

EFEITO DA RESISTÊNCIA AO CISALHAMENTO DO CONCRETO NA FLEXÃO
DE LAJES DE CONCRETO ARMADO

Mércurie Janeai Mateus Araujo Rocha

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM
CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL.

Aprovada por:

Prof. José Mário Feitosa Lima, Dr.

(UEFS)

Prof. José Renato de Castro Pessôa, Dr.

(UESC)

Prof. Paulo Roberto Lopes Lima, Dr.

(UEFS)

Prof. Geraldo José Belmonte dos Santos, Dr.

(UEFS)

FEIRA DE SANTANA, BA – BRASIL

SETEMBRO DE 2017

Ficha Catalográfica - Biblioteca Central Julieta Carteado

R574e Rocha, Mércurie Janeai Mateus Araujo
Efeito da resistência ao cisalhamento do concreto na flexão de lajes de
concreto armado / Mércurie Janeai Mateus Araujo Rocha. - 2017.
101 f.: il.

Orientador: José Mário Feitosa Lima.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Feira de
Santana, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental,
2017.

1. Concreto – Cisalhamento. 2. Lajes de concreto. I. Lima, José Mário
Feitosa, orient. II. Universidade Estadual de Feira de Santana. III. Título.

CDU: 624.012.45

Resumo da Dissertação apresentada ao PPGECEA/UEFS como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

EFEITO DA RESISTÊNCIA AO CISALHAMENTO DO CONCRETO NA FLEXÃO DE LAJES DE CONCRETO ARMADO

Mércurie Janeai Mateus Araujo Rocha

Setembro/2017

Orientador: José Mário Feitosa Lima

Programa: Engenharia Civil e Ambiental

Neste trabalho foi estudada a influência da resistência ao cisalhamento do concreto na flexão de lajes de concreto armado, através de dois modelos de análise. O primeiro modelo (modelo proposto 1) combina um modelo de dano isotrópico para o concreto, proposto por Oliver e colaboradores, e o modelo elastoplástico perfeito para o aço das armaduras. O segundo modelo (modelo proposto 2), que na verdade é uma modificação do modelo anterior, introduz uma danificação exclusiva para o módulo de elasticidade transversal do concreto, baseado em uma proposta de Matzenbacher. O comportamento das lajes foi simulado através da Teoria Clássica de Laminados sendo desenvolvida a formulação variacional do problema por meio do Princípio dos Trabalhos Virtuais. O tratamento numérico do problema foi baseado no Método dos Elementos Finitos, utilizando um elemento finito retangular com 24 graus de liberdade, incorporando o processo incremental-iterativo de Newton-Raphson com controle de carga e controle de deslocamento. A validação dos dois modelos se deu a partir da simulação de quatro lajes retangulares sob flexão, cujas análises revelaram ser imprescindível a danificação do módulo de elasticidade transversal do concreto ao se usar a mecânica do dano.

Palavras Chave: Lajes de concreto armado, mecânica do dano, método dos elementos finitos

Abstract of Dissertation presented to PPGECEA/UEFS as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

EFFECT OF CONCRETE SHEAR STRENGTH IN THE FLEXION OF
REINFORCED CONCRETE SLABS

Mércurie Janeai Mateus Araujo Rocha

September/2017

Advisor: José Mário Feitosa Lima

Department: Civil and Environment Engineering

In this work the influence of the shear strength of the concrete in the bending of reinforced concrete slabs was studied through two models of analysis. The first model (proposed model 1) combines an isotropic damage model for concrete, proposed by Oliver et al., and the perfect elastoplastic model for steel reinforcement. The second model (proposed model 2), which is in fact a modification of the previous model, introduces a unique damaging to the concrete transverse modulus of elasticity, based on a proposal by Matzenbacher. The behavior of slabs was simulated through the Classical Theory of Laminates and the variational formulation of the problem was developed through the Principle of Virtual Works. The numerical treatment of the problem was based on the Finite Element Method, using a finite rectangular element with 24 degrees of freedom, incorporating Newton-Raphson's incremental-iterative process with load control and displacement control. The validation of the two models was based on the simulation of four rectangular slabs under bending, whose analysis revealed that it is essential to damage the concrete modulus of elasticity when using the damage mechanics.

Keywords: Reinforced concrete slabs, damage mechanics, finite element method

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	JUSTIFICATIVA	3
1.2	OBJETIVOS	4
1.2.1	GERAL	4
1.2.2	ESPECÍFICOS	4
1.3	ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO	4
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	6
2.1	CONCRETO	6
2.2	MECÂNICA DO DANO	10
2.3	COMPORTAMENTO MECÂNICO E MODELO PARA O AÇO	16
3	MODELO DE DANO CONTÍNUO	19
3.1	CRITÉRIO DE DANO	20
3.2	NORMA OU DEFORMAÇÃO EQUIVALENTE	20
3.3	LIMITE INICIAL DE DANO	23
3.4	LEI DE EVOLUÇÃO DA VARIÁVEL DE DANO	23
4	MODELO NUMÉRICO	29
4.1	TEORIA CLÁSSICA DE FLEXÃO DE PLACAS LAMINADAS	29
4.1.1	Hipóteses consideradas	29
4.1.2	Campo de deslocamentos	30
4.1.3	Relações deformação-deslocamento	31
4.1.4	Relações constitutivas	32
4.1.5	Integrais de tensões (esforços solicitantes)	34
4.1.6	Trabalho virtual das forças internas	38
4.1.7	Trabalho virtual das forças externas	39

4.1.8	Princípio dos trabalhos virtuais	41
4.1.9	Equações de equilíbrio	42
4.1.10	Equações de contorno	43
4.2	FORMULAÇÃO NUMÉRICA	43
4.2.1	Caracterização do elemento	44
4.2.2	Discretização	47
4.2.3	Matriz de rigidez local	48
4.2.4	Vetor de forças	50
4.2.5	Introdução das condições de contorno	51
4.2.6	Resolução do sistema de equações de equilíbrio	51
4.2.7	Cálculo de deformações, esforços e tensões	52
4.2.8	Fluxograma da solução incremental-iterativa	52
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	57
5.1	EXEMPLO 1 - LAJE SIMPLEMENTE APOIADA COM CARREGAMENTO UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDO, ARMADURA INFERIOR NAS DUAS DIREÇÕES	58
5.2	EXEMPLO 2 - LAJE QUADRADA APOIADA NOS CANTOS, COM FORÇA CONCENTRADA NO CENTRO, ARMADURA INFERIOR NAS DUAS DIREÇÕES	71
5.3	EXEMPLO 3 - LAJE QUADRADA APOIADA NOS CANTOS, COM FORÇA CONCENTRADA NO CENTRO, ARMADURA SUPERIOR E INFERIOR NAS DUAS DIREÇÕES	76
5.4	EXEMPLO 4 - LAJE EM FLEXÃO A QUATRO PONTOS	79
6	CONCLUSÕES	83
	REFERÊNCIAS	86

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 Zona de transição no concreto	7
Figura 2.2 Curva tensão-deformação do concreto sob compressão	7
Figura 2.3 Curva tensão-deformação do concreto sob compressão diametral	8
Figura 2.4 Curva tensão-deformação de concreto submetido a cisalhamento puro	9
Figura 2.5 Elemento representativo	13
Figura 2.6 Deformação equivalente	14
Figura 2.7 Comportamento mecânico do aço a) Frágil b) Dúctil	17
Figura 2.8 Modelo para o comportamento mecânico do aço	17
Figura 3.1 Alternativas para o cálculo de τ	22
Figura 3.2 Evolução da variável de dano	26
Figura 3.3 Curva para o concreto em tração uniaxial	27
Figura 3.4 Curva para o concreto em compressão uniaxial	27
Figura 4.1 Sistema de referência e geometria de deformação da placa considerando a teoria clássica de Kirchhoff	31
Figura 4.2 Sistemas de coordenadas local e global	33
Figura 4.3 Esforços internos na placa	34
Figura 4.4 Numeração das lâminas e origem do eixo z	36
Figura 4.5 Cargas externas atuantes na placa	40
Figura 4.6 Elemento finito: dimensões, nós e eixos de referência	44
Figura 4.7 Eixos de referência locais e globais nas três direções	45
Figura 4.8 Graus de liberdade nodais	46
Figura 4.9 Sistema de numeração global dos elementos e nós	48
Figura 4.10 Tipos de carregamentos	50
Figura 5.1 Discretização da espessura da placa	57

Figura 5.2 Dimensões e armaduras da laje do Exemplo 1	59
Figura 5.3 Exemplo 1 – Curva carga x deslocamento pela formulação de Oliver et al. (1990)	60
Figura 5.4 Exemplo 1 - Carga x deslocamento segundo Lima (2013)	61
Figura 5.5 Exemplo 1 - Carga x deslocamento para diferentes formulações	65
Figura 5.6 Exemplo 1 - Perfil de deformações para a carga $q=13,45 \text{ kN/m}^2$	65
Figura 5.7 Exemplo 1 - Variável de dano d verificada na primeira camada para $q=13,45 \text{ kN/m}^2$	66
Figura 5.8 Exemplo 1 - Variável de dano d verificada na última camada para $q=13,45 \text{ kN/m}^2$	67
Figura 5.9 Exemplo 1 - Variável de dano d verificada na primeira camada para $q=15,45 \text{ kN/m}^2$	68
Figura 5.10 Exemplo 1 - Variável de dano d verificada na última camada para $q=15,45 \text{ kN/m}^2$	68
Figura 5.11 Exemplo 1 - Perfil de deformações para a carga de ruptura	69
Figura 5.12 Diagrama dos domínios de deformação na ruína de elementos de concreto armado	69
Figura 5.13 Exemplo 1 - Influência do número de camadas	70
Figura 5.14 Exemplo 1 - Comparação com outros modelos	71
Figura 5.15 Dimensões (em cm) e armaduras da laje do Exemplo 2	72
Figura 5.16 Exemplo 2 - Carga x deslocamento para $l^*=28,575 \text{ mm}$	73
Figura 5.17 Exemplo 2 - Perfil de deformações para a carga de 14,1 kN	73
Figura 5.18 Exemplo 2 - Perfil de deformações para a carga de 18,8 kN	74
Figura 5.19 Exemplo 2 - Influência do número de camadas	75
Figura 5.20 Exemplo 2 - Comparação com outros modelos	76

Figura 5.21 Dimensões (em mm) e armaduras da laje do Exemplo 3	77
Figura 5.22 Exemplo 3 - Carga x deslocamento para diferentes formulações	77
Figura 5.23 Exemplo 3 - Perfil de deformações para carga de ruptura	79
Figura 5.24 Dimensões da laje do Exemplo 4	79
Figura 5.25 Exemplo 4 - Carga x deslocamento para diferentes formulações	80
Figura 5.26 Exemplo 4 - Perfil de deformações para a carga de 12,5 kN/m	81
Figura 5.27 Exemplo 4 - Perfil de deformações para a carga de ruptura	82

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 Parâmetros do concreto simulado	26
Tabela 5.1 Propriedades dos materiais da laje do Exemplo 1	59
Tabela 5.2 Propriedades dos materiais da laje do Exemplo 2	72
Tabela 5.3 Propriedades dos materiais da laje do Exemplo 3	77
Tabela 5.4 Propriedades dos materiais da laje do Exemplo 4	80

1 INTRODUÇÃO

A plena utilização dos materiais em estruturas, de forma econômica e com segurança, depende fundamentalmente do conhecimento do respectivo comportamento mecânico dos materiais, bem como do comportamento da própria estrutura. Dentre os materiais utilizados nas estruturas um dos mais importantes é o concreto, o qual, na maioria das aplicações, é utilizado em conjunto com o aço formando o denominado concreto armado.

Esse material é empregado em diversos elementos com função estrutural, a exemplo de barras, pórticos, arcos, placas, cascas, etc. Focalizando as aplicações na construção civil, as placas de concreto armado são normalmente empregadas nos reservatórios, pisos, tetos, fundações, entre outras aplicações. As placas de concreto armado são comumente denominadas de lajes, as quais, por serem placas são caracterizadas por terem duas dimensões com tamanhos superiores à terceira dimensão (a espessura), além de normalmente serem submetidas a carregamentos transversais.

Muito esforço tem sido empreendido no sentido de melhor analisar tensões e deslocamentos em placas, tendo como trabalho pioneiro o de Kirchhoff, que no século XIX conseguiu, usando as hipóteses de Bernoulli que vinham sendo usadas para vigas, determinar uma equação diferencial para o problema. O produto desse estudo recebeu o nome de Teoria Clássica de Placas. Essa teoria, por considerar que a placa seja constituída de um material único e isotrópico, acaba por se afastar muitas vezes das condições reais das placas de concreto armado em uso, mas ainda assim permanece muito utilizada pelos projetistas de estruturas.

A Teoria Clássica de Laminados é uma extensão da Teoria Clássica de Placas, a despeito das limitações apontadas acima. Essa teoria considera que o elemento estrutural é formado por lâminas de espessura constante, perfeitamente unidas, e constituídas de materiais distintos. Os materiais podem ter módulos de elasticidade diferentes, em direções ortogonais, permitindo assim modelar materiais ortotrópicos, como diversos compósitos, dentre estes os reforçados com fibras naturais e artificiais, que tem considerável importância para a construção civil.

Outro aspecto interessante da Teoria Clássica de Laminados é permitir simular compósitos reforçados com fibras longas, que possuem assim semelhança com o

observado no caso do concreto armado, onde as barras de aço estão envolvidas pelo concreto.

Cabe frisar que essas teorias consideram o material constituinte da placa como linear elástico, o que de forma geral não corresponde ao comportamento real dos materiais comumente usados, especialmente no caso do concreto e do aço.

Para o aço utilizado como reforço em elementos de concreto pode ser admitido o comportamento elastoplástico perfeito, provendo bons resultados, conforme Lima (2013), que fez a utilização desse modelo embasado nos trabalhos de Fernandes (1998) e de Bandeira (2006), bem como em dois trabalhos desenvolvidos anteriormente no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental da UEFS, a saber: Santos (2009) e Neves (2012).

Já em relação ao material concreto, diversos modelos têm sido aplicados tendo em vista a simulação de seu comportamento não linear físico. Conforme destacado por Álvares (1993), uma série de propostas de modelo já foram apresentadas por pesquisadores, considerando desde a Elasticidade não Linear e a Plasticidade, até os modelos mais recentes, que empregam a Mecânica da Fratura e/ou a Mecânica do Dano.

Essa vertente teórica mais recente, a Mecânica do Dano, considera a perda de rigidez em decorrência das falhas e defeitos que levam a fissuração, e apesar de ter sido aplicada inicialmente aos metais percebeu-se, há poucas décadas, a possibilidade de aplicação da mecânica do dano à previsão do comportamento mecânico do concreto.

Conforme relata Pituba (1998), o concreto, antes mesmo da aplicação de qualquer carga, já apresenta um estágio de microfissuração, decorrente da retração por secagem, mais a liberação de calor com a consequente variação das dimensões, que se desenvolve nas fases iniciais de secagem e endurecimento. Com a aplicação de um esforço mecânico crescente, o processo de fissuração e a consequente perda de resistência aumentam.

Em se tratando especificamente da análise estrutural de placas de concreto armado, a modelagem não linear desses elementos tem sido estudada por diversos pesquisadores, a exemplo de Figueiras (1983), Jiang e Mirza (1997), Fernandes (1998), Cresce (2003) e Krätzig e Pölling (2004). Apesar disso, Lima (2013) ressaltou que a quantidade de trabalhos desenvolvidos versando sobre a modelagem de vigas de concreto armado é ainda bem maior do que os trabalhos que modelam lajes.

1.1 JUSTIFICATIVA

Tendo em vista a complexidade do comportamento mecânico do concreto, devido a diversos fatores como a alta não linearidade, aparecimento de deformações permanentes com o aumento progressivo de tensões, completa diferença entre comportamento quando submetido à compressão e submetido à tração, é de fato difícil formular uma lei constitutiva suficientemente geral para o mesmo, como afirmam Pituba e Proença (2005). Apesar disso, uma série de modelos foram aplicados com resultados satisfatórios, embora com a detecção de situações onde são necessárias melhorias.

Nesse sentido, o uso da Mecânica do Dano Contínuo pode ser útil. De fato, tendo em vista os trabalhos desenvolvidos no âmbito do PPGECEA usando o modelo de dano isotrópico de Mazars (1984), como em Santos (2009) e Neves (2012), verificou-se excelente precisão nos casos onde o cisalhamento não é relevante na resposta carga-deslocamento. Entretanto, conforme atestou Lima (2013), ao juntar a Teoria Clássica de Laminados com o modelo de dano de Mazars (1984) tornou-se imprescindível alterar a rigidez ao cisalhamento das lajes estudadas, mediante a danificação do módulo de elasticidade transversal do concreto, o que representou uma grande dificuldade para o autor, já que o modelo de Mazars (1984) não prevê a contribuição do cisalhamento na fissuração progressiva do concreto.

Assim, Lima (2013), para tentar resolver essa lacuna apresentou uma alternativa de danificação da resistência ao cisalhamento que não foi completamente apoiada nos princípios da mecânica do dano, e nem da mecânica da fratura. Portanto, é nesse contexto que se insere o presente trabalho, detendo-se sobre essa lacuna, diante da necessidade de incorporar no modelo de dano a progressiva deterioração da resistência ao cisalhamento do concreto com o avanço do carregamento, provendo assim soluções satisfatórias para a resposta carga-deslocamento de placas de concreto armado, em situações onde o cisalhamento é importante no processo de danificação do concreto.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Geral

Propor, a partir da Teoria Clássica de Laminados e de um modelo de Dano Contínuo, uma formulação que represente adequadamente o comportamento de placas retangulares de concreto armado, em flexão, incorporando uma danificação abrangente, que inclua também a resistência ao cisalhamento do concreto.

1.2.2 Específicos

1) Fazendo uso do Método dos Elementos Finitos, desenvolver um programa em Fortran, a partir do modelo teórico proposto, capaz de simular o comportamento estrutural das placas (lajes) em questão;

2) Verificar, com base nos resultados apresentados pelo programa e comparação com experimentos encontrados na literatura, se o uso de um modelo de dano contínuo que incorpore a perda de resistência ao cisalhamento, possibilitará uma melhor previsão da resposta carga-deslocamento, incluindo a carga de ruptura.

