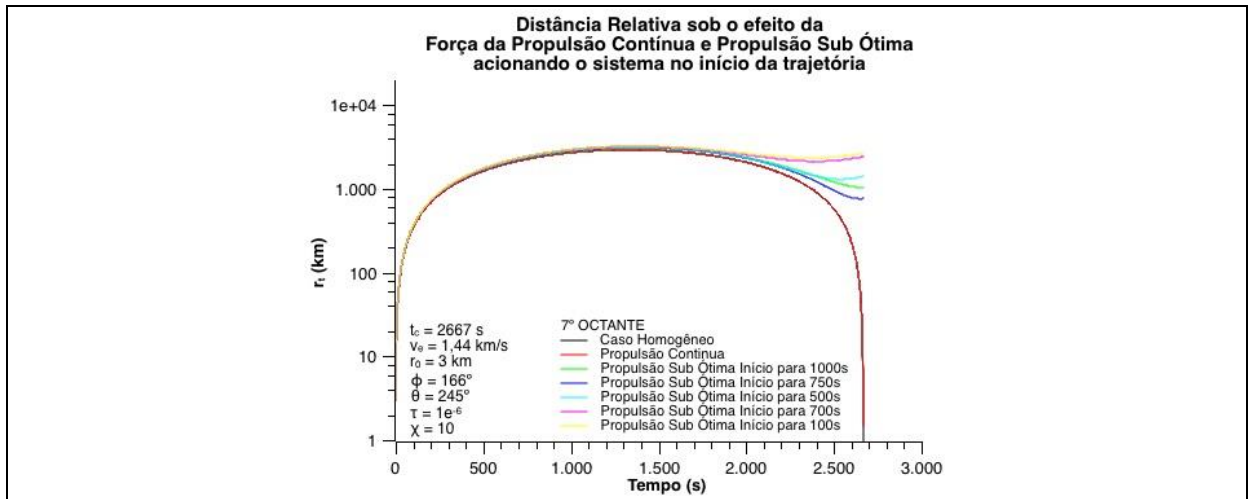


Figura A.5.103 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 245^\circ$

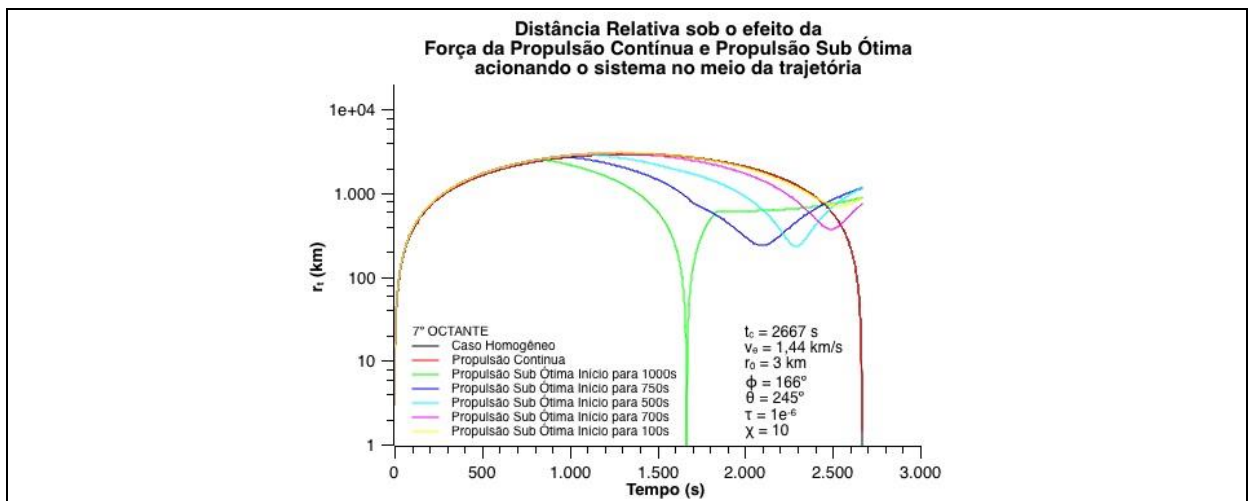


Figura A.5.104 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 245^\circ$

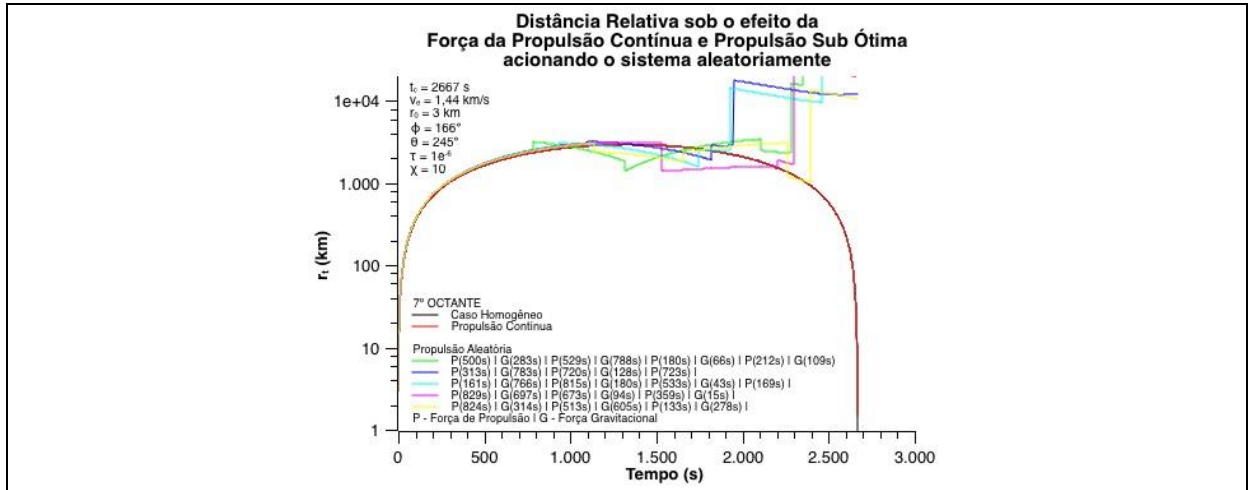