1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

A dissertação está estruturada da seguinte maneira:

No **Capítulo 1** é apresentada a contextualização do problema a ser investigado, Nesse sentido, são colocados alguns aspectos da modelagem de estruturas, principalmente de lajes de concreto armado por meio de modelos de dano contínuo. São também definidos os objetivos gerais e específicos do trabalho;

No **Capítulo 2** são apresentados alguns conceitos relativos ao concreto e ao seu comportamento mecânico, além de uma discussão sobre a mecânica do dano e sua fundamentação matemática. Ao final é visto como se dá o comportamento mecânico do aço e como este será aqui modelado;

No **Capítulo 3** é apresentado o modelo de dano isotrópico de Oliver et al. (1990), bem como as simplificações propostas por Köksal e Karakoç (1999);

O **Capítulo 4**, em sua primeira parte, traz a formulação analítica do problema de flexão de placas segundo a Teoria Clássica de Laminados e fazendo uso do Princípio Variacional dos Trabalhos Virtuais. Essa formulação dá os primeiros subsídios para o desenvolvimento da formulação numérica, apresentada na segunda parte, por meio da aplicação do Método dos Elementos Finitos;

No **Capítulo 5** é feita a validação do modelo aqui estabelecido simulando os resultados experimentais de quatro lajes sob flexão, encontradas na literatura, as quais já foram simuladas numericamente por diversos autores. Os resultados obtidos pelo programa aqui desenvolvido, são então analisados perante à resposta experimental, e são também comparados as demais soluções numérico-computacionais encontradas na literatura.

No **Capítulo 6** são feitas as considerações finais, apresentando, inicialmente, a síntese das conclusões da pesquisa e, posteriormente, as sugestões para trabalhos futuros, visando o prosseguimento da investigação.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 CONCRETO

O concreto é tradicionalmente um produto advindo de uma mistura em proporções adequadas de materiais inertes, os agregados, com um aglomerante hidráulico, o cimento Portland, e água necessária para a hidratação do aglomerante. Devido à sua versatilidade e, conseqüentemente, extensa aplicabilidade, é um dos materiais mais consumidos pelo ser humano (MEHTA e MONTEIRO, 2008).

Esse material pode ser caracterizado como um compósito e, macroscopicamente, notam-se duas fases: a matriz cimentícia e os agregados inertes imersos na primeira. Porém, analisando de forma microscópica a composição do mesmo é mais complexa, notando-se três fases: os agregados; a matriz; e a zona de transição.

Com relação à matriz esta não é exatamente um contínuo. Apresenta produtos da hidratação do cimento, principalmente silicatos e carbonatos, e grande quantidade de poros que podem inclusive estar preenchidos com água.

Já a zona de transição é uma região formada no entorno dos agregados. No concreto em estado fresco ocorre um fenômeno chamado de efeito parede, no qual a concentração de água em torno do agregado em relação à quantidade de cimento se torna maior do que no restante do material. A consequência é que esta região após a secagem e endurecimento, apresenta-se mais porosa (com cristais maiores e orientados de Carbonato de Cálcio) e naturalmente fissurada, sendo mecanicamente mais fraca e um limitante na resistência do concreto, fenômeno ilustrado pela Figura 2.1, onde C-S-H representa os silicatos hidratados de cálcio, CH refere-se ao carbonato de cálcio e C-A-S-H é a etringita.

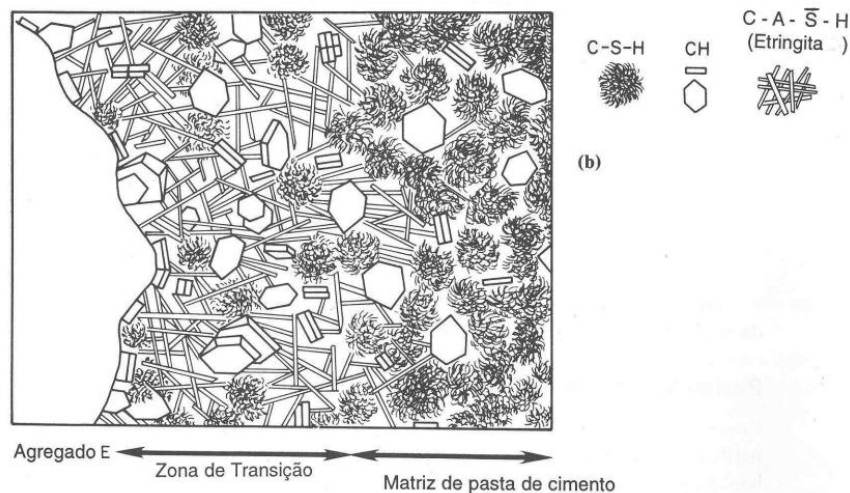


Figura 2.1 Zona de transição no concreto

FONTE: Mehta e Monteiro (2008)

Conforme afirmam Mehta e Monteiro (2008) sobre o aspecto do comportamento mecânico, essas fissuras tem um papel importante na curva tensão-deformação verificada em um ensaio de compressão. Inicialmente o concreto se comporta de maneira linear-elástica. Posteriormente, as fissuras pré-existentes na zona de transição passam a aumentar levando ao aparecimento de deformações plásticas e promovendo a não linearidade na curva tensão-deformação. O aumento de carga leva ao início e, posteriormente, à progressiva fissuração da matriz até que haja coalescência das fissuras e, conseqüente, ruptura do material. A Figura 2.2 mostra estes estágios.

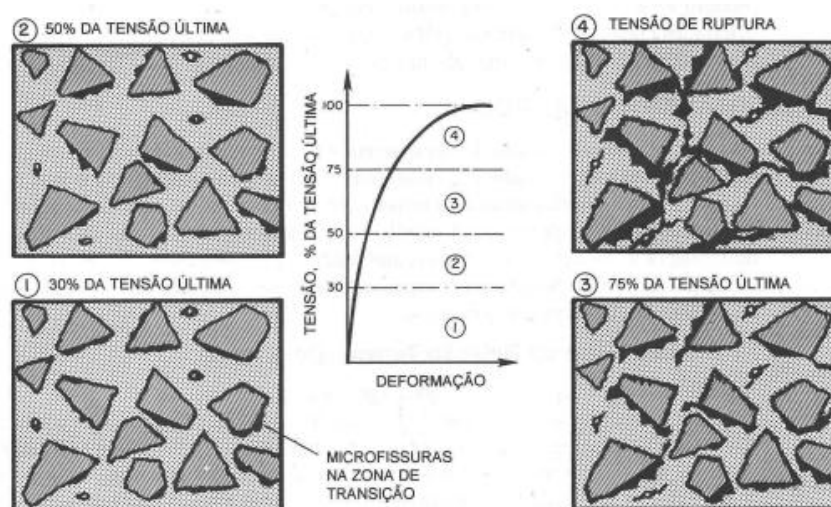


Figura 2.2 Curva tensão-deformação do concreto sob compressão

FONTE: Mehta e Monteiro (2008)

Em geral o aparecimento de deformações plásticas e não linearidade física se dá em baixos níveis de tensões normais, em torno de 30%, evidenciando a importância dessas pré-fissuras no comportamento mecânico do concreto e uma das dificuldades na modelagem do mesmo. Porém, a ruptura de um elemento de concreto submetido à compressão só se dá com a fissuração completa da matriz, e conseqüente união das fissuras. Esse aspecto faz com que seja requerida uma grande quantidade de energia e a ruptura só aconteça com considerável deformação, dando um aspecto de ductilidade ao material, fenômeno não observado com tanta intensidade, por exemplo, quando ensaiado um corpo de prova à tração axial ou compressão diametral.

À tração uma única fissura pode levar o corpo de prova à ruptura, requerendo um nível de energia bem mais baixo e atribuindo ao concreto um comportamento frágil, caracterizando assim outra complexidade para a elaboração de uma lei constitutiva do concreto: a grande diferença entre o comportamento à compressão e à tração.

Na Figura 2.3 observa-se que após ser atingido o pico de tensões pouca deformação acontece além desse estágio até ser observada a ruptura em comparação com os ensaios com compressão axial.

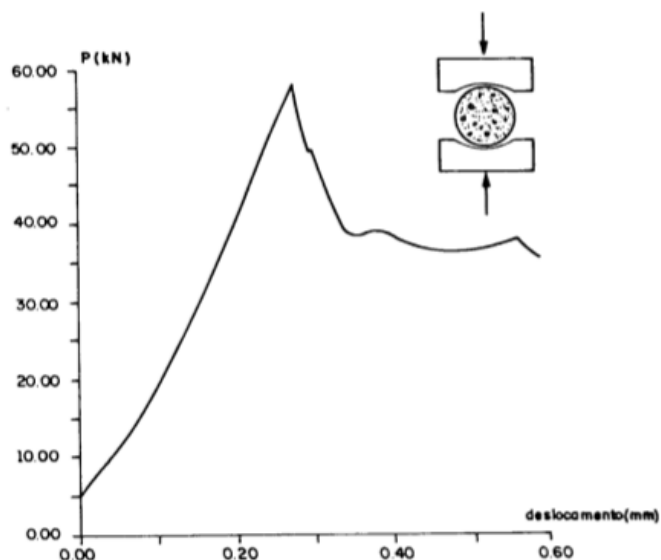


Figura 2.3 Curva tensão-deformação do concreto sob compressão diametral

FONTE: Álvares (1993)

Principalmente pela dificuldade na realização de ensaios associados à resistência ao cisalhamento, como o ensaio de cisalhamento direto, é mais difícil detectar na literatura discussões a cerca do comportamento do concreto submetido a esse esforço. Porém, como destacado em Figueiras (1983), citado por Pituba (2010), em peças de concreto armado o concreto fissurado tem uma importante contribuição na resistência do elemento estrutural e dois fenômenos são observados: a ação de "pino" e a transferência de tensão de cisalhamento entre as faces das bordas das fissuras.

Richard et al. (2010) descrevem dois fenômenos que ocorrem no concreto relacionados à parcela desviatória das tensões aplicadas ao concreto. O primeiro fenômeno, denominado *sliding*, ocorre quando há uma fissura e em função dos esforços as bordas da fissura escorregam na direção da abertura, o que é descrito em Mazars (1986) como modo II de fissuração. O segundo é a fricção, que é o atrito entre as bordas da fissura já que em geral estas se abrem contornando agregados graúdos, além de serem irregulares.

Na Figura 2.4 é apresentada uma curva tensão-deformação resultante de um ensaio de cisalhamento puro em um corpo de prova de concreto de fck igual a 36 MPa. Os dados foram extraídos do trabalho de Pituba (2010) sendo o ensaio realizado por Khaloo e Ahmad (1988).

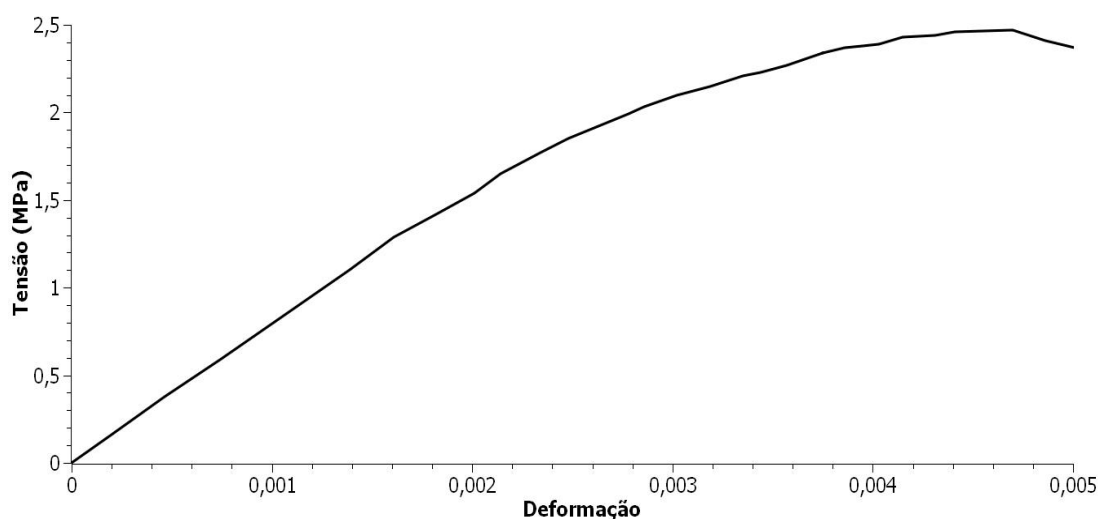


Figura 2.4 Curva tensão-deformação de concreto submetido a cisalhamento puro

FONTE: Adaptada de Pituba (2010)

2.2 MECÂNICA DO DANO

A Mecânica do Dano, segundo Álvares (1993), tem início com os estudos de Kachanov (1958) que estudou o efeito da fissuração distribuída na ruptura frágil de metais e teve contribuição de Rabotnov (1969), que propôs incluir a perda de rigidez do material como consequência da fissuração.

Focalizando o material concreto, Álvares (1993) destaca que a preexistência de fissuras no concreto antes mesmo do carregamento, fenômeno decorrente do efeito parede (onde nas proximidades dos agregados é verificado um teor de água/cimento maior do que no restante do material fresco), desencadeia a formação da fase de transição, naturalmente fissurada.

Ainda segundo Pituba e Proença (2005), o desenvolvimento da microfissuração no concreto pode ser considerado contínuo e se inicia com baixas tensões ou deformações, e as deformações permanentes são também decorrentes do processo de evolução de microfissuras. Assim, a natureza das fissuras é diferente da observada nos metais, mas o processo de perda de rigidez por conta das fissuras se assemelha.

Dentro da Mecânica do Dano há algumas variações dos modelos em decorrência das variáveis de dano escolhidas. No caso dos isotrópicos, a variável de dano é representada por uma grandeza escalar e esta é suficiente para descrever a perda de resistência do material. Lima (2013) cita diversos modelos idealizados por pesquisadores nesse contexto, como Chaboche (1988), Lubliner et al. (1989), Mazars e Pijaudier-Cabot (1989), Mazars e Pijaudier-Cabot (2001). A este respeito, detecta-se na literatura que é possível, em função do comportamento assimétrico entre tração e compressão do concreto, separar a variável de dano em duas parcelas, uma para cada tipo de esforço, como ocorre no modelo de Mazars (1984).

Nesse modelo, que é provavelmente o mais conhecido entre os modelos de dano voltados ao concreto, tem por característica representar através de uma única variável a danificação, a qual é função das deformações principais positivas. Conta em favor deste modelo o fato de serem necessários apenas cinco parâmetros, além dos usuais módulos de elasticidade e coeficiente de Poisson, para obtenção das curvas de tração e compressão características do concreto, o que facilita a implementação e utilização desse modelo.

Por outro lado, algumas limitações são apontadas. Segundo Fichant et al. (1997) após o processo de fissuração, o concreto passa a ter comportamento anisotrópico, o que faz com que muitos fenômenos não sejam levados em consideração como, por exemplo, a resposta do material às tensões cisalhantes. Mais ainda, segundo os mesmos autores, os modelos isotrópicos de uma forma geral não representam satisfatoriamente a perda da rigidez ao cisalhamento por, implicitamente, associarem-na às deformações extensionais.

Pituba (1998), em relação à anisotropia, diz que este fenômeno induzido no material com dano é um aspecto importante a ser considerado na elaboração do modelo e, no caso do concreto, mesmo antes de ocorrer carregamento outras razões podem induzir ao comportamento anisotrópico, como a própria direção de moldagem do elemento.

Na tentativa de conferir previsões mais aproximadas do comportamento do concreto, propostas mais complexas que os modelos isotrópicos têm sido produzidas. De fato, existem diversas alternativas, como modelos que empregam vetores para as variáveis de dano, como Krajcinovic e Fonseka (1981), citado por Fichant, La Borderie e Pijaudier-Cabot (1998), modelos que usam tensores de 2ª ordem, como Chaboche (1988), Cordebois e Sidoroff (1982), Murakami (1988) ou mesmo modelos que utilizam tensores de 4ª ordem como Pavan (2008), Voyiadjis et al. (2008), Pavan et al (2009) e Pituba (2010).

Assim, tem-se uma dificuldade maior na formulação e implementação desses últimos modelos (anisotrópicos) e esta complexidade se dá também em razão de melhor separar as variáveis intervenientes no problema e descrever os fenômenos de danificação dos materiais.

Sobre o formalismo matemático da Mecânica do Dano Contínuo, Pituba (2005) explica que a mesma está inserida na termodinâmica dos processos irreversíveis sendo admitidas as seguintes hipóteses:

- os processos irreversíveis podem ser aproximados por uma sequência de estados de equilíbrio aos quais correspondem valores instantâneos de um número finito de variáveis internas;
- as variáveis internas a serem escolhidas devem representar os processos dissipativos dominantes;
- a resposta do meio depende exclusivamente de seu estado atual.

Além das hipóteses inicialmente admitidas também devem ser seguidas as duas leis da termodinâmica. A primeira delas trata do princípio de balanço de energia, consistindo numa transição entre dois estados infinitamente próximos de equilíbrio termodinâmico. Desconsiderando os efeitos não mecânicos como a condução e a irradiação de calor, por exemplo, segundo Pituba (2005), o balanço para um processo dissipativo é dado pela Equação (2.1).

$$P_e = \dot{U} + \dot{E}_D + \dot{E}_C \quad (2.1)$$

onde P_e é a potência das forças externas, \dot{U} é a taxa de energia interna, \dot{E}_C é a taxa de energia cinética e \dot{E}_D é a taxa de energia dissipada.

A potência das forças externas pode ser dada pela soma da potência das tensões mais uma variação de energia cinética:

$$P_e = \sigma \cdot \dot{\epsilon} + \dot{E}_C \quad (2.2)$$

onde σ são as tensões atuantes e $\dot{\epsilon}$ é a taxa de variação das deformações.

Substituindo a Equação (2.1) na Equação (2.2), têm-se:

$$\sigma \cdot \dot{\epsilon} = \dot{U} + \dot{E}_D \quad (2.3)$$

Considerando-se agora a 2ª Lei da Termodinâmica, relacionada à entropia, têm-se que a taxa de energia dissipada deve ser sempre positiva:

$$\dot{E}_D \geq 0 \quad (2.4)$$

Comparando a Equação (2.4) com a Equação (2.3) obtém-se que:

$$\sigma \cdot \dot{\epsilon} \geq \dot{U} \quad (2.5)$$

A Equação (2.5) é chamada de desigualdade de Clausius-Duheim, e é condição necessária para verificação de processos ditos termodinamicamente admissíveis.

Para exemplificar alguns conceitos relativos à Mecânica do Dano Contínuo, tem-se a situação apresentada na Figura 2.5, de onde se retira um elemento representativo submetido à um esforço uniaxial.

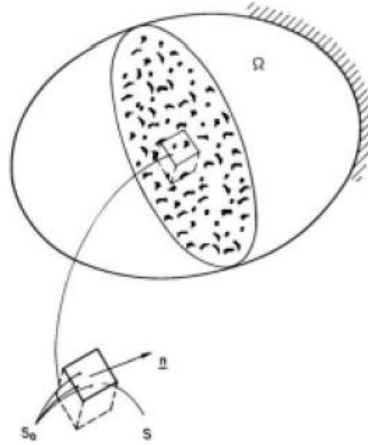


Figura 2.5 Elemento representativo

FONTE: Álvares (1993)

O elemento tem uma área total S , uma área de defeitos S_0 e uma área efetiva \bar{S} relacionadas através da Equação (2.6).

$$S_0 = S - \bar{S} \quad (2.6)$$

Sendo o elemento geometricamente contínuo pode-se aplicar o seguinte limite:

$$\omega = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{S_0}{S} \quad (2.7)$$

onde ω é uma variável representativa da danificação. Nesse caso, um valor igual a 0 significa que o material está íntegro, e um valor igual a 1 indica que toda a seção encontra-se danificada.

Expressando a área efetiva \bar{S} em função desse parâmetro tem-se:

$$\bar{S} = S(1 - \omega) \quad (2.8)$$

Estando o elemento submetido a um esforço uniaxial, uma força F , e sendo infinitamente pequeno, a tensão efetiva $\bar{\sigma}$, ou seja, a tensão que atua na área não danificada do elemento é dada por:

$$\bar{\sigma} = \frac{F}{\bar{S}} = \frac{F}{S(1-\omega)} \rightarrow \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{1-\omega} \quad (2.9)$$

onde σ é tensão normal média dada pela divisão de F pela área total S .

Também é possível relacionar a rigidez no estado íntegro com a rigidez no estado danificado, fazendo-se para isso uso da hipótese da deformação equivalente, a qual está representada na Figura 2.6:

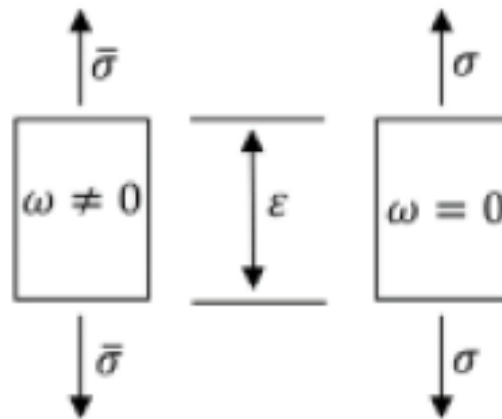


Figura 2.6 Deformação equivalente

FONTE: Adaptada de Cresce (2003)

Considerando que as deformações devem ser iguais nas duas situações, tem-se:

$$\epsilon = \frac{\bar{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{E(1-\omega)} \quad (2.10)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material íntegro.

Expressando agora a deformação em função da tensão normal média atuante na seção e do módulo de elasticidade, resulta:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (2.11)$$

com \bar{E} representando o módulo de elasticidade efetivo do material.

Isolando σ na Equação (2.10) e substituindo na Equação (2.11) têm-se a relação entre o módulo de elasticidade para o estado não danificado e o módulo de elasticidade efetivo, ou seja:

$$\bar{E} = E(1 - \omega) \quad (2.12)$$

Considerando casos mais gerais de estados de tensões, e principalmente de variáveis para representação da danificação do concreto, outras estratégias podem ser adotadas para transformação das tensões no material não danificado para as tensões efetivas. Por exemplo, em Voyiadjis et al. (2008), é usado a hipótese da equivalência da energia elástica onde é estabelecido que a energia de deformação elástica para um material danificado é equivalente, em forma, àquela do material não danificado, tal como representado na Equação (2.13).

$$\frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^e \equiv \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij}^e \quad (2.13)$$

onde σ_{ij} e $\bar{\sigma}_{ij}$ são os respectivos tensores de tensões para o estado não danificado e de tensões efetivas, e $\varepsilon_{ij}^e, \bar{\varepsilon}_{ij}^e$ são, respectivamente, as porções elásticas dos tensores de deformações nas condições não danificada e danificada.

No trabalho em questão são empregados tensores de dano de 4ª ordem, e o tensor de transformação das tensões M_{ijkl} tem a mesma forma.

$$\bar{\sigma}_{ij} = M_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (2.14)$$

Segundo os autores, o tensor M_{ijkl} deve manter o tensor de tensões efetivas simétrico, e para isso são demonstradas algumas formas de obtenção desse tensor.

Outra estratégia de transformação, dessa vez vista em Mazars e Pijaudier-Cabot (2001) e Fichant et al. (1999), é empregar um artifício utilizado em modelos de microplano, onde se faz uso de uma equação de trabalhos virtuais.

$$\frac{4\pi}{3}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^* = \int_S \{[(1-d(n))n_k\sigma_{kl}^t n_l n_i + (1-\delta(n))(\sigma_{ij}^t n_j - n_k\sigma_{kl}^t n_l n_i)]\varepsilon_{ij}^* n_j\} d\Omega \quad (2.15)$$

onde σ_{kl}^t é o tensor de tensões efetivas, σ_{ij} é o tensor de tensões para o estado não danificado, ε_{ij}^* as deformações principais, $d(n)$ e $\delta(n)$ são as superfícies de dano, e n é o vetor normal ao microplano. As tensões σ_{ij} são solução da equação dadas ε_{ij}^* e o domínio de integração é uma esfera de raio igual a 1.

2.3 COMPORTAMENTO MECÂNICO E MODELO PARA O AÇO

Apesar do concreto possuir uma boa resistência à esforços compressivos, o mesmo não ocorre quando os esforços são de tração. Por esta razão, há muito tempo se utiliza barras de aço em diversos elementos estruturais de concreto com o intuito de obter uma satisfatória resistência mecânica à tração, do material final.

O aço é uma liga metálica de ferro-carbono além de outros elementos químicos adicionados para obtenção de características específicas como durabilidade, resistência à corrosão, entre outras, sendo bastante utilizado na construção civil pela sua alta relação entre resistência mecânica e peso, garantindo estruturas mais leves entre outros benefícios.

Os aços empregados no concreto armado, CA-50 e CA-60, tem um comportamento mecânico característico. O CA-50 é um material bastante dúctil, apresenta um patamar de escoamento bem notável e é o aço empregado como reforço longitudinal, principalmente porque em caso de ruptura, para seções sub-armadas e normalmente armadas, haverá grande deformação do elemento estrutural.

Já o CA-60, utilizado por exemplo na composição de estribos para vigas de concreto armado, tem um comportamento característico frágil, não exibe grandes deformações quando submetido à tração e nem tampouco patamar de escoamento. A Figura 2.7 apresenta uma representação esquemática desses dois comportamentos.

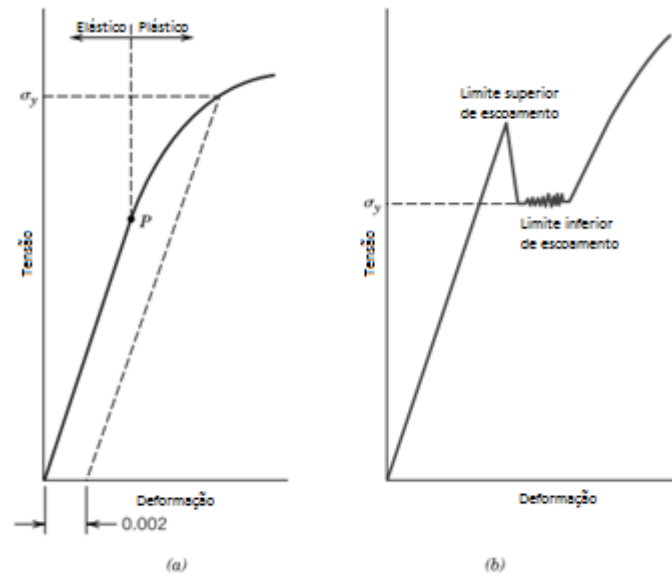


Figura 2.7 Comportamento mecânico do aço a) Frágil b) Dúctil

FONTE: Adaptada de Callister (2009)

Em razão do aço empregado para reforço de lajes ter um comportamento dúctil, costuma ser adotado um modelo plástico perfeito para o comportamento tensão-deformação, conforme representado na Figura 2.8.

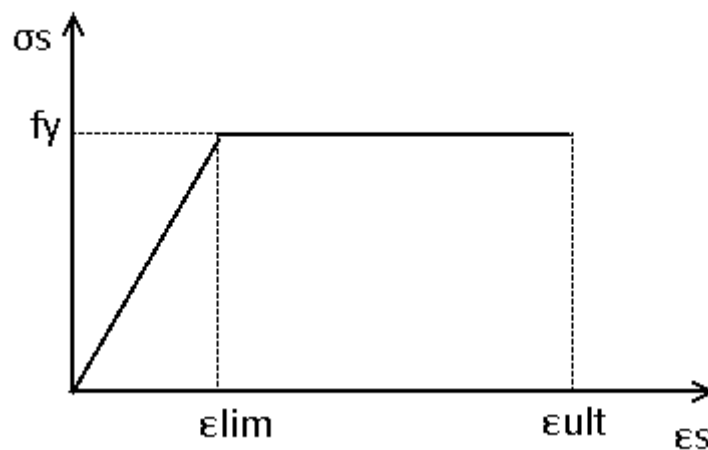


Figura 2.8 Modelo para o comportamento mecânico do aço

Observa-se que o aço tem um comportamento linear elástico até ser atingida a tensão de escoamento na sua deformação limite. Em seguida a curva tensão-deformação fica horizontal caracterizando a fase de escoamento do aço.

O módulo de elasticidade secante do aço, após iniciado o escoamento, pode ser matematicamente relacionado ao módulo de elasticidade inicial do mesmo, ou seja:

$$E = E_0(1 - D_a) \quad (2.16)$$

onde E_0 é o módulo de elasticidade inicial e D_a uma variável de danificação, a qual é calculada com base na deformação a que a barra está submetida, ou seja:

$$D_a = 1 - \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{lim}} \quad (2.17)$$

onde ε_s é a deformação linear específica, que pode ser ε_x se a barra estiver orientada a 0° ou ε_y se a barra estiver orientada a 90° . A grandeza ε_{lim} é obtida pela divisão da tensão de escoamento pelo módulo de elasticidade inicial, ou seja é a deformação linear específica associada ao início do escoamento do aço empregado na barra.

$$\varepsilon_{lim} = \frac{f_y}{E_0} \quad (2.18)$$

Para deformações superiores a ε_{ult} , a deformação última do aço, têm-se $D_a = 1$ e portanto o módulo de elasticidade secante é zero com o elemento de aço não mais contribuindo para a resistência da placa neste ponto.

No modelo em questão será considerado uma união sem defeitos entre aço e concreto (aderência perfeita), desprezando efeitos que acontecem em estruturas reais, durante a transferência de tensões.

3 MODELO DE DANO CONTÍNUO

Após uma busca por modelos de dano mais abrangentes voltados ao concreto, norteando-se pela necessária consideração nesses modelos da perda de resistência ao cisalhamento, foi escolhido o modelo de Oliver et al. (1990), o qual foi construído com base no trabalho de Simo e Ju (1987), com algumas considerações e aproximações feitas posteriormente por Köksal e Karakoç (1999).

Trata-se de um modelo isotrópico, que leva em consideração o comportamento diferenciado do concreto com relação à tração e à compressão e nos trabalhos de Oliver et al. (1990) e Köksal e Karakoç (1999) a validação se deu em pelo menos um experimento submetendo placas de concreto à cisalhamento.

A equação constitutiva para o concreto neste modelo é dada por:

$$\sigma = (1 - d)D_0 : \varepsilon \quad (3.1)$$

onde σ é o tensor de tensões, ε o tensor de deformações, d a variável de dano e D_0 o tensor constitutivo do material não danificado.

O tensor D_0 , para um material isotrópico, e considerando a aplicação em um elemento estrutural submetido a um estado plano de tensões, como será aqui considerado o concreto, é dado por:

$$D_0 = \begin{bmatrix} \frac{E}{1 - \nu^2} & \frac{\nu E}{1 - \nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1 - \nu^2} & \frac{E}{1 - \nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1 + \nu)} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

onde E e ν são respectivamente o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson iniciais do material.

A Equação (3.1) pode ser interpretada como a soma de duas parcelas de tensões atuantes: elásticas σ_0 e inelásticas σ_i , conforme desmembrado abaixo:

$$\sigma = (1 - d)D_0 : \varepsilon = D_0 : \varepsilon - dD_0 : \varepsilon = \sigma_0 - \sigma_i \quad (3.3.a)$$

$$\sigma_0 = D_0 : \varepsilon \quad (3.3.b)$$

$$\sigma_i = dD_0 : \varepsilon \quad (3.3.c)$$

3.1 CRITÉRIO DE DANO

Seguindo com a apresentação do modelo é inicialmente definido um critério de dano, dado por:

$$F(\tau^t, r^t) = \tau^t - r^t \leq 0, \forall t \geq 0 \quad (3.4)$$

onde τ^t é uma norma calculada com base no tensor de deformações ou, opcionalmente, no tensor de tensões, sendo o limite dessa norma no instante t o valor r^t . No próximo item serão dados maiores esclarecimentos sobre esses parâmetros.

Como explicado por Oliver et al. (1990), o critério de dano tem o papel de determinar em que estado se encontra o concreto, se ainda linear elástico ou se já se iniciou a danificação. Para valores menores que 0 obtidos na função F o concreto ainda se encontra no regime elástico linear.

3.2 NORMA OU DEFORMAÇÃO EQUIVALENTE

A norma τ^t é usada para comparar diferentes estados de deformação além de, segundo Oliver et al. (1990), ser possível determinar se o concreto se encontra sob carregamento, descarregamento ou mesmo recarregamento. No modelo em questão esta variável é calculada com base no tensor de deformações e nas tensões não danificadas.

Com relação ao cálculo da norma τ^t , Oliver et al. (1990) apresenta três (3) alternativas para esta operação. A primeira delas é de um modelo com igual degradação em tração e compressão.

$$\tau_I = \sqrt{\sigma_0 : D_0^{-1} : \sigma_0} \quad (3.5)$$

Esta equação também pode ser reescrita como:

(3.6)

$$\tau_I = \sqrt{\varepsilon : D_0 : \varepsilon}$$

Esta forma de cálculo da norma claramente não se aplica bem ao concreto, devido ao fato do concreto ter uma relação entre resistência à compressão e à tração bem diferentes.

A segunda possibilidade apresentada considera que o material só sofre degradação quando submetido à tração. Essa abordagem é similar à vista em Mazars (1984) e segundo o autor pode ser útil para situações onde a tração é dominante no processo de danificação do concreto.

$$\tau_{II} = \sqrt{\sigma_0^+ : D_0^{-1} : \sigma_0^+} \quad (3.7)$$

Na Equação 3.7 σ_0^+ é o tensor de tensões principais:

$$\sigma_0^+ = [\langle \sigma_0^1 \rangle , \langle \sigma_0^2 \rangle , \langle \sigma_0^3 \rangle , 0 , 0 , 0]^T \quad (3.8)$$

Sendo $\sigma_0^1, \sigma_0^2, \sigma_0^3$ as tensões principais dadas para cada uma das 3 direções e:

$$\langle \sigma_0^i \rangle = \begin{cases} \sigma_0^i & \text{se } \sigma_0^i > 0 \\ 0 & \text{se } \sigma_0^i < 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

A terceira alternativa (que foi a adotada para este trabalho) é expressa como:

$$\tau_{III} = \left(\theta + \frac{1 - \theta}{n} \right) \sqrt{\sigma_0 : D_0^{-1} : \sigma_0} \quad (3.10)$$

onde n é a razão entre a resistência à compressão e à tração do concreto, dada por:

$$n = \frac{fc}{ft} \quad (3.11)$$

O parâmetro θ é um fator de ponderação dependendo do estado tensional do concreto, calculado com base nas tensões principais:

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_0^i \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_0^i|} \quad (3.12)$$

onde $|\sigma_0^i|$ é o módulo, ou valor absoluto, de cada uma das tensões principais.

O valor de θ vai de 0 para um estado de compressão triaxial até 1 para um estado de tração triaxial. A Figura 3.1 compara as três alternativas para o cálculo da norma considerando um concreto submetido à estados biaxiais de tensão.