Figura A.5.105 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 245^\circ$

Propulsão Sub Ótima no 8º Octante

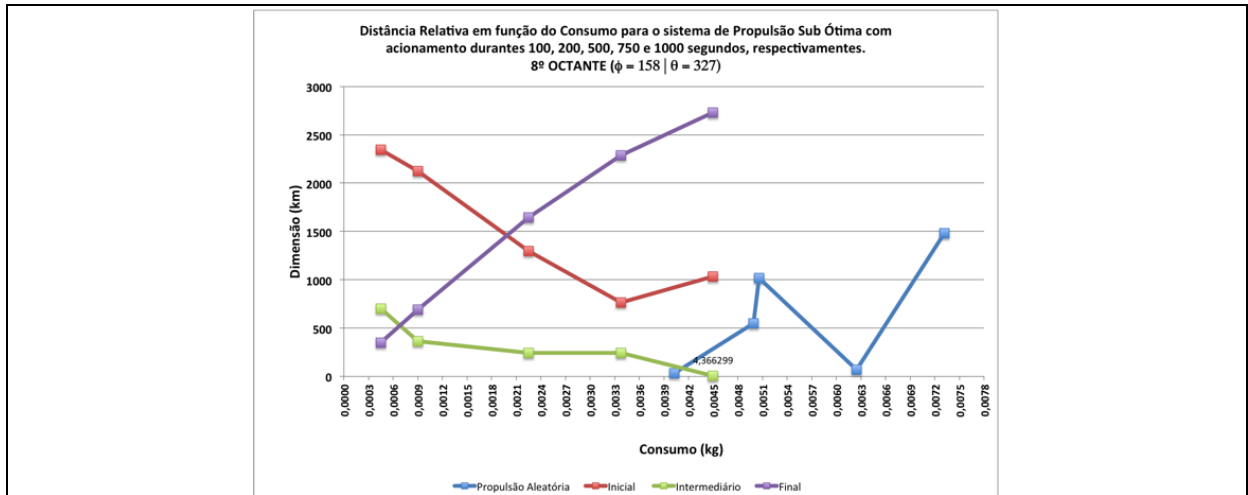


Figura A.5.106 Relação de Consumo para $\phi = 158^\circ$ e $\theta = 327^\circ$

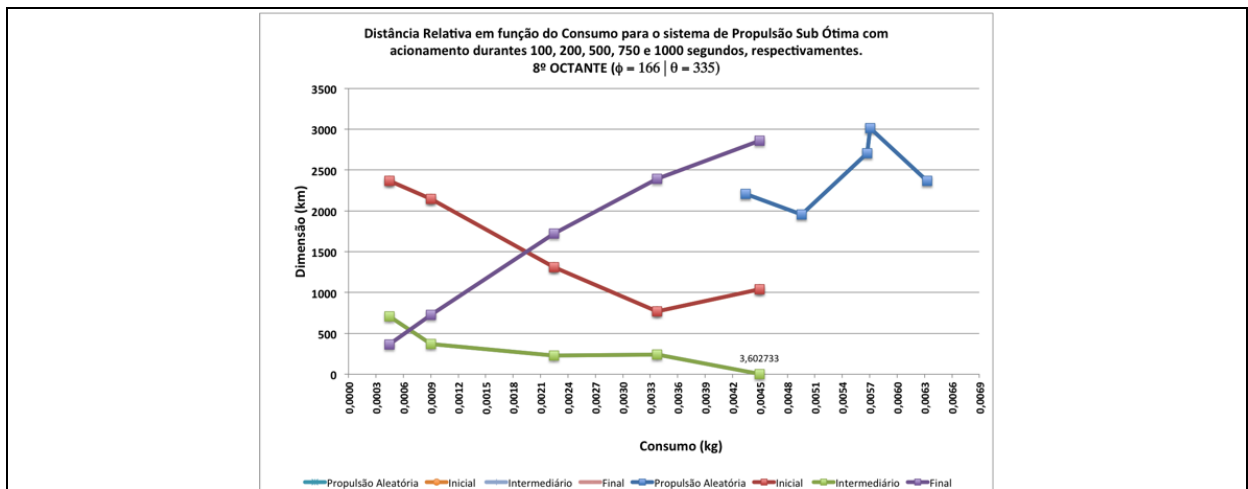