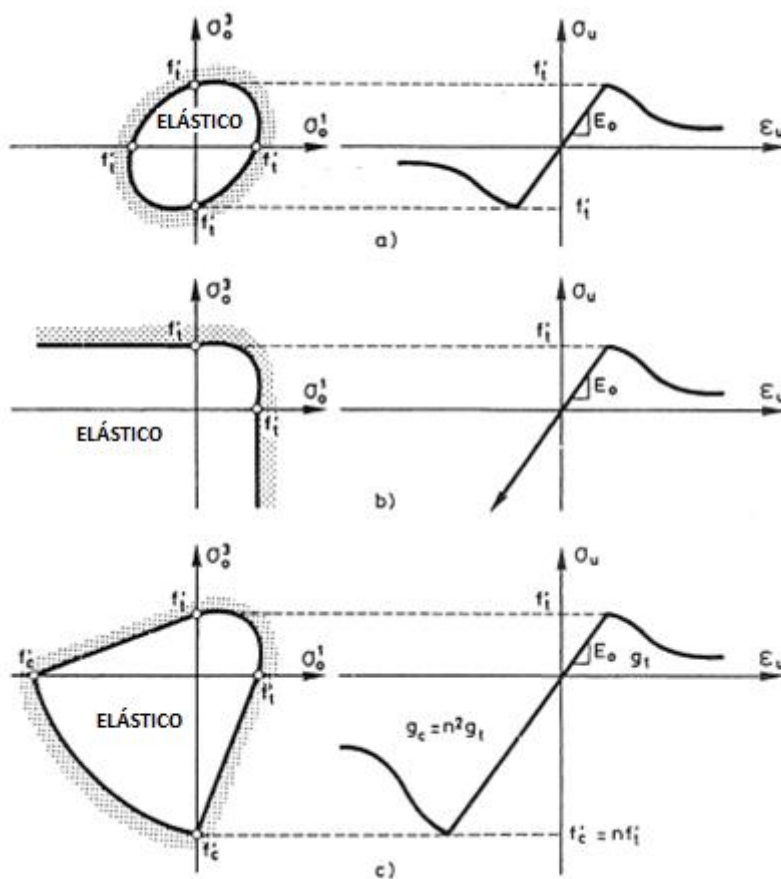


Figura 3.1 Alternativas para o cálculo de τ

FONTE: Adaptada de Oliver et al. (1990)

3.3 LIMITE INICIAL DE DANO

Com relação ao valor limite r^t para a verificação da norma, este inicia com o valor τ^* , o qual é obtido através de um ensaio de tração uniaxial. Aplicando qualquer uma das três alternativas para τ observa-se que quando atingido o valor de f_t , a resistência à tração para o concreto, τ é igual a:

$$\tau^* = \frac{f_t}{\sqrt{E_0}} \quad (3.13)$$

onde E_0 é o módulo de elasticidade inicial do concreto

3.4 LEI DE EVOLUÇÃO DA VARIÁVEL DE DANO

Para a variável de dano, Oliver et al. (1990) chegaram à seguinte lei de evolução:

$$d(\tau^t) = 1 - \frac{\tau^*}{\tau^t} \exp \left\{ A \left(1 - \frac{\tau^t}{\tau^*} \right) \right\}, 0 < \tau^* \leq \tau^t \quad (3.14)$$

A variável A está relacionada à taxa de variação de d e foi determinada por Oliver et al. (1990) através da análise da taxa de dissipação de energia, entre outras considerações, e seu valor é dado por:

$$A = \left(\frac{G_f E_0}{l^* f_t^2} - \frac{1}{2} \right)^{-1} \geq 0 \quad (3.15)$$

onde G_f é a energia de fratura por unidade de área, E_0 o módulo de elasticidade inicial, f_t a resistência à tração do concreto e l^* o comprimento característico da malha de elementos finitos.

A proposta do trabalho de Köksal e Karakoç (1999) foi realizar uma aplicação do modelo apresentado anteriormente impondo simplificações sobre o mesmo. Para

começar adotaram uma equação para G_f em função da resistência à tração obtida por Philips e Bisheng (1993).

$$G_f = 30,5 + 6,64f_t^2 \quad (3.16)$$

onde f_t é dada em MPa e G_f é expressa em N/m .

Com relação à E_0 , os autores consideram que esse valor é aproximadamente o dobro do módulo de elasticidade secante verificado quando o concreto atinge a máxima tensão num ensaio de compressão uniaxial, ou seja:

$$E_0 = \frac{2f_c}{\varepsilon_0} \quad (3.17)$$

Sendo a resistência à compressão f_c aproximadamente dez vezes maior que a resistência à tração e a deformação ε_0 aproximadamente igual a 0,002 para concretos usuais, tem-se que:

$$E_0 = \frac{2f_c}{\varepsilon_0} \approx \frac{2 * 10f_t}{0,002} \approx 10000f_t \quad (3.18)$$

com E_0 e f_t dados na mesma unidade de medida.

Substituindo as Equações (3.18) e (3.16) na Equação (3.15) têm-se:

$$A = \left(\frac{(30,5 + 6,64f_t^2) * 10000f_t}{l^* f_t^2} - \frac{1}{2} \right)^{-1} \quad (3.19)$$

Considerando que para os autores, Köksal e Karakoç (1999), G_f é dada em N/m , E_0 e f_t são dados em MPa e l^* em mm , se faz necessária a compatibilização das unidades para o cálculo de A como mostrado na Equação (3.20).

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{N}{m}\right) * (MPa)}{(mm) * (MPa)^2} &= \frac{\frac{N}{m}}{mm * MPa} = \frac{\frac{N}{m}}{mm * 10^6 * \frac{N}{m^2}} = \\ &= \frac{1}{10^6 \frac{mm}{m}} = \frac{1}{10^6 \frac{mm}{m}} * \frac{10^3 mm}{m} = \frac{1}{10^3} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Observando-se assim que é necessária a divisão do valor final por 10^3 . Introduzindo essa correção na Equação (3.19) têm-se:

$$A = \left(\frac{(30,5 + 6,64f_t^2) * 10000f_t}{l^* f_t^2 * 1000} - \frac{1}{2} \right)^{-1} = \left(\frac{(30,5 + 6,64f_t^2) * 10f_t}{l^* f_t^2} - \frac{1}{2} \right)^{-1} \quad (3.21)$$

Köksal e Karakoç (1999), por fim, consideraram um valor de f_t igual a $1,0 MPa$ na Equação (3.21) chegando a um valor para A igual a:

$$A = \left(\frac{371,4}{l^*} - \frac{1}{2} \right)^{-1} \quad (3.22)$$

Tal simplificação, para estes autores não foi considerada um problema dado que foram feitas outras de possivelmente maior influência no resultado final do modelo, como a linearização da curva de dano em função da norma apresentada na Equação (3.14). Para este trabalho, no intervalo de resistências à tração dos concretos e comprimentos característicos que posteriormente foram utilizados na validação do modelo, não se verificou visualmente grande diferença em testes similares aos ilustrados nas Figuras 3.2 a 3.4 entre as curvas utilizando os valores completos como na Equação (3.21) e com o valor simplificado da Equação (3.22).

A Figura 3.2 mostra como se dá, de forma geral, a variação da variável de dano d com o avanço da variável τ , sendo mostradas na ilustração curvas para diferentes valores de l^* , cabendo informar que os parâmetros admitidos para o material estão listados na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 Parâmetros do concreto simulado

E	30,0 GPa
ν	0,20
f_c	25,0 MPa
f_t	2,5 MPa

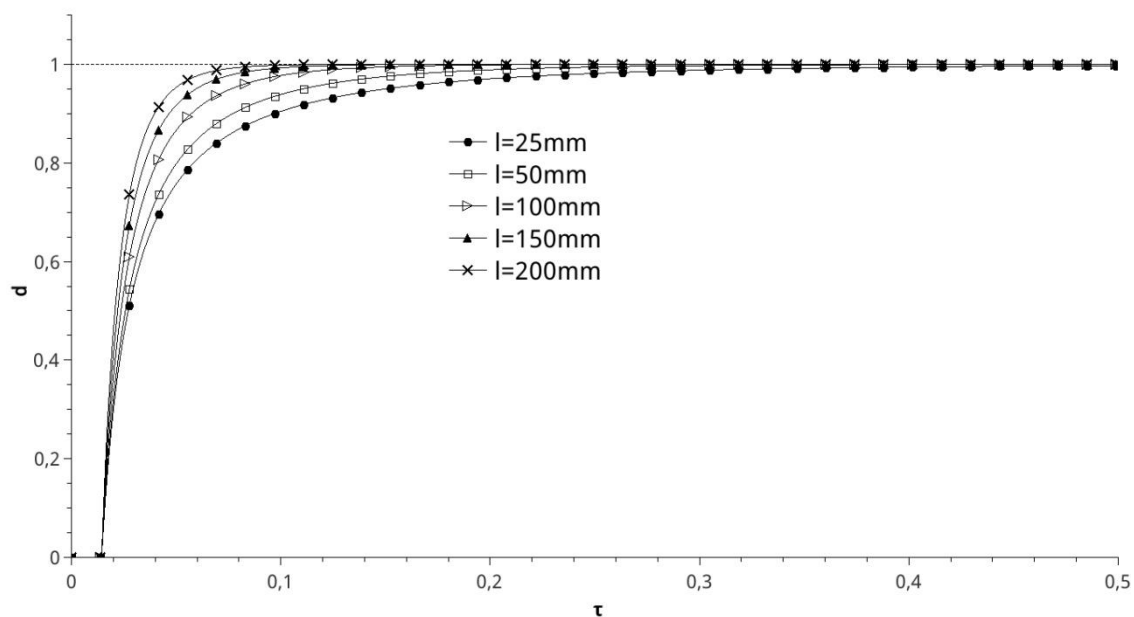


Figura 3.2 Evolução da variável de dano

Nas Figuras 3.3 e 3.4 são apresentadas curvas que simulam o concreto da Tabela 3.1 submetido à tração e à compressão uniaxial.

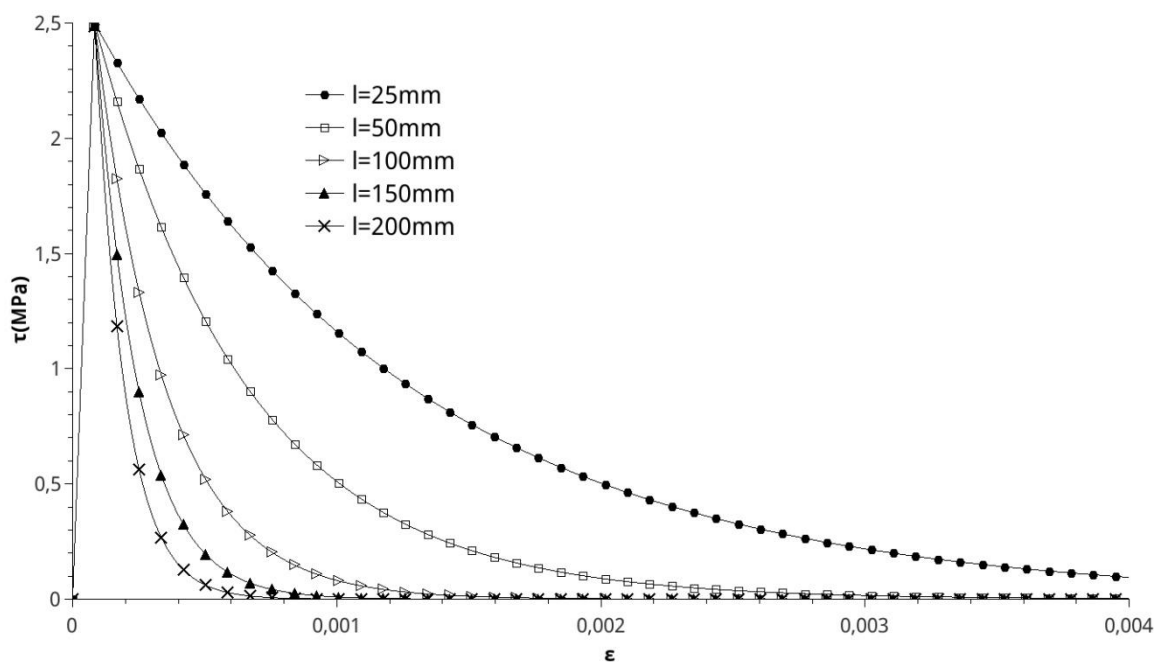


Figura 3.3 Curva para o concreto em tração uniaxial

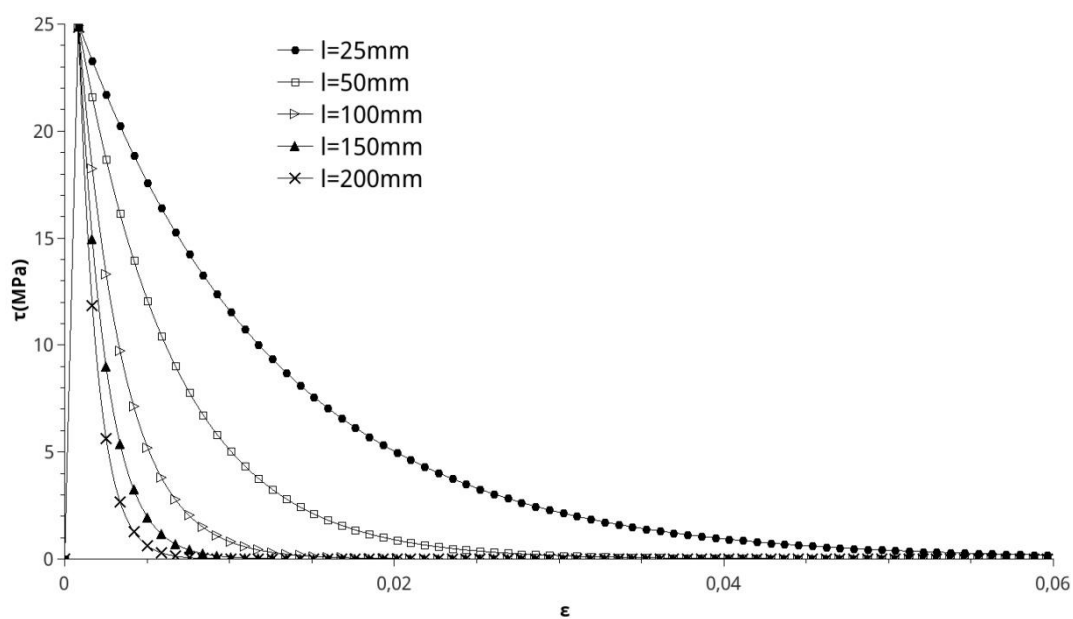


Figura 3.4 Curva para o concreto em compressão uniaxial

Como pode ser observado nesse conjunto de curvas para os dois tipos de esforço o concreto tem um comportamento linear elástico até atingir a tensão máxima. Após isso tem um comportamento de abrandamento de tensões determinado pela evolução da variável de dano d .

Dadas as características do modelo original e as simplificações feitas por Köksal e Karakoç (1999), o comportamento pós-pico é determinado pela variável A , dada pela

Equação (3.22), e conseqüentemente pelo comprimento característico da malha de elementos finitos. Para as simulações que serão feitas aqui, salvo indicação contrária, para o comprimento característico da malha será admitido valor igual à raiz quadrada da área dos elementos finitos, metodologia também adotada por Oliver et al. (1990) e Köksal e Karakoç (1999).

Uma outra possibilidade para esta etapa da modelagem é caso se tenha acesso às curvas tensão-deformação obtidas por ensaios de controle de deslocamento que descrevam os comportamentos pós-pico do concreto admitir o valor que seja mais representativo.

4 MODELO NUMÉRICO

Os modelos físicos para os materiais constituintes das placas aqui estudadas, de dano isotrópico contínuo para o concreto, e elastoplástico perfeito para o reforço de aço, serão incorporados em um programa de análise linear de placas laminadas, desenvolvido anteriormente por Rocha (2012) com base no método dos elementos finitos. Nesse sentido, inicialmente é apresentada a formulação analítica do problema utilizando a Teoria Clássica de Laminados (com a não linearidade física dos materiais constituintes embutida nas relações tensão-deformação) em termos do Princípio Variacional dos Trabalhos Virtuais. Posteriormente é apresentada uma síntese da formulação computacional, com base no método dos elementos finitos.

A escolha pela Teoria Clássica de Laminados ao invés da Teoria de Primeira Ordem, ou teorias de ordens mais altas, as quais levam em consideração deformações provocadas por cisalhamento no âmbito das normais ao plano médio da placa, se deu por buscar neste trabalho uma comparação efetiva com o que foi desenvolvido por Lima (2013). Também foi levada em conta que outros autores como Jiang e Mirza (1997) e Fernandes (1998) também desconsideraram esses efeitos do cisalhamento em suas propostas, e alcançaram bons resultados. Por fim, cabe ressaltar que essa escolha tem a vantagem de conduzir a uma formulação de menor grau de complexidade, facilitando assim a geração de códigos computacionais de análise estrutural.

4.1 TEORIA CLÁSSICA DE FLEXÃO DE PLACAS LAMINADAS

4.1.1 Hipóteses consideradas

Na Teoria Clássica de Flexão de Placas Laminadas (TCL) supõe-se que a geometria de deformação segue as mesmas hipóteses de Kirchhoff instituídas para a análise de placas isotrópicas e delgadas. Nesse contexto, assumindo desde já que a placa retangular laminada é formada por lâminas (ou camadas), onde cada camada apresenta uma espessura constante, admitem-se as seguintes hipóteses formadoras dessa teoria:

- 1) Supõe-se que o carregamento na placa acarreta rotações e deformações pequenas, perante a unidade, enquadrando o problema no âmbito linear geométrico;

2) A placa é considerada delgada, ou seja, a espessura é relativamente pequena em relação às outras duas dimensões;

3) A placa é formada por lâminas perfeitamente coladas entre si, isto é, sem deslizamento ou deslocamento.

4) Linhas inicialmente retas e perpendiculares à superfície média da placa permanecem retas e normais a esta superfície, quando o laminado for deformado;

5) Os segmentos normais à superfície média são considerados inextensíveis, isto é, têm comprimentos constantes;

6) Admite-se que todas as cargas são aplicadas na superfície média da placa, inclusive em seu contorno.

4.1.2 Campo de deslocamentos

As Hipóteses 1 a 5 acarretam no seguinte campo de deslocamentos:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (4.1.a)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (4.1.b)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (4.1.c)$$

onde u , v e w são os deslocamentos de um ponto qualquer da placa nas direções x , y e z , respectivamente, e u_0 , v_0 e w_0 são os deslocamentos nessas mesmas direções do ponto associado ao primeiro, e localizado na superfície média da placa (ver Figura 4.1). Cabe observar que os eixos x e y pertencem ao plano médio da placa, conforme também ilustrado na Figura 4.1.