Figura A.5.107 Relação de Consumo para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 335^\circ$

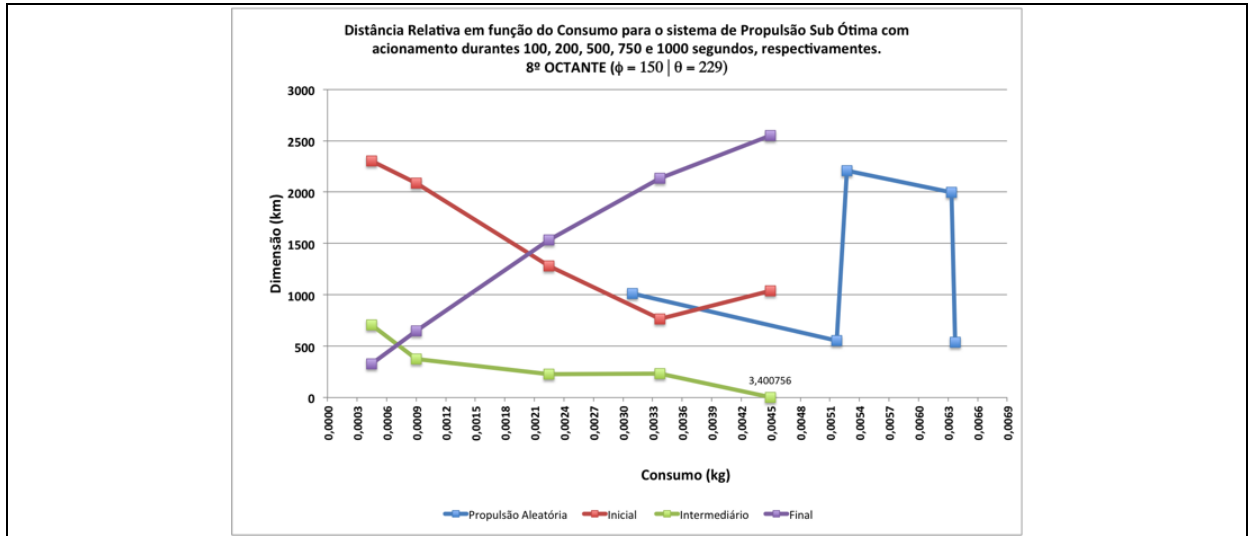


Figura 5.108 Relação de Consumo para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 319^\circ$

Propulsão Sub Ótima para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 319^\circ$

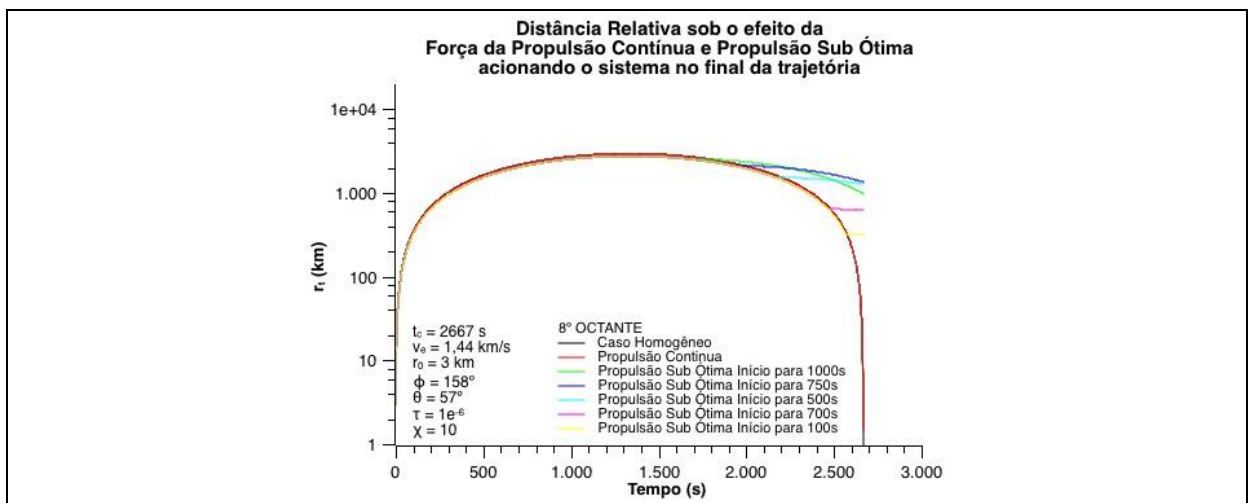


Figura A.5.109 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 319^\circ$

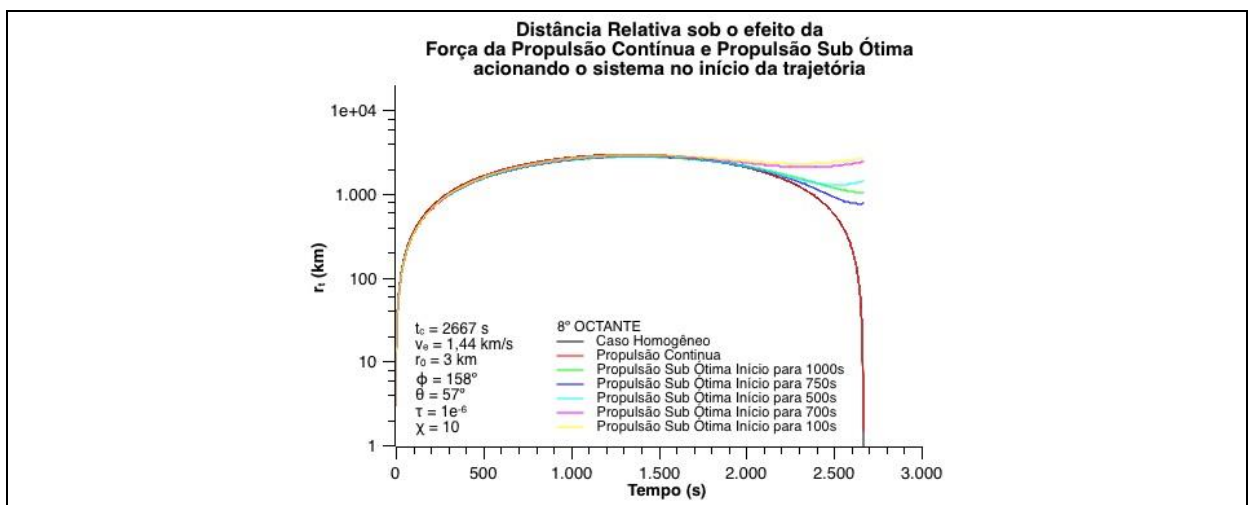


Figura A.5.110 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 319^\circ$

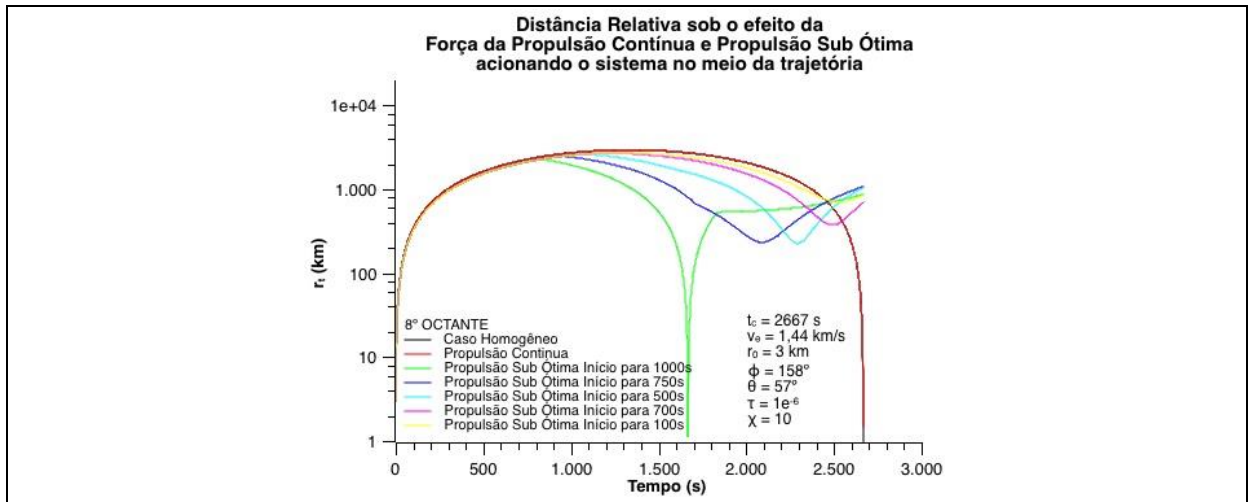


Figura A.5.111 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 319^\circ$