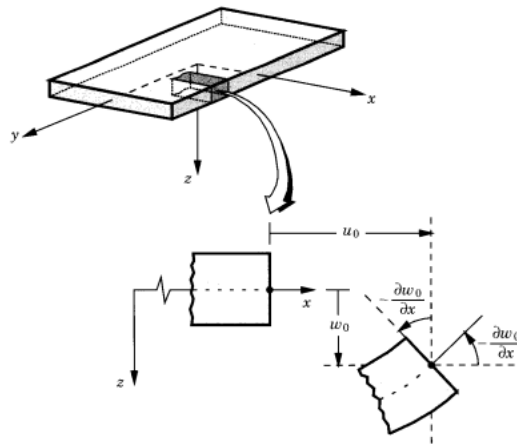


Figura 4.1 Sistema de referência e geometria de deformação da placa considerando a teoria clássica de Kirchhoff

FONTE: Reddy (2004)

4.1.3 Relações deformação-deslocamento

Sendo válido o comportamento linear geométrico, admitido através da Hipótese 1, têm-se as seguintes relações deformação-deslocamento:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.2.a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4.2.b)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4.2.c)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.2.d)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (4.2.e)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (4.2.f)$$

onde ε_x , ε_y , ε_z , são as deformações lineares nas direções x , y e z , respectivamente, e γ_{xy} , γ_{xz} e γ_{yz} são as distorções (ou deformações angulares).

Da Hipótese 5 tem-se que a deformação linear específica segundo a direção transversal ao plano médio da placa é nula, ou seja $\varepsilon_z = 0$. Por sua vez, a Hipótese 4, em que as linhas normais à superfície permanecem normais após a flexão, acarreta que as distorções γ_{xz} e γ_{yz} são nulas na superfície média da placa. Portanto, partindo-se dessas observações e substituindo o campo de deslocamentos (4.1) nas expressões acima, tem-se que:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (4.3.a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad (4.3.b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \quad (4.3.c)$$

$$\varepsilon_z = 0 \quad (4.3.d)$$

$$\gamma_{xz} = 0 \quad (4.3.e)$$

$$\gamma_{yz} = 0 \quad (4.3.f)$$

Cabe observar, portanto, que essas relações deformação-deslocamento indicam que se trata de um problema de estado plano de deformação.

4.1.4 Relações constitutivas

Partindo-se para o uso de matrizes constitutivas associadas ao estado plano de tensões para cada lâmina da placa de material ortotrópico (Hipótese 6) acarreta em:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

com σ_x e σ_y sendo as tensões normais, nas direções x e y respectivamente, e τ_{xy} a tensão cisalhante.

A matriz quadrada \bar{Q}_{ij} , denominada de matriz de rigidez reduzida da lâmina em relação ao sistema global de coordenadas, é função das propriedades mecânicas da lâmina e seus elementos são assim definidos:

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2 * Q_{66}) \text{sen}^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \text{sen}^4 \theta \quad (4.5.a)$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \text{sen}^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\text{sen}^4 \theta + \cos^4 \theta) \quad (4.5.b)$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11} \text{sen}^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \text{sen}^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \quad (4.5.c)$$

$$\bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \text{sen} \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \text{sen}^3 \theta \cos \theta \quad (4.5.d)$$

$$\bar{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \text{sen}^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \text{sen} \theta \cos^3 \theta \quad (4.5.e)$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \text{sen}^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\text{sen}^4 \theta + \cos^4 \theta) \quad (4.5.f)$$

onde θ representa o ângulo de orientação da fibra de reforço da camada, formado entre os eixos x_1 (local) e x (global), conforme representado na Figura 4.2.

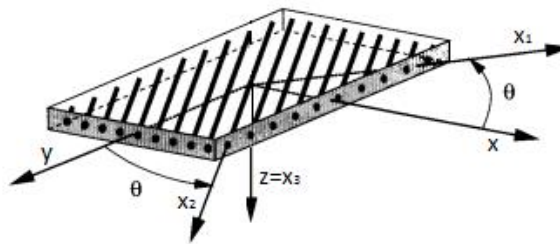


Figura 4.2 Sistemas de coordenadas local e global

FONTE: Adaptada de Reddy (2004)

Os demais termos das Equações (4.5.a) a (4.5.f) são os elementos da matriz de rigidez reduzida da lâmina, em relação ao sistema local de coordenadas, os quais são assim definidos:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \quad (4.6.a)$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12} E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \quad (4.6.b)$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (4.6.c)$$

$$Q_{66} = G_{12} \quad (4.6.d)$$

Nessas equações, E_1 e E_2 são os módulos de elasticidade nas direções locais x_1 e x_2 da camada, e G_{12} é o módulo de elasticidade transversal associado às direções x_1 e x_2 . Além disto, ν_{12} e ν_{21} são os coeficientes de Poisson, também associados às direções x_1 e x_2 , e relacionados por:

$$\frac{\nu_{12}}{\nu_{21}} = \frac{E_1}{E_2} \quad (4.7)$$

4.1.5 Integrais de tensões (esforços solicitantes)

Os esforços solicitantes, por unidade de comprimento, representados na Figura 4.3, são definidos pelas seguintes integrais de tensões, avaliados na espessura h da placa laminada:

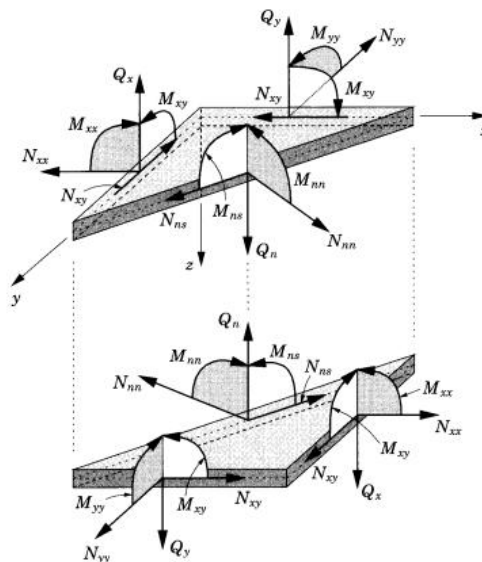


Figura 4.3 Esforços internos na placa

FONTE: Reddy (2004)

$$N_{xx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz \quad (4.8.a)$$

$$N_{yy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz \quad (4.8.b)$$

$$N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz \quad (4.8.c)$$

$$M_{xx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz \quad (4.8.d)$$

$$M_{yy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz \quad (4.8.e)$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz \quad (4.8.f)$$

onde N_{xx} , N_{yy} , N_{xy} são esforços de membrana por unidade de comprimento e M_{xx} , M_{yy} e M_{xy} são momentos fletores e tursor dados por unidade de comprimento. Esses esforços podem ser expressos em função da laminação da placa, ou seja:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (4.9.a)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (4.9.b)$$

sendo n o número de lâminas que compõe a placa, enquanto z_k e z_{k+1} são as coordenadas segundo o eixo z de início e fim de cada uma das lâminas (ver Figura 4.4).

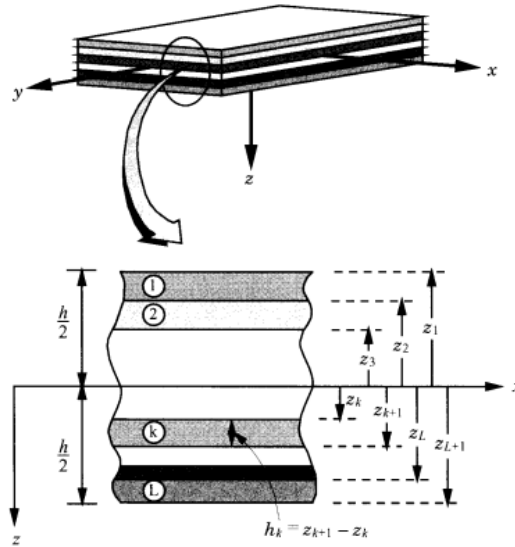


Figura 4.4 Numeração das lâminas e origem do eixo z

FONTE: Reddy (2004)

Substituindo em (4.9) as Equações (4.4), que relacionam as tensões e deformações:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} dz \right\} \quad (4.10.a)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} z dz \right\} \quad (4.10.b)$$

Substituindo agora em (4.10) as relações deformação-deslocamento (4.3), tem-se que:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial^2 x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial^2 x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} dz \right\} \quad (4.11.a)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial^2 x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial^2 x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \right\} z dz \quad (4.11.b)$$

Fazendo as operações de integração das Equações (4.11) e reorganizando as expressões, resulta:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.12.a)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.12.b)$$

A matriz formada pelos elementos A_{ij} é denominada matriz de rigidez extensional. Por sua vez, a matriz com os elementos D_{ij} é a matriz de rigidez flexional e a composta pelos elementos B_{ij} é a matriz de rigidez de acoplamento flexo-extensional. Os elementos A_{ij} , B_{ij} e D_{ij} são funções das propriedades mecânicas e espessura das lâminas, conforme as respectivas expressões a seguir:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij}(1, z, z^2) dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)}(1, z, z^2) dz \quad (4.13)$$

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1} - z_k) \quad (4.14.a)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} * \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^{(k)} ((z_{k+1})^2 - (z_k)^2) \quad (4.14.b)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} * \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^{(k)} ((z_{k+1})^3 - (z_k)^3) \quad (4.14.c)$$

Desenvolvendo os produtos matriciais em (4.12), têm-se as expressões finais para os esforços solicitantes:

$$N_{xx} = A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{16} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - B_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - B_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - 2B_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \quad (4.15.a)$$

$$N_{yy} = A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{26} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - B_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - B_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - 2B_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \quad (4.15.b)$$

$$N_{xy} = A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{66} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - B_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - B_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - 2B_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \quad (4.15.c)$$

$$M_{xx} = B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} + B_{16} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - 2D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \quad (4.15.d)$$

$$M_{yy} = B_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} + B_{26} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - 2D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \quad (4.15.e)$$

$$M_{xy} = B_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} + B_{66} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - 2D_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \quad (4.15.f)$$

4.1.6 Trabalho virtual das forças internas

O trabalho virtual realizado pelas forças internas é dado por:

$$\delta W_{int} = \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dv \quad (4.16)$$

com V representando o volume da placa, e $\delta \varepsilon_x$, $\delta \varepsilon_y$ e $\delta \gamma_{xy}$ as variações das deformações ε_x , ε_y e γ_{xy} , as quais a partir das expressões (4.4.a) a (4.4.c) são assim calculadas:

$$\delta \varepsilon_x = \delta \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) - z \delta \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \quad (4.17.a)$$

$$\delta \varepsilon_y = \delta \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - z \delta \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \quad (4.17.b)$$

$$\delta \gamma_{xy} = \delta \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \delta \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - 2z \delta \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \quad (4.17.c)$$

Substituindo as Equações (4.17.a) a (4.17.c) na Equação (4.16) e levando em consideração que se pode encarar a integral em volume como uma integração em relação à área Ω_0 da superfície média e em relação à espessura h da placa, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \delta W_{int} = & \int_{\Omega_0} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \sigma_x \left[\delta \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) - z \delta \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \right] + \sigma_y \left[\delta \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - z \delta \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \tau_{xy} \left[\delta \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \delta \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - 2z \delta \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \right] \right\} dv \end{aligned} \quad (4.18)$$

Identificando-se na expressão acima os esforços solicitantes dados em (4.8), tem-se:

$$\begin{aligned} \delta W_{int} = & \iint_A \left[N_{xx} \delta \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) - M_{xx} \delta \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + N_{yy} \delta \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - M_{yy} \delta \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \right. \\ & \left. + N_{xy} \delta \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2M_{xy} \delta \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \right] dx dy \end{aligned} \quad (4.19)$$

Essa equação pode ser expressa em função dos deslocamentos a partir da substituição da Equação (4.15) na Equação (4.19).

4.1.7 Trabalho virtual das forças externas

O trabalho virtual realizado pelas forças externas representadas na Figura 4.5 é dado pela Equação (4.20):

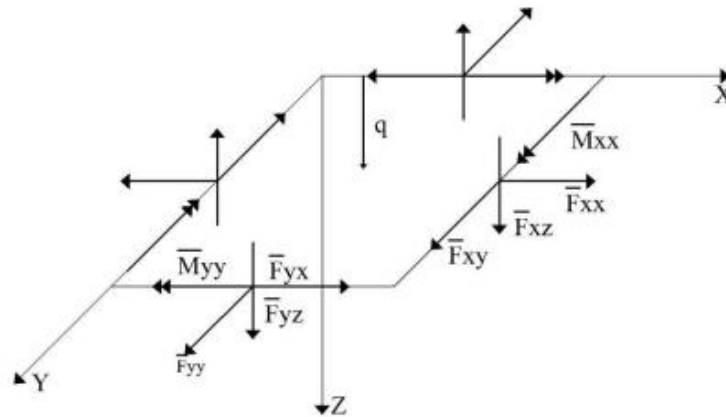


Figura 4.5 Cargas externas atuantes na placa

FONTE: Lima (2010)

$$\begin{aligned}
 \delta W_{ext} = & \int_A q(x,y) \delta w_o dA + \\
 & + \int_0^a \left(\bar{F}_{yx} \delta u_o + \bar{F}_{yy} \delta v_o + \bar{F}_{yz} \delta w_o - \bar{M}_{yy} \delta \left(\frac{\partial w_o}{\partial y} \right) \right)_{y=0}^{y=b} dx + \\
 & + \int_0^b \left(\bar{F}_{xx} \delta u_o + \bar{F}_{xy} \delta v_o + \bar{F}_{xz} \delta w_o - \bar{M}_{xx} \delta \left(\frac{\partial w_o}{\partial x} \right) \right)_{x=0}^{x=a} dy
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

onde $q(x,y)$ representa o carregamento transversal por unidade de área atuante no plano médio da placa, \bar{F}_{xx} , \bar{F}_{xy} , \bar{F}_{xz} e \bar{M}_{xx} são as forças e momentos atuantes nos bordos $x = 0$ e $x = a$ da placa, e \bar{F}_{yx} , \bar{F}_{yy} , \bar{F}_{yz} e \bar{M}_{yy} são as forças e momentos atuantes nos bordos $y = 0$ e $y = b$. As cargas de bordo, medidas por unidade de comprimento, admite-se que atuam na interseção do respectivo bordo com o plano médio da placa, conforme a Hipótese 6.

Tendo em vista o prosseguimento na obtenção de equações de equilíbrio e contorno, a expressão do trabalho das forças internas deve ser integrada por partes, no caso de alguns termos, para compatibilizar com as variações dos deslocamentos presentes na expressão do trabalho realizado pelas forças externas. Portanto, após a

integração, a expressão do trabalho das forças internas, em termos de esforços é dada por:

$$\begin{aligned}
\delta W_{int} = & \int_0^b [N_{xx} \delta u_o]_{x=0}^{x=a} dy - \iint_A N_{xx,x} \delta u_o dx dy + \int_0^a [N_{yy} \delta v_o]_{y=0}^{y=b} dx - \\
& - \iint_A N_{yy,y} \delta v_o dx dy + \int_0^a [N_{xy} \delta u_o]_{y=0}^{y=b} dx - \iint_A N_{xy,y} \delta u_o dx dy + \\
& + \int_0^b [N_{xy} \delta v_o]_{x=0}^{x=a} dy - \iint_A N_{xy,x} \delta v_o dx dy - \int_0^b [M_{xx} \delta w_o]_{x=0}^{x=a} dy + \\
& + \int_0^b [M_{xx,x} \delta w_o]_{x=0}^{x=a} dy - \iint_A M_{xx,xx} \delta w_o dx dy - \int_0^a [M_{yy} \delta w_o]_{y=0}^{y=b} dx + \\
& + \int_0^a [M_{yy,y} \delta w_o]_{y=0}^{y=b} dx - \iint_A M_{yy,yy} \delta w_o dx dy - 2 \left[(M_{xy,xy} \delta w_o)_{x=0}^{x=a} \right]_{y=0}^{y=b} - \\
& - 2 \iint_A M_{xy,xy} \delta w_o dx dy + 2 \int_0^a [M_{xy,x} \delta w_o]_{y=0}^{y=b} dx + 2 \int_0^b [M_{xy,y} \delta w_o]_{x=0}^{x=a} dy \quad (4.21)
\end{aligned}$$

Na Equação (4.21) a vírgula indica derivação parcial do esforço ou deslocamento em questão em relação às variáveis após a mesma.

Reorganizando a expressão em termos de esforços internos tem-se:

$$\begin{aligned}
\delta W_{int} = & - \iint_A [(N_{xx,x} + N_{xy,y}) \delta u_o + (N_{yy,y} + N_{xy,x}) \delta v_o + (M_{xx,xx} + \\
& + 2M_{xy,xy} + M_{yy,yy}) \delta w_o] dx dy + \\
& + \left\{ \int_0^a [N_{xy} \delta u_o + N_{yy} \delta v_o + (M_{yy,y} + 2M_{xy,x}) \delta w_o - M_{yy} \delta w_o]_{y=0}^{y=b} dx \right\} + \\
& + \left\{ \int_0^b [N_{xx} \delta u_o + N_{xy} \delta v_o + (M_{xx,x} + 2M_{xy,y}) \delta w_o - M_{xx} \delta w_o]_{x=0}^{x=a} dy \right\} + \\
& - 2 \left[(M_{xy,xy} \delta w_o)_{x=0}^{x=a} \right]_{y=0}^{y=b} \quad (4.22)
\end{aligned}$$

4.1.8 Princípio dos trabalhos virtuais

Segundo o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), na condição de equilíbrio da estrutura o trabalho virtual realizado pelas forças internas é igual ao trabalho virtual

realizado pelas forças externas, para um campo de deslocamentos compatível com as vinculações da estrutura. Portanto, igualando as expressões do trabalho virtual interno (4.22) e do trabalho virtual externo (4.20) tem-se:

$$\begin{aligned}
& - \iint_A [(N_{xx,x} + N_{xy,y})\delta u_o + (N_{yy,y} + N_{xy,x})\delta v_o + (M_{xx,xx} + 2 * M_{xy,xy} + M_{yy,yy})\delta w_o] dx dy + \\
& + \left\{ \int_0^a [N_{xy} \delta u_o + N_{yy} \delta v_o + (M_{yy,y} + 2 * M_{xy,x})\delta w_o - M_{yy} \delta w_{o,y}] dx \right\}_{y=0}^{y=b} + \\
& + \left\{ \int_0^b [N_{xx} \delta u_o + N_{xy} \delta v_o + (M_{xx,x} + 2 * M_{xy,y})\delta w_o - M_{xx} \delta w_{o,x}] dy \right\}_{x=0}^{x=a} - \\
& - 2 \left[(M_{xy,x} \delta w_o)_{x=0}^{x=a} \right]_{y=0}^{y=b} = \iint_A q_z(x, y) \delta w_o dx dy + \\
& + \left\{ \int_0^b [\bar{F}_{xx} \delta u_o + \bar{F}_{xy} \delta v_o + \bar{F}_{xz} \delta w_o - \bar{M}_{xx} \delta w_{o,x}] dy \right\}_{x=0}^{x=a} + \\
& + \left\{ \int_0^a [\bar{F}_{yx} \delta u_o + \bar{F}_{yy} \delta v_o + \bar{F}_{yz} \delta w_o - \bar{M}_{yy} \delta w_{o,y}] dx \right\}_{y=0}^{y=b} \tag{4.23}
\end{aligned}$$

Com a parcela do trabalho interno sendo expressa em função dos esforços internos.