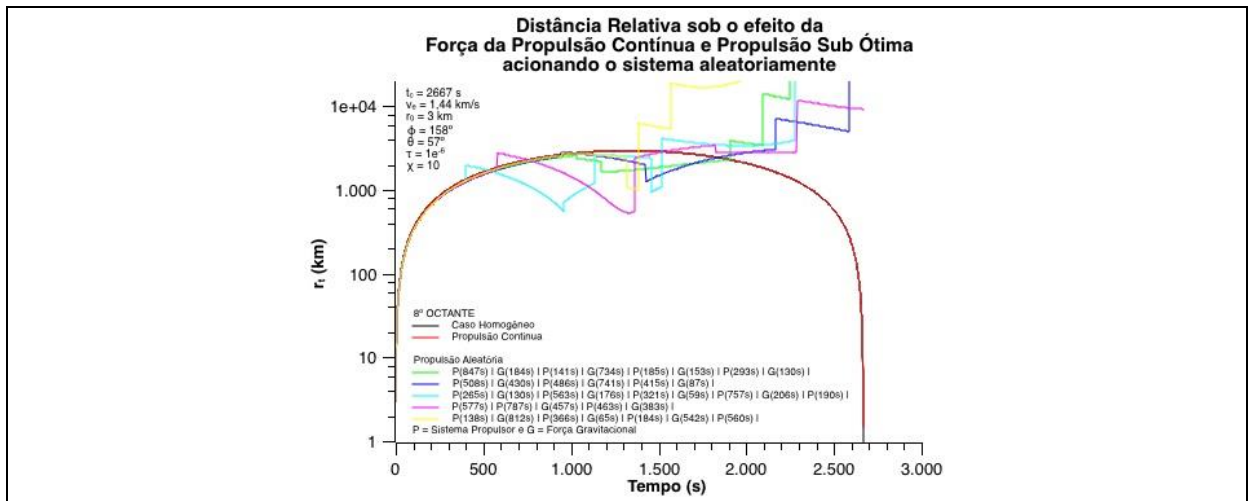


Figura A.5.112 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 150^\circ$ e $\theta = 319^\circ$

Propulsão Sub Ótima para $\phi = 158^\circ$ e $\theta = 327^\circ$

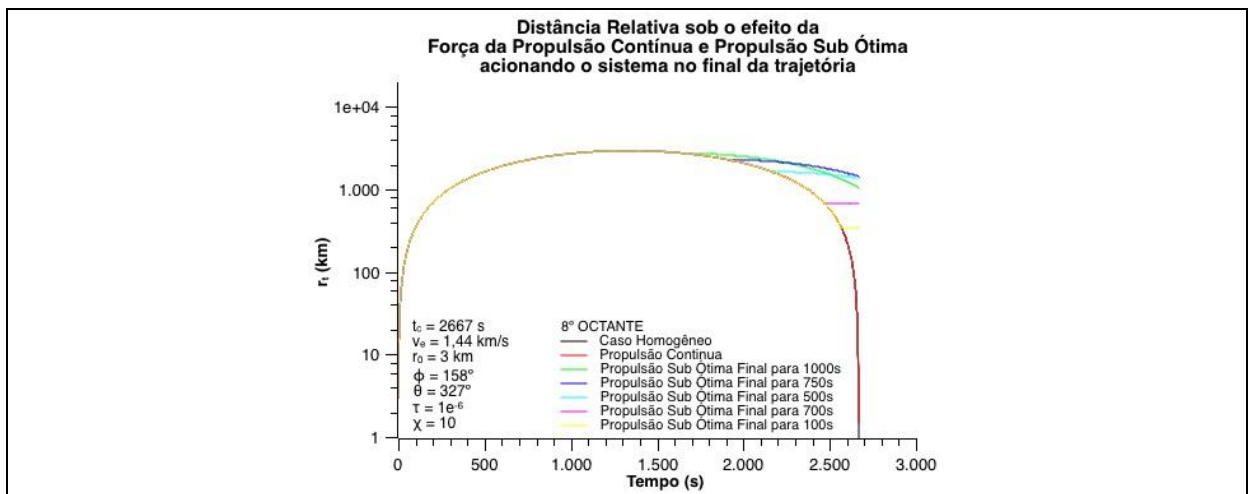


Figura A.5.113 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 158^\circ$ e $\theta = 327^\circ$