4.1.9 Equações de equilíbrio

Considerando as variações δu_o , δv_o e δw_o arbitrárias e independentes ao longo de toda o volume da placa, obtêm-se as seguintes equações de equilíbrio, para o domínio da placa:

$$N_{xx,x} + N_{xy,y} = 0 \tag{4.24.a}$$

$$N_{yy,y} + N_{xy,x} = 0 \tag{4.24.b}$$

$$M_{xx,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{yy,yy} = -q(x, y) \tag{4.24.c}$$

4.1.10 Equações de contorno

Ainda considerando arbitrárias e independentes as variações dos deslocamentos encontram-se as condições de contorno válidas para os bordos e cantos da placa:

1 - Nos bordos $x = 0$ e $x = a$

$$N_{xx} = \bar{F}_{xx} \text{ ou } u_o = \bar{u}_o \quad (4.25.a)$$

$$N_{xy} = \bar{F}_{xy} \text{ ou } v_o = \bar{v}_o \quad (4.25.b)$$

$$M_{xx} = \bar{M}_{xx} \text{ ou } w_{o,x} = \bar{w}_{o,x} \quad (4.25.c)$$

$$M_{xx,x} + 2M_{xy,y} = \bar{F}_{xz} \text{ ou } w_o = \bar{w}_o \quad (4.25.d)$$

2 - Nos bordos $y = 0$ e $y = b$

$$N_{yx} = \bar{F}_{yx} \text{ ou } u_o = \bar{u}_o \quad (4.26.a)$$

$$N_{yy} = \bar{F}_{yy} \text{ ou } v_o = \bar{v}_o \quad (4.26.b)$$

$$M_{yy} = \bar{M}_{yy} \text{ ou } w_{o,y} = \bar{w}_{o,y} \quad (4.26.c)$$

$$M_{yy,y} + 2M_{xy,x} = \bar{F}_{yz} \text{ ou } w_o = \bar{w}_o \quad (4.26.d)$$

3 - Nos cantos da placa

$$M_{xy} = \bar{M}_{xy} \text{ ou } w_o = \bar{w}_o \quad (4.27)$$

onde os valores escritos com uma barra sobre escrita representam valores prescritos (valores previamente conhecidos).

4.2 FORMULAÇÃO NUMÉRICA

Com relação à modelagem numérica de estruturas, diversos métodos foram desenvolvidos com o objetivo de resolver (direta ou indiretamente) as equações diferenciais resultantes do equilíbrio dos elementos estruturais, a exemplo do Método das Diferenças Finitas (MDF), do Método das Diferenças Finitas Energéticas (MDFE),

do Método dos Elementos Finitos (MEF) e do Método dos Elementos de Contorno (MEC). Todavia, sem sombra de dúvida o método dos elementos finitos é o mais empregado por sua capacidade intrínseca de modelar diversas condições de geometria, de carregamento e de condições de vinculação dos elementos estruturais.

O primeiro uso do Método dos Elementos Finitos para engenharia estrutural se deu com o trabalho de Turner et al. (1956), que aplicaram o método na resolução de problemas relacionados à aviação, empregando elementos discretos triangulares planos.

Desde então, observou-se um grande número de publicações sobre o tema e a consolidação do método como o preferido mundialmente para a modelagem de estruturas em geral. Por conta disso, no presente trabalho o MEF será utilizado como método numérico-estrutural para tratar as equações oriundas do modelo teórico aqui utilizado, envolvendo tanto a Mecânica do Dano quanto a Teoria Clássica de Laminados.

4.2.1 Caracterização do elemento

No presente trabalho, o elemento finito utilizado na modelagem das placas em estudo será um elemento de geometria retangular com 4 nós, conforme ilustrado na Figura 4.6:

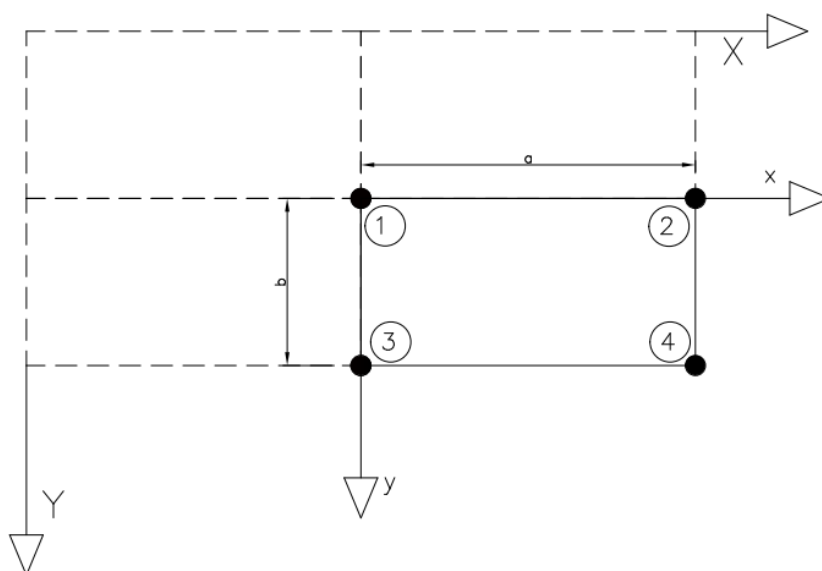


Figura 4.6 Elemento finito: dimensões, nós e eixos de referência

Na Figura 4.6 a e b representam as dimensões do elemento respectivamente nas direções dos eixos locais x e y , cabendo observar que estes eixos são paralelos aos eixos globais X e Y . Os números dentro dos círculos representam a numeração local dos quatro nós localizados nos vértices do elemento finito considerado. Os eixos locais e globais foram representados na Figura 4.7:

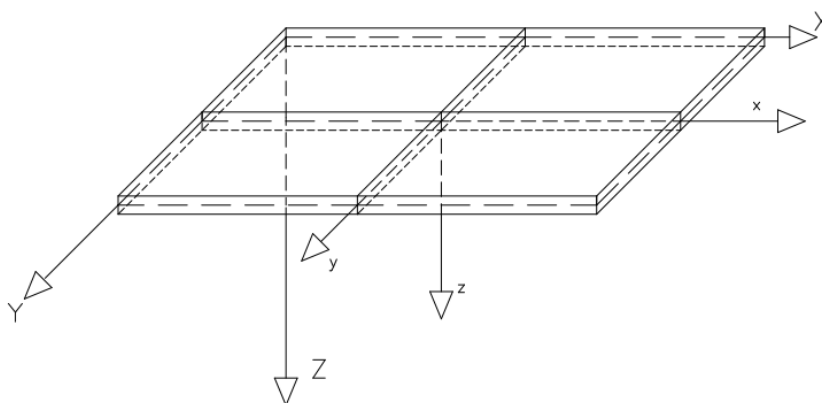


Figura 4.7 Eixos de referência locais e globais nas três direções

Para cada um dos nós do elemento são definidas três translações, uma em cada direção (x , y e z), duas rotações (uma em torno do eixo x e outra em torno y , assim definidas $\frac{\partial w_0}{\partial y}$ e $\frac{\partial w_0}{\partial x}$), e uma curvatura de torção, dada pela derivada segunda $\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}$. Portanto, cada um desses deslocamentos e rotações é um grau de liberdade no tratamento numérico. Nesse sentido, têm-se seis graus de liberdade por nó, 24 graus de liberdade por elemento e $6n_{no}$ graus de liberdade para a estrutura, onde n_{no} é o número de nós definidos na discretização da placa em elementos finitos.

A Figura 4.8 ilustra esses graus de liberdade.

onde $\{d\}$ é o vetor deslocamento de 6 linhas para o nó em questão, $[\emptyset]$ é a matriz de 6 linhas e 24 colunas que representa os polinômios interpoladores e $\{\alpha\}$ é o vetor de constantes, de 24 linhas, a ser determinado.

Particularizando a equação acima para os pontos nodais e chamando de $\{d\}^e$ os deslocamentos nodais tem-se:

$$\{d\}^e = [\emptyset]^e \{\alpha\} \quad (4.30)$$

sendo $\{d\}^e$ o vetor de deslocamentos com 24 linhas para o elemento respeitando o sistema de numeração local. A matriz $[\emptyset]^e$ é montada substituindo as coordenadas locais de cada um dos nós do elemento finito na equação na Equação (4.28) e pondo as matrizes $[\emptyset]$ resultantes de forma sequenciada formando uma matriz de 24 linhas e 24 colunas.

A partir da Equação (4.31) deduz-se a matriz de coeficientes $\{\alpha\}$:

$$\{\alpha\} = \{[\emptyset]^e\}^{-1} \{d\}^e \quad (4.31)$$

A obtenção de $\{[\emptyset]^e\}^{-1}$ pode ser feita com o uso, por exemplo, de um aplicativo de matemática simbólica, como o módulo Sympy da linguagem de programação Python ou o Matlab.

As funções de interpolação, a serem usadas posteriormente, são cada uma das 6 linhas de $[N]$, obtidas pela Equação (4.32):

$$[N] = [\emptyset] \{[\emptyset]^e\}^{-1} \quad (4.32)$$

4.2.2 Discretização

No programa desenvolvido, a discretização é feita usando apenas o elemento retangular descrito anteriormente, todos com as mesmas dimensões (portanto, não serão previstos refinamentos em regiões particulares da placa). Na figura 4.9 é apresentado o sistema de numeração global dos elementos e nós empregados no programa.

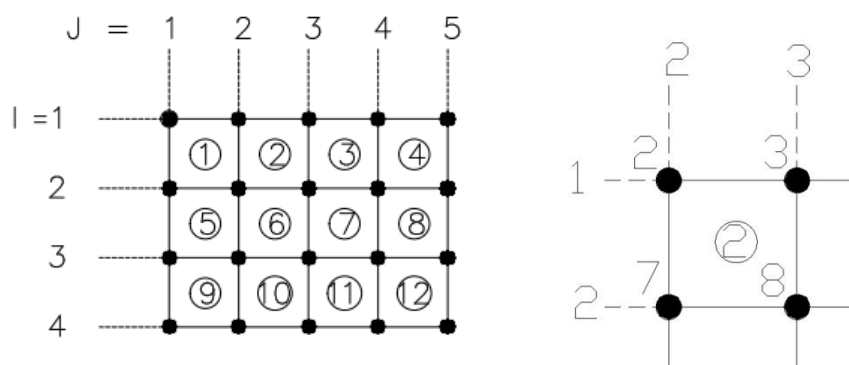


Figura 4.9 Sistema de numeração global dos elementos e nós

Nessa figura, os índices I e J são usados como referência para indicar a linha e a coluna em que estão localizados os nós. Os números escritos internamente indicam a numeração dos elementos que é feita da esquerda para a direita e de cima para baixo.

A numeração dos nós é feita da esquerda para a direita e, em seguida, de cima para baixo, como a ordem de leitura habitual. A passagem da numeração local para global para um elemento se dá pelas relações:

$$N1 = (I - 1)NNx + J \quad (4.33.a)$$

$$N2 = N1 + 1 \quad (4.33.b)$$

$$N3 = N1 + NNx \quad (4.33.c)$$

$$N4 = N3 + 1 \quad (4.33.d)$$

sendo $N1$, $N2$, $N3$ e $N4$ a numeração global para os nós 1, 2, 3 e 4 locais, respectivamente. NNx é o número de nós em que é subdividida a placa na direção x.

4.2.3 Matriz de rigidez local

Partindo do PTV pode-se avaliar a parcela de trabalho desenvolvida pelos esforços internos para uma placa laminada, descritos pela equação seguinte:

$$\begin{aligned}
\int \delta W_{\text{int}} dA = \int_A \left\{ \left[A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{16} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - B_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \right. \right. \\
- B_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - 2B_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \Big] \delta \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) - \\
- \left[B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} + B_{16} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \right. \\
- 2D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \Big] \delta \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \\
+ \left[A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{26} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - B_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - B_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \right. \\
- 2B_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \Big] \delta \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - \\
- \left[B_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} + B_{26} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \right. \\
- 2D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \Big] \delta \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \\
+ \left[A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{66} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - B_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - B_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right. \\
- 2B_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \Big] \left[\delta \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \delta \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \right] - \\
- 2 \left[B_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} + B_{66} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \right. \\
\left. \left. - 2D_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right] \delta \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \right\} dx dy \tag{4.34}
\end{aligned}$$

Substituindo as funções de interpolação na equação anterior e integrando-a no domínio do elemento retangular obtêm-se a matriz de rigidez local:

$$S_{(24 \times 24)} = \begin{bmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} & S_{1,3} & \cdots & S_{1,24} \\ & S_{2,2} & S_{2,3} & \cdots & S_{2,24} \\ & & S_{3,3} & \cdots & S_{3,24} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & S_{24,24} \end{bmatrix} \tag{4.35}$$

A avaliação da Equação (4.34) no programa foi feita através de integração numérica usando a quadratura de Gauss com quatro (4) graus de liberdade em cada uma das direções do elemento.

4.2.4 Vetor de forças

O vetor de cargas, ou de forças, local apresenta 24 graus de liberdade associados ao elemento. Este é gerado diretamente do trabalho desenvolvido pelas forças externas, como visto através da equação (4.20) repetida abaixo:

$$\begin{aligned} \delta W_{ext} = & \int_A q(x,y) \delta w dA + \\ & + \int_0^a \left(\bar{F}_{yx} \delta u + \bar{F}_{yy} \delta v + \bar{F}_{yz} \delta w - \bar{M}_{yy} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right)_{y=0}^{y=b} dx + \\ & + \int_0^b \left(\bar{F}_{xx} \delta u + \bar{F}_{xy} \delta v + \bar{F}_{xz} \delta w - \bar{M}_{xx} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right)_{x=0}^{x=a} dy \end{aligned} \quad (4.36)$$

A primeira parte da equação acima, a integral no domínio da placa, são as cargas que estão atuando perpendicularmente ao plano médio da placa. Para fins de implementação computacional, foram adotadas as seguintes situações (ver Figura 4.10): i) carga uniforme ii) triangular; iii) cargas pontuais e iv) cargas de linha (paralelas ao eixo x ou y) que atravessam toda a placa.

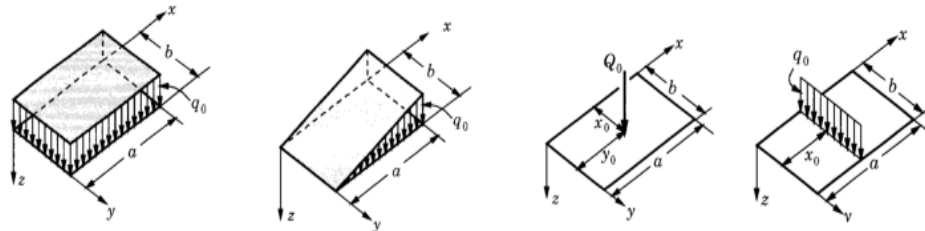


Figura 4.10 Tipos de carregamentos

FONTE: Reddy (2004)

A segunda e a terceira partes da Equação (4.36) estão relacionadas às cargas de bordo atuantes no contorno da placa: bordo $y = 0$ e $y = b$ e bordo $x = 0$ e $x = a$ respectivamente, conforme já visto no item 4.1.7.

No que se refere a implementação computacional é admitido que todas as cargas atuantes nos bordos são consideradas constantes ao longo destes.

4.2.5 Introdução das condições de contorno

Inicialmente cabe recordar que no MEF são requeridas apenas as condições de contorno cinemáticas. Portanto, observando o conjunto de condições deduzidas anteriormente, no item 4.1.10, informa-se que a estratégia aqui adotada para a introdução dessas condições foi a usual, através do procedimento de zeros (0) e um (1). O MEF permite que as condições de contorno sejam aplicadas diretamente, restringindo qualquer um dos graus de liberdade nodais, bastando apenas especificar o nó e o grau de liberdade deste.

Por fim, cabe informar que para potencializar as análises com o tratamento aqui construído foi também previsto no programa desenvolvido que qualquer grau de liberdade pode vir a ser restrito, mesmo não pertencendo aos bordos da placa.

4.2.6 Resolução do sistema de equações de equilíbrio

Ao obter a matriz de rigidez global e o vetor de forças nodais, chega-se a um sistema matricial do tipo:

$$\{F\} = [K]\{x\} \quad (4.37)$$

onde $\{F\}$ é o vetor de forças nodais, $[K]$ é a matriz de rigidez global e $\{x\}$ é o vetor solução, contendo os deslocamentos nodais, determinados após a devida introdução das condições de contorno e de canto, e com a resolução do sistema (4.37).

A resolução é feita através do Método de Eliminação de Gauss, levando em consideração que a matriz é simétrica e bandada, limitando os *loops* ao tamanho da banda. Todavia, por conta da inerente não linearidade física considerada no modelo teórico aqui proposto, as relações tensão-deformação dos materiais envolvidos (concreto e aço) implicam em relações carga-deslocamento não lineares, o que resulta no não atendimento direto das equações nodais de equilíbrio (4.37).

Então, para resolver esse problema não linear foi implementada a técnica de continuação de Newton-Raphson com controle de carga e com controle de deslocamentos, a segunda visando transpor eventuais pontos limites de carga na trajetória de equilíbrio, para análises até a ruptura das placas em estudo.

4.2.7 Cálculo de deformações, esforços e tensões

As deformações, os esforços e as tensões são avaliados nos pontos da quadratura de Gauss tendo em vista que estes valores são posteriormente usados nos modelos não lineares e necessários para a montagem das matrizes de rigidez local. Ressalte-se que tal estratégia é apontado por Cook et al. (2002) como a que geralmente produz avaliações mais precisas para esse conjunto de grandezas.

As funções usadas para o cálculo das derivadas foram obtidas por derivação das funções de interpolação, fazendo uso do Sympy, e foram aplicadas no procedimento as coordenadas locais dos pontos da quadratura.

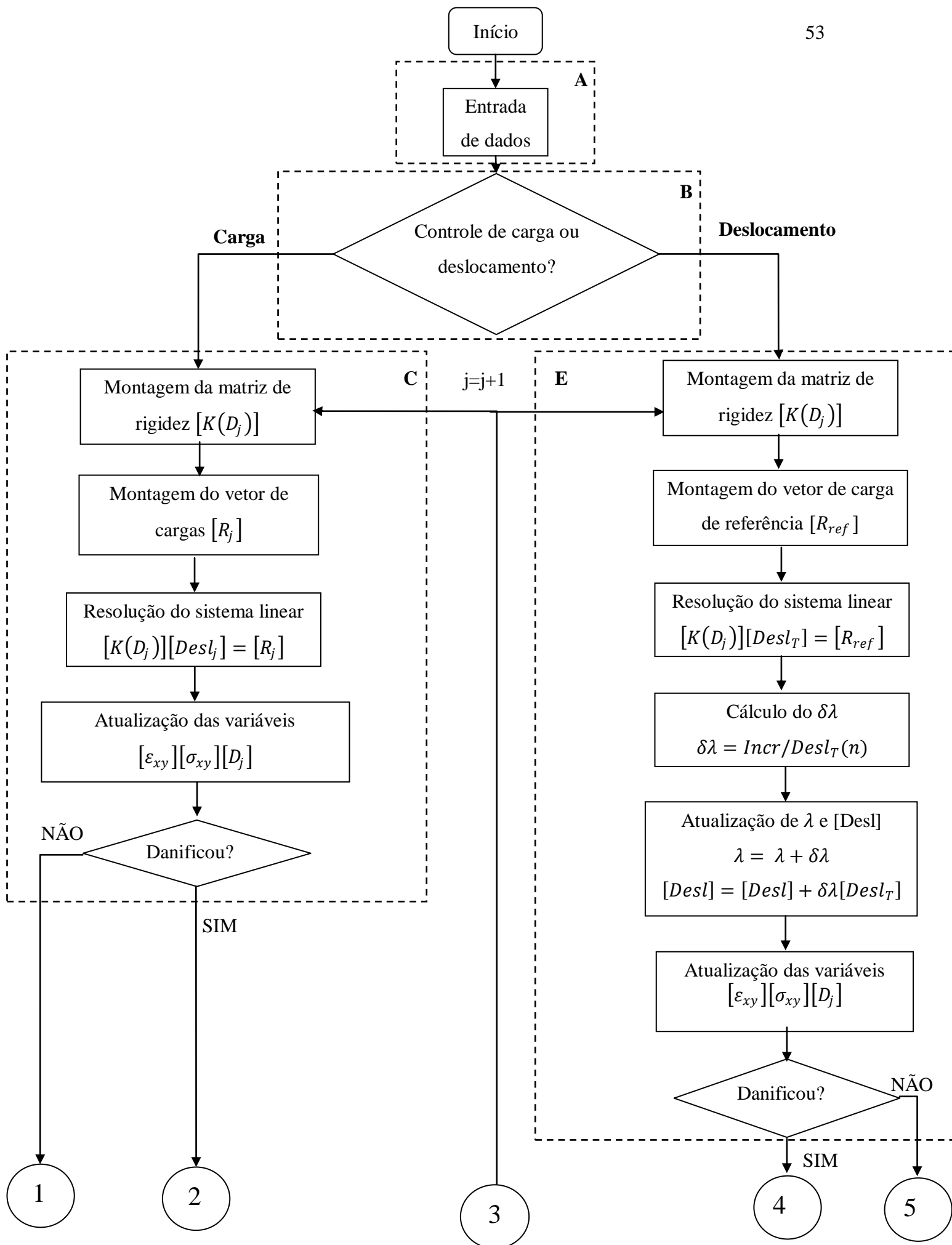
Conhecendo-se estas derivadas, são então calculados os esforços internos na placa. Da mesma forma são calculadas as deformações e tensões, observando neste último caso a dependência dessas grandezas com a coordenada z , conforme Equações (4.3) e (4.4).

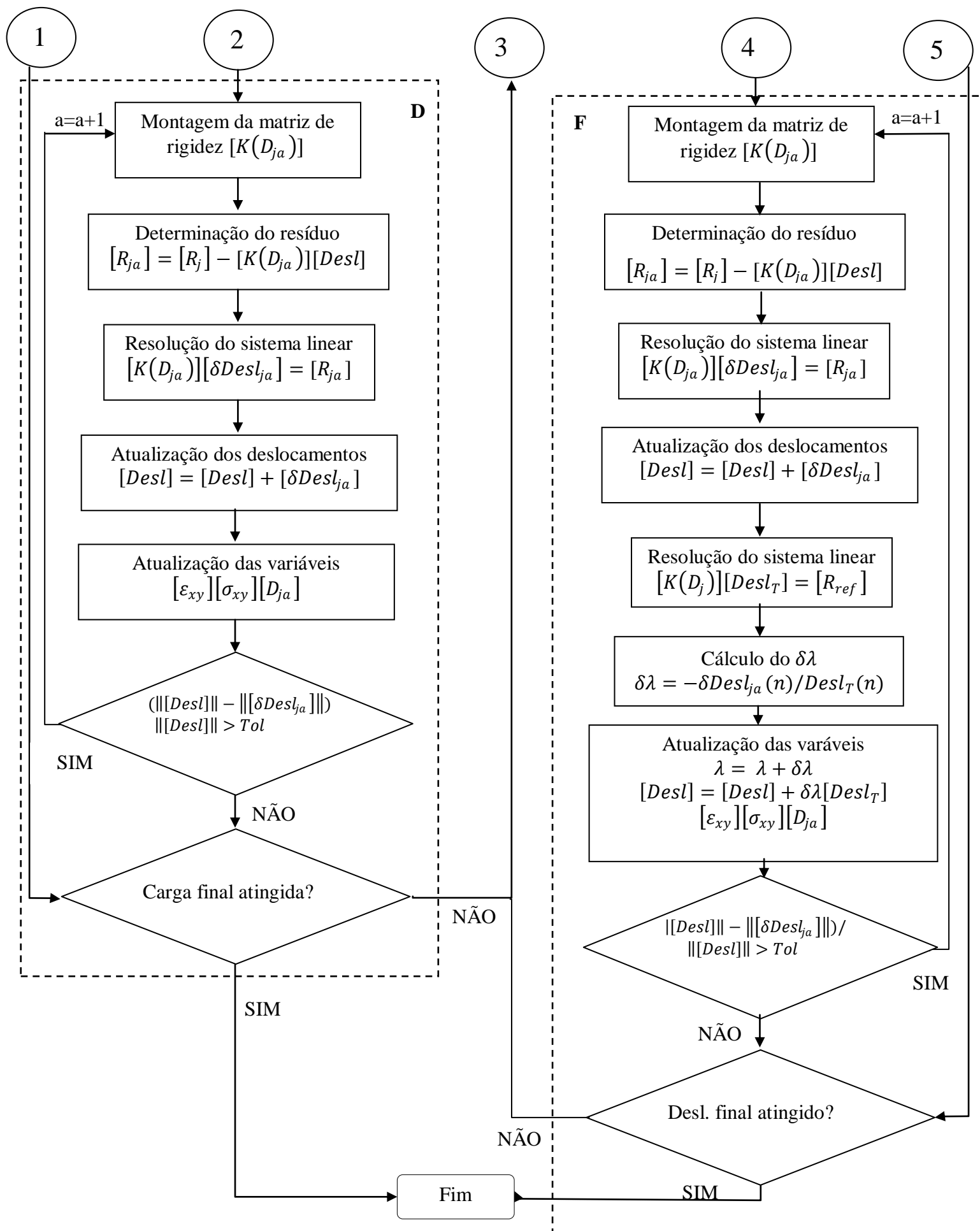
Estas variáveis, deformações e tensões, são parâmetros de entrada para os modelos não lineares dos materiais. As variáveis de danificação dos materiais por sua vez são calculadas na altura média das lâminas requerendo assim a mesma metodologia para as variáveis de entrada.

4.2.8 Fluxograma da solução incremental-iterativa

No fluxograma a seguir é demonstrada a forma como o programa desenvolvido calcula a trajetória de equilíbrio entre carga e deslocamento, levando em consideração a não linearidade das lajes provocada pela não linearidade física oriunda das relações constitutivas dos materiais que compõem os elementos estruturais em estudo.

Em seguida, são tecidas algumas observações e comentários a respeito do fluxograma:





BLOCO A: Neste bloco são lidos os dados de entrada para o programa a partir de um arquivo de texto. As informações compreendem as dimensões da placa, número de elementos finitos em que será discretizada a mesma, propriedades dos materiais e parâmetros dos modelos, como estão arranjadas as lâminas, cargas aplicadas, condições de contorno, o método de continuação bem como quais informações serão passadas para arquivos de saída como o grau de liberdade para montar o arquivo de curva carga-deslocamento.

BLOCO B: Neste bloco o programa, baseado nos dados de entrada, toma o caminho de análise. Foram implementadas duas alternativas baseadas no método de Newton-Raphson, uma por incremento constante de carga e outra por incremento constante de um determinado componente do vetor de deslocamentos. O tipo de carga aplicada bem como o grau de liberdade que será controlado são valores definidos pelo usuário.

BLOCO C: Nele estão compreendidas as operações que fazem a parte incremental do processo por controle de carga. A carga aplicada é incrementada, monta-se o vetor de cargas, a matriz de rigidez global, aplica-se as condições de contorno e determina-se o vetor de deslocamentos. Com os deslocamentos são calculadas as derivadas dos deslocamentos, deformações, tensões e esforços internos atuantes. Estas variáveis são utilizadas para a verificação das variáveis de dano. Ao final do bloco é verificado se algum ponto nas lâminas foi danificado, caso tenha sido inicia-se o processo iterativo, caso contrário é verificada a condição de parada que é o valor final da carga monitorada atingida.

BLOCO D: Este bloco faz a verificação da convergência à trajetória de equilíbrio. Primeiro é montada novamente a matriz de rigidez global da estrutura para o nível atual de dano, é determinado o vetor de forças desequilibradas provocadas pelo processo de danificação dos materiais. Com o vetor de forças desequilibradas e rigidez da estrutura, aplicadas as condições de contorno determina-se o incremento no vetor de deslocamentos, corrige-se o vetor de deslocamentos e atualiza-se as variáveis de deformações, tensões e dano. Ao final é verificado se foi atingido o critério de parada que é baseado nos comprimentos dos vetores de deslocamentos e nos incrementos desse e um parâmetro de tolerância passado no arquivo de entrada de dados. Se não convergiu

o processo é repetido, se convergiu é verificado ao final se a carga aplicada já superou o valor máximo para a análise. Se atingiu o programa para, senão volta-se ao bloco B.

BLOCO E: Assim como o bloco C ele faz a parte incremental do processo, mas pela abordagem de incremento de deslocamentos constantes. Nele é montada a matriz de rigidez global, o vetor de cargas de referência que é o vetor de cargas monitoradas considerando que a carga monitorada tem um valor unitário. Aplicando-se as condições de contorno e resolvendo o sistema obtêm-se o vetor de deslocamentos tangente da estrutura. Com base no incremento de deslocamentos especificado no arquivo de entrada, Incr, e a componente do vetor de deslocamentos tangente correspondente ao grau de liberdade monitorado determina-se o incremento de carga, atualiza-se o vetor de deslocamentos, variáveis de tensões, deformações e dano, verificando ao final se a estrutura saiu da linearidade.

BLOCO F: Assim como no processo por incremento de carga constante deve ser verificada a convergência. Inicialmente monta-se a rigidez global atualizada, o vetor de cargas desequilibradas e obtêm-se o incremento de deslocamentos, o vetor de deslocamentos é atualizado. Com o vetor de carga de referência encontra-se o vetor de deslocamentos tangente. A correção da carga aplicada se dá por meio da componente do incremento de deslocamento correspondente ao grau de liberdade monitorado e a componente do vetor de deslocamentos tangentes. Posteriormente o vetor de deslocamentos é atualizado bem como as variáveis de deformações, tensões e dano. Verifica-se ao final se houve convergência, se não houve o processo é repetido, se houve é verificada a condição de parada que é o grau de liberdade monitorado atingir o valor especificado no arquivo de entrada, havendo o programa encerra, não havendo há um novo incremento de deslocamentos.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo são apresentados alguns resultados de simulações de lajes de concreto armado em flexão com o objetivo de aferir a precisão do modelo desenvolvido. As lajes estudadas foram as mesmas modeladas por Lima (2013) e, para fins de análise, foram observados aspectos como a curva carga-deslocamento e a carga de ruptura.

Com relação à forma como foram modeladas as lajes, cabe informar que em relação às armaduras estas foram convertidas em lâminas de aço, cuja espessura é determinada através da área total das armaduras, sendo posicionadas com o plano médio coincidindo com o centróide das barras, conforme ilustrado na Figura 5.1.

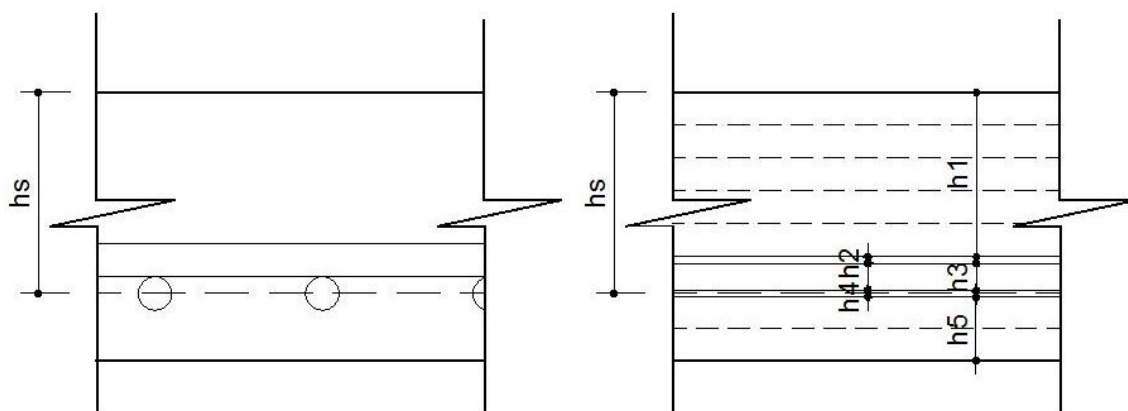


Figura 5.1 Discretização da espessura da placa

Na Figura 5.1, a grandeza h_s representa a altura do centróide da barra de aço em relação à extremidade superior da laje, valor que deve ser igual ao representar as barras de aço como lâminas. As grandezas h_2 e h_4 são as espessuras das lâminas de aço. Por sua vez, h_1 , h_3 e h_5 são as espessuras das lâminas de concreto.

Uma consequência desta metodologia é que as lâminas de aço têm sempre espessuras menores que o diâmetro das barras. Portanto, no caso das placas com reforço nas duas direções, haverá entre as lâminas de aço, forçosamente, uma camada de concreto a fim de manter os planos médios coincidentes com os centróides reais das armaduras. A esse respeito, cabe registrar que como a espessura dessas lâminas de aço resultam pequenas, em comparação com a espessura da laje (h), não são subdivididas em lâminas ainda menores, como acontece com as partes exclusivas de concreto, por assim se considerar que a discretização é suficiente. Na região direita da Figura 5.1 tal

situação está esquematizada, com as linhas tracejadas representando os limites entre camadas.

Visando garantir na modelagem das lajes que o reforço contribua somente na direção em que as barras são aplicadas, para as lâminas de aço será atribuído apenas o módulo de elasticidade E_1 (associado à direção do alinhamento das armaduras), com as demais propriedades mecânicas requeridas pelo modelo consideradas iguais a zero (0), ou seja: $E_2 = G_{12} = \nu_{12} = \nu_{21} = 0$. Para lâminas paralelas ao eixo x é passado o ângulo da lâmina igual a 0° , e quando paralelas ao eixo y , o ângulo é de 90° .

Com relação às propriedades do concreto, as variáveis requeridas pelo modelo implementado são a resistência à compressão f_c , a resistência à tração f_t , o comprimento característico da malha de elementos finitos l^* (admitido como sendo a raiz quadrada da área de um elemento finito), além das propriedades mecânicas (módulo de elasticidade E_c e coeficiente de Poisson ν_c).

Para a discretização das placas, o número de elementos finitos utilizado foi obtido a partir da observação da convergência da resposta carga-deslocamento, sendo também observado o número de trechos de integração usados por Lima (2013) em sua análise via MDFE. Complementarmente, para a discretização da espessura das placas, foram testados diversos valores a partir de 10 lâminas nos experimentos iniciais, verificando também a convergência em termos da resposta carga-deslocamento.

Por fim, cabe destacar que por conta da dupla simetria dos quatro exemplos estudados foi feita a opção pelo estudo de um quarto das placas, com o intuito de prover um melhor refinamento da malha.

5.1 EXEMPLO 1 - LAJE SIMPLEMENTE APOIADA COM CARREGAMENTO UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDO, ARMADURA INFERIOR NAS DUAS DIREÇÕES

O presente exemplo foi ensaiado experimentalmente por Taylor et al. (1966), tratando-se de uma laje quadrada, simplesmente apoiada nos quatro bordos, submetida a um carregamento uniformemente distribuído e com armadura inferior nas duas direções. A armadura foi constituída de barras com diâmetro igual a 4,76 mm, mas com espaçamento diferente nas duas direções, 76,0 mm na direção x e 63,5 mm na direção y . As dimensões da laje e as respectivas armaduras estão apresentadas na Figura 5.2,

enquanto as propriedades mecânicas dos materiais constituintes estão registradas na Tabela 5.1.

Para o presente caso, o único parâmetro adicional para o concreto, segundo o modelo implementado, é o comprimento característico da malha. Como foi usada uma discretização do elemento (1/4 de placa) semelhante à de Lima (2013), oito (8) subdivisões em cada direção (implicando aqui em 64 elementos finitos), o comprimento característico foi avaliado com o valor exato: $l^*=114,375$ mm.