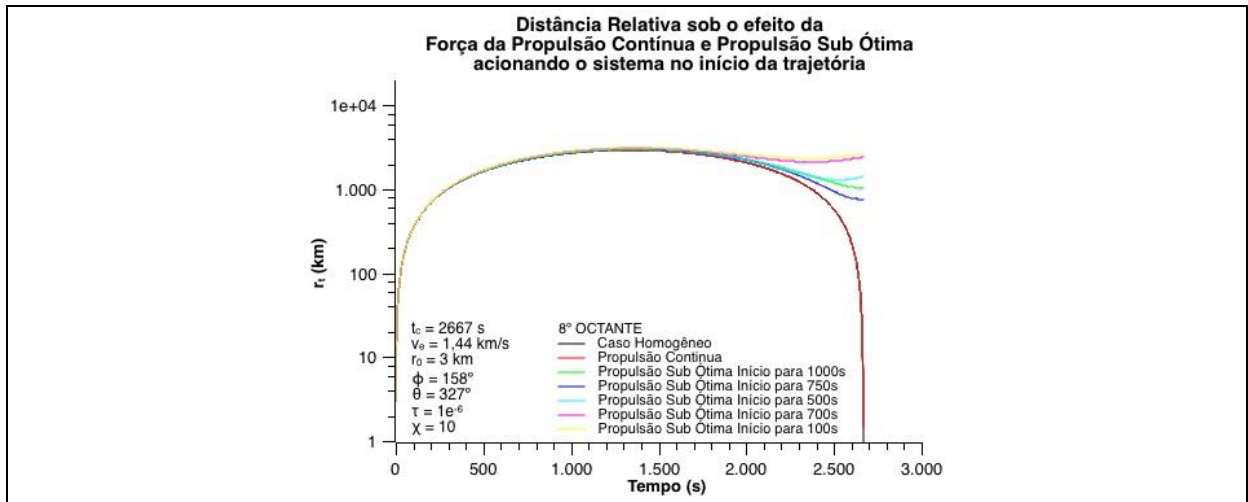


Figura A.5.114 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 158^\circ$ e $\theta = 327^\circ$

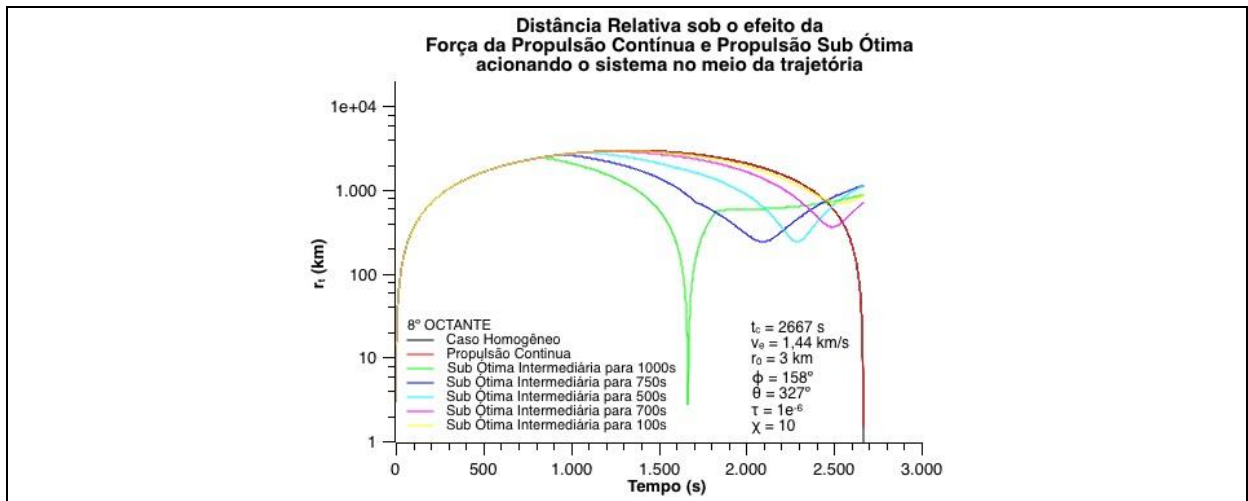


Figura A.5.115 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 158^\circ$ e $\theta = 327^\circ$

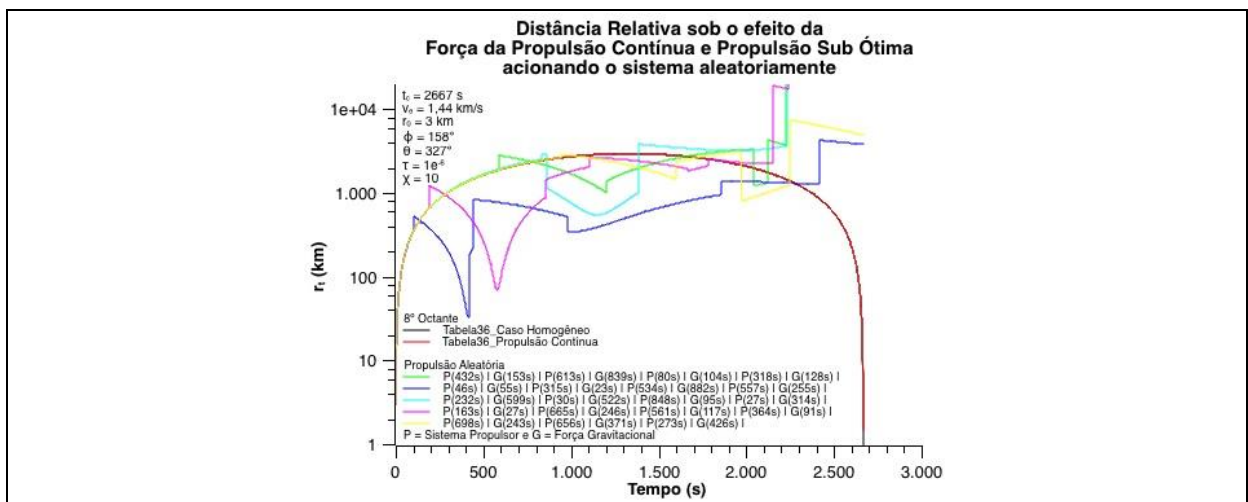


Figura A.5.116 Propulsão Sub Ótima Aleatório para $\phi = 158^\circ$ e $\theta = 327^\circ$

Propulsão Sub Ótima para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 245^\circ$

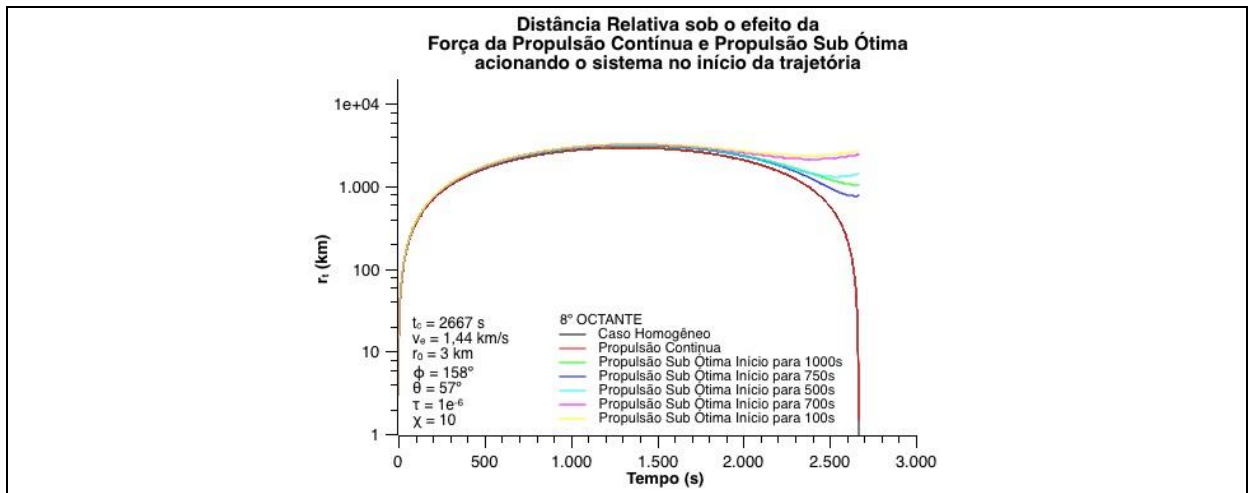


Figura A.5.117 Propulsão Sub Ótima Inicial para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 245^\circ$

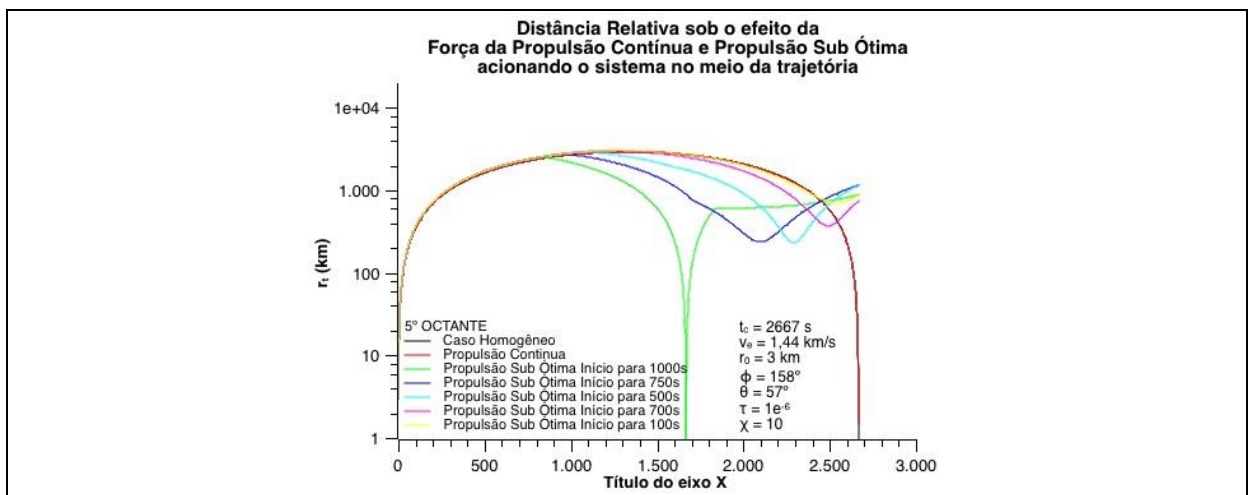


Figura A.5.118 Propulsão Sub Ótima Intermediária para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 245^\circ$

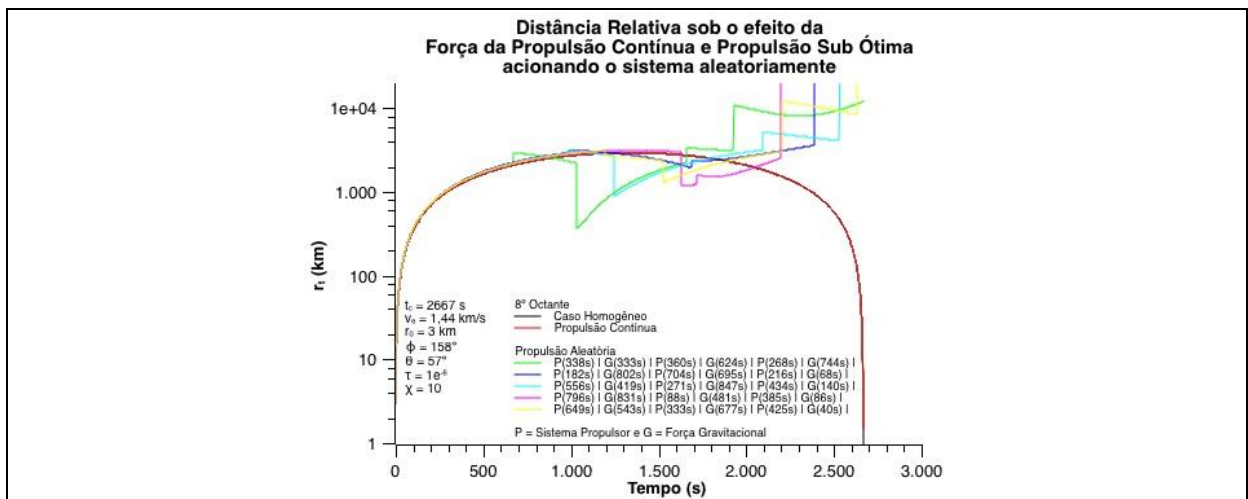


Figura A.5.119 Propulsão Sub Ótima Aleatória para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 245^\circ$

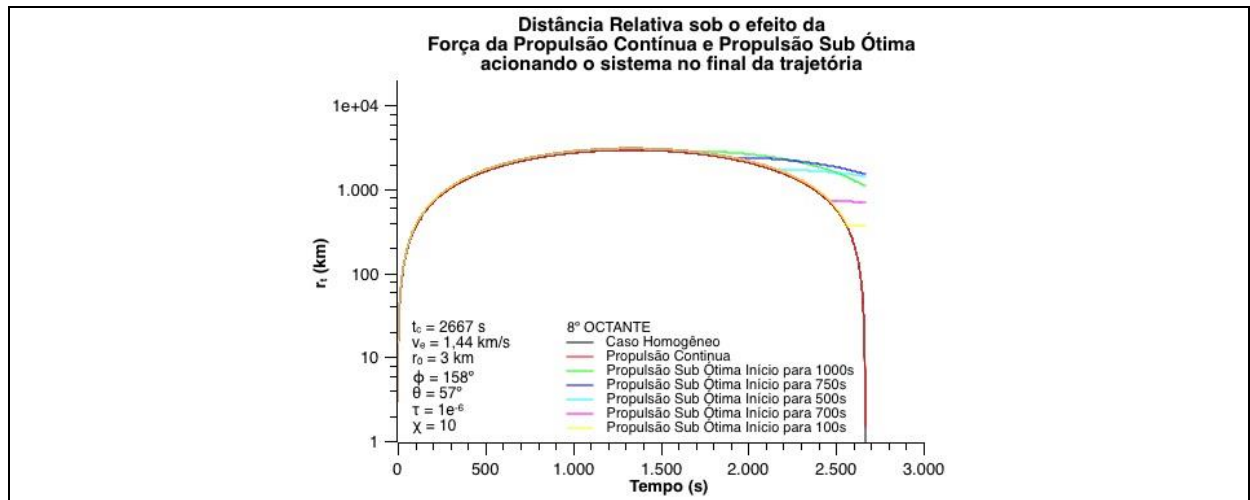


Figura A.5.120 Propulsão Sub Ótima Final para $\phi = 166^\circ$ e $\theta = 245^\circ$