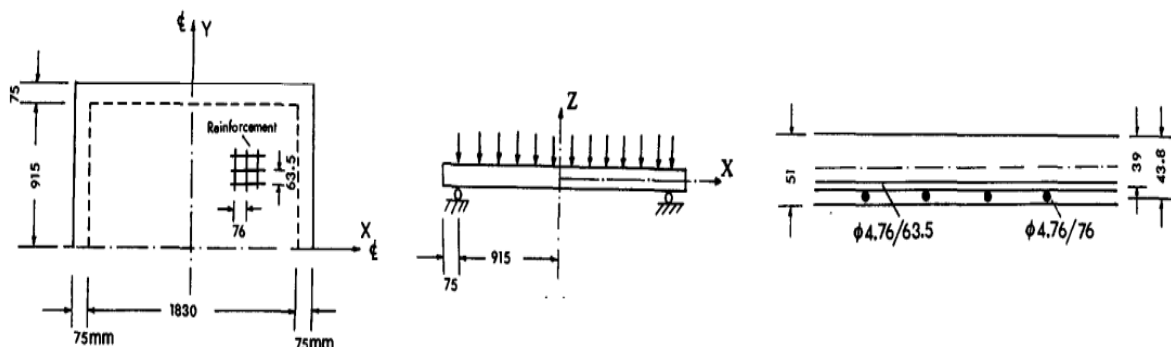


Figura 5.2 Dimensões e armaduras da laje do Exemplo 1

FONTE: Adaptada de Jiang e Mirza (1997)

Tabela 5.1 Propriedades dos materiais da laje do Exemplo 1

Concreto		Aço	
E_c	32,42 GPa	E_s	206,91 GPa
ν_c	0,18	f_y	375,90 MPa
f_c	35,04 MPa	ϵ_{lim}	0,001817
f_t	3,60 MPa	ϵ_{ult}	0,01 (adotado)

Para proceder a análise não linear, discretizou-se a espessura da placa em 10 lâminas, e foi usada a técnica de continuação de controle de deslocamentos, tendo como referência o deslocamento transversal w_0 do nó central da placa, para o qual foi estabelecido um incremento constante de 1,2 mm. A tolerância usada para verificar a convergência foi de $1,0 \times 10^{-4}$. Os resultados dessa análise foram apresentados na Figura 5.3 onde “Modelo proposto 1” faz referência ao modelo apresentado neste trabalho.

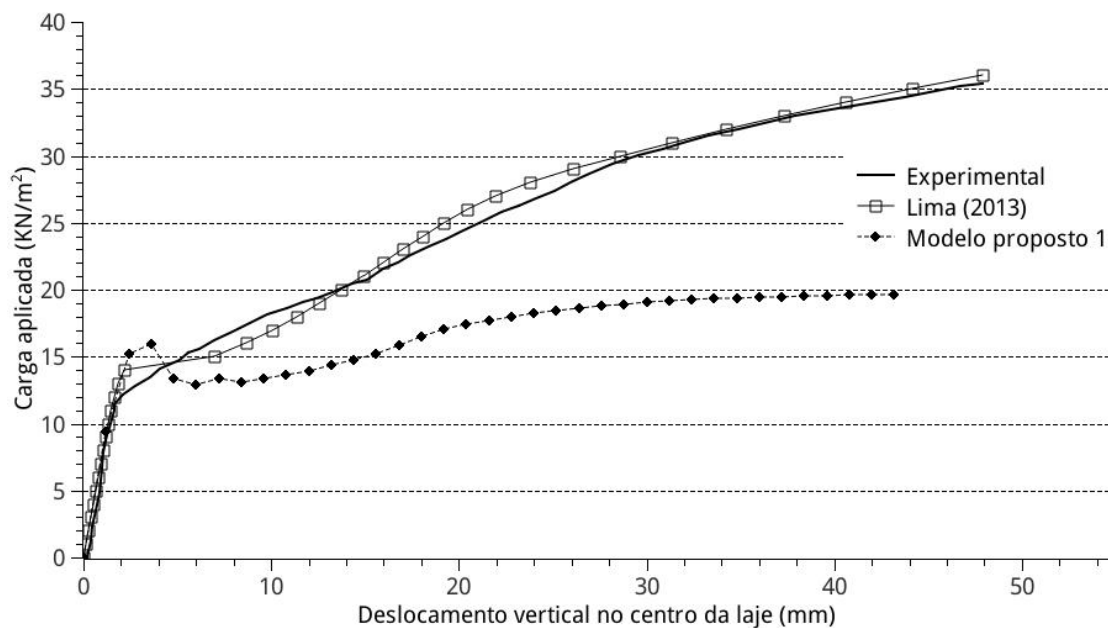


Figura 5.3 Exemplo 1 – Curva carga x deslocamento pela formulação de Oliver et al. (1990)

Observa-se claramente que a formulação (Modelo proposto 1) gera resultados equivocados. O início da etapa não linear da curva se dá um pouco tardia, com uma carga aplicada de 16,0 kN/m², enquanto experimentalmente se verificou em torno de 12,0 kN/m². A visível queda da carga após o início da etapa não linear, e uma pequena recuperação da rigidez com a ruptura ocorrendo para a carga de 19,6 kN/m², aproximadamente, revela o forte desacordo da previsão do modelo de Oliver et al. (1990) perante o comportamento experimental registrado na figura.

A esse respeito, cabe informar que os estudos de Lima (2013), para o presente exemplo, indicaram uma forte influência da maneira como é tratado o valor do módulo de elasticidade transversal com o avanço da carga. De fato, ao aplicar o seu tratamento numérico-computacional baseado no modelo de dano de Mazars (1984), e no MDFE, obteve uma resposta muito rígida (ver curva associada a Situação 02 na Figura 5.4), quase linear, bem dissociada da resposta experimental após o início da fissuração do concreto.

Diante disso, Lima (2013) realizou uma nova análise não linear do problema, propondo 3 alternativas (Situações) de comportamento numérico do módulo de elasticidade transversal do concreto constituinte da laje:

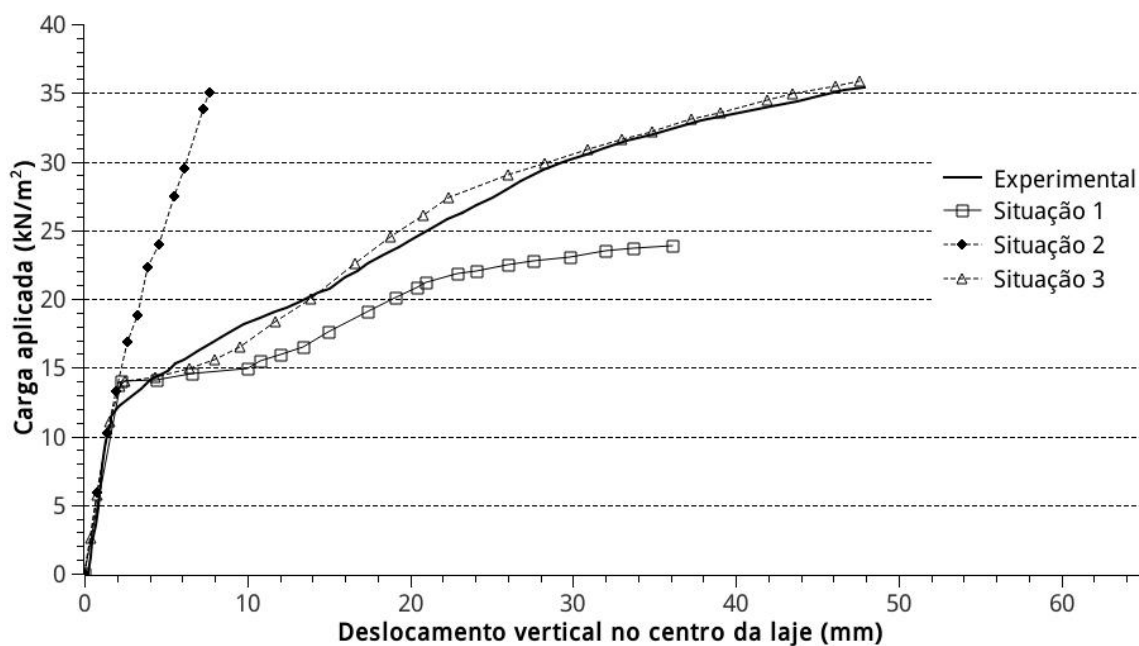


Figura 5.4 Exemplo 1 - Carga x deslocamento segundo Lima (2013)

FONTE: Adaptada de Lima (2013)

1. Considerou que o módulo de elasticidade transversal é reduzido em função do dano do concreto, calculado segundo o modelo de Mazars (1984), sendo $G_{12} = \frac{E_c(1-D_c)}{2(1+\nu_c)}$, onde D_c é a variável de dano do referido modelo;
2. Manteve o módulo de elasticidade transversal constante durante toda a análise, calculado através da equação $G_{12} = \frac{E_c}{2(1+\nu_c)}$ (com o módulo de elasticidade longitudinal E_c , e o coeficiente de Poisson ν_c , tomados para o concreto íntegro, sem dano);
3. Reduziu o módulo de elasticidade transversal em função do dano por tração, sendo a equação aplicada $G_{12} = \frac{E_c(1-\alpha_t D_{ct})}{2(1+\nu_c)}$. No modelo de Mazars (1984) a variável α_t representa a proporção de deformações decorrentes de esforços de tração na deformação equivalente total e D_{ct} o dano provocado por tração.

Na Figura 5.4 estão apresentados os resultados da investigação de Lima (2013), inclusive a já mencionada Situação 02, onde se observa a resposta muito rígida. A Situação 01 resulta em um comportamento menos resistente da estrutura, apesar de qualitativamente se aproximar do comportamento experimental. Porém, a Situação 03

foi claramente a que promoveu os melhores resultados, vindo então a ser adotada por esse autor em todas as subsequentes modelagens de validação do seu modelo. Portanto, por essa investigação de Lima (2013) ficou evidenciada, para o presente exemplo, a impossibilidade de prever o comportamento estrutural sem a danificação da resistência ao cisalhamento do concreto constituinte da referida laje. Revelou ainda que a danificação dessa resistência mecânica parece estar associada apenas à zona tracionada do concreto.

Cabe também ressaltar que, apesar do modelo aqui utilizado para o concreto, de Oliver et al. (1990) (Modelo proposto 1), conter esse tipo de danificação em sua formulação, este não foi, claramente, capaz de prever o comportamento da laje em questão, trazendo uma resposta ainda menos resistente que a vista na Situação 01 de Lima (2013).

Uma investigação da literatura revela que o problema de danificação do módulo de elasticidade transversal não é algo simples, quando se deseja prever o comportamento estrutural. A esse respeito destacam-se alguns trabalhos, especialmente os que implementam modelos de fratura, como Matzenbacher et al. (2010) e Pacheco (2013), estes dois modelando vigas de concreto armado com elementos finitos bidimensionais.

Matzenbacher et al. (2010) afirmam, sobre essa questão, que quando ocorre uma tensão de tração alta o suficiente ocorre uma abertura de fissura perpendicular à tensão. E, posteriormente, se houver mudança nas direções principais pode ocorrer deslocamento relativo entre as faces da fissura, ocasionando tensões de corte. Neste caso há um mecanismo de transferência de esforços por engrenamento dos agregados ou mesmo um efeito de pino da armadura que atravessa a fissura. Nos dois casos o mecanismo é controlado pela abertura da fissura.

A saída para o problema, segundo esses autores, dada a dificuldade de modelar os efeitos acima mencionados, é criar uma variável para a redução do módulo de elasticidade transversal com alguma relação com deformações de tração.

Pituba (2010) propôs duas alternativas para esta situação, uma delas similar à Matzenbacher et al. (2010), onde há variáveis de proporcionalidade entre os danos à compressão e à tração e o dano para o módulo de elasticidade transversal. A segunda alternativa é danificar de acordo com a deformação ao cisalhamento γ . Portanto, a

segunda opção, por depender do conhecimento da curva tensão-deformação do concreto submetido a um ensaio de cisalhamento puro, é um tanto difícil de ser aplicada.

Dados os bons resultados obtidos por Matzenbacher et al. (2010), implementando uma equação previamente utilizada por Cervenka (1985) e Hinton (1988), decidiu-se implementar essa proposição no programa aqui construído com base no modelo de Oliver et al. (1990). Nesse sentido, a proposta parte da presença de um fator β , variando entre 0 e 1, que multiplica o módulo de elasticidade transversal do concreto, conforme a Equação (5.1).

$$G_c = \beta G \quad (5.1)$$

onde G_c é o módulo de elasticidade transversal danificado e G o módulo de elasticidade transversal inicial.

O valor de β , por sua vez, é dado por:

$$\beta = 1 - \left(\frac{\varepsilon_T}{0,005} \right)^{k_1} \quad (5.2)$$

onde ε_t é a deformação de tração no concreto e k_1 é um parâmetro que tem um valor adotado de 0,075 pelos autores que aplicaram esse modelo. Porém, ε_t não é explicitamente uma variável do modelo de Oliver et al. (1990). Por esta razão, foi usada aqui uma metodologia semelhante à vista em Mazars (1984) para obter essa deformação.

Inicialmente são decompostas as tensões principais, armazenando apenas as parcelas positivas:

$$\sigma_i^+ = \begin{cases} \sigma_i & \text{se } \sigma_i > 0 \\ 0 & \text{se } \sigma_i < 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

onde σ_i são as tensões principais em cada uma das direções principais contidas no plano da placa e σ_i^+ são as tensões de tração.

Posteriormente são calculadas as deformações causadas pelas tensões de tração nas direções principais:

$$\varepsilon_{Ti} = \frac{1 + \nu_c}{E_c} \sigma_i^+ - \frac{\nu_c}{E_c} \sum_{j=1}^2 \sigma_j^+ \quad (5.4)$$

onde E_c é o módulo de elasticidade secante do concreto e ν_c o respectivo coeficiente de Poisson.

As deformações positivas em cada uma das direções são dadas por:

$$\varepsilon_{Ti}^+ = \frac{1}{2} (\varepsilon_{Ti} + |\varepsilon_{Ti}|) \quad (5.5)$$

onde $|\varepsilon_{Ti}|$ indica o módulo, ou valor absoluto, das deformações.

Assim, finalmente pode ser obtida a deformação ε_T :

$$\varepsilon_T = \sqrt{(\varepsilon_{T1}^+)^2 + (\varepsilon_{T2}^+)^2} \quad (5.6)$$

No programa o módulo de elasticidade transversal varia segundo a equação $G_{12} = (1 - \beta^*)G$, onde $\beta^* = \left(\frac{\varepsilon_T}{0,005}\right)^{k_1}$. A mudança de variáveis se deu apenas para facilitar a implementação, dado que os módulos de elasticidade são reduzidos por equações semelhantes. A Figura 5.5 apresenta o resultado obtido com essa implementação e usando os mesmos parâmetros de entrada usados anteriormente. Os resultados obtidos com essa implementação serão identificados a partir desse ponto por “Modelo proposto 2”.

Observa-se que, mediante a estratégia associada a variável β^* no modelo de Oliver e colaboradores, esse modelo modificado (Modelo proposto 2) consegue detectar melhor a carga de início da não linearidade da placa e reproduzir a trajetória de equilíbrio com excelente precisão, com cargas ligeiramente menores que as experimentais. A carga de ruptura obtida foi 33,2 kN/m², enquanto a observada experimentalmente foi de cerca de 35,4 kN/m² e a obtida por Lima (2013) foi 36,0 kN/m² (este com um modelo de Mazars adaptado, associado a Situação 03, conforme relatado anteriormente).

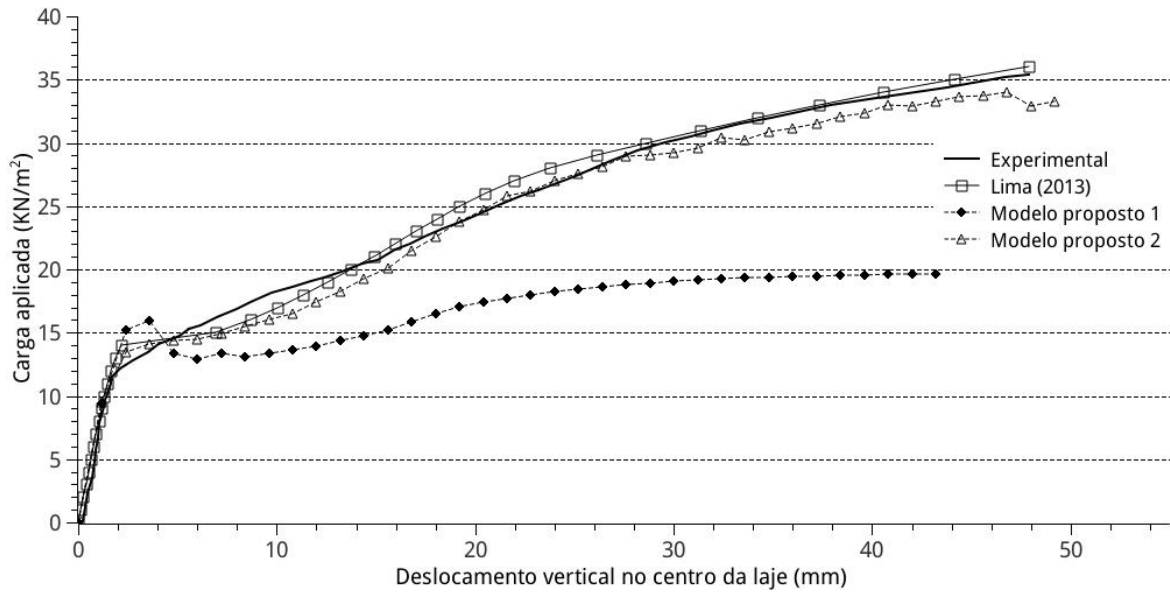


Figura 5.5 Exemplo 1 - Carga x deslocamento para diferentes formulações

Para a carga de $13,45 \text{ kN/m}^2$ foi verificado o estado de deformações do centro da placa e o que poderia ter provocado o aumento dos deslocamentos sem aumento significativo da carga aplicada observado na curva. É mostrado na Figura 5.6 o perfil de deformações para a direção x , direção em que se verificaram maiores deformações.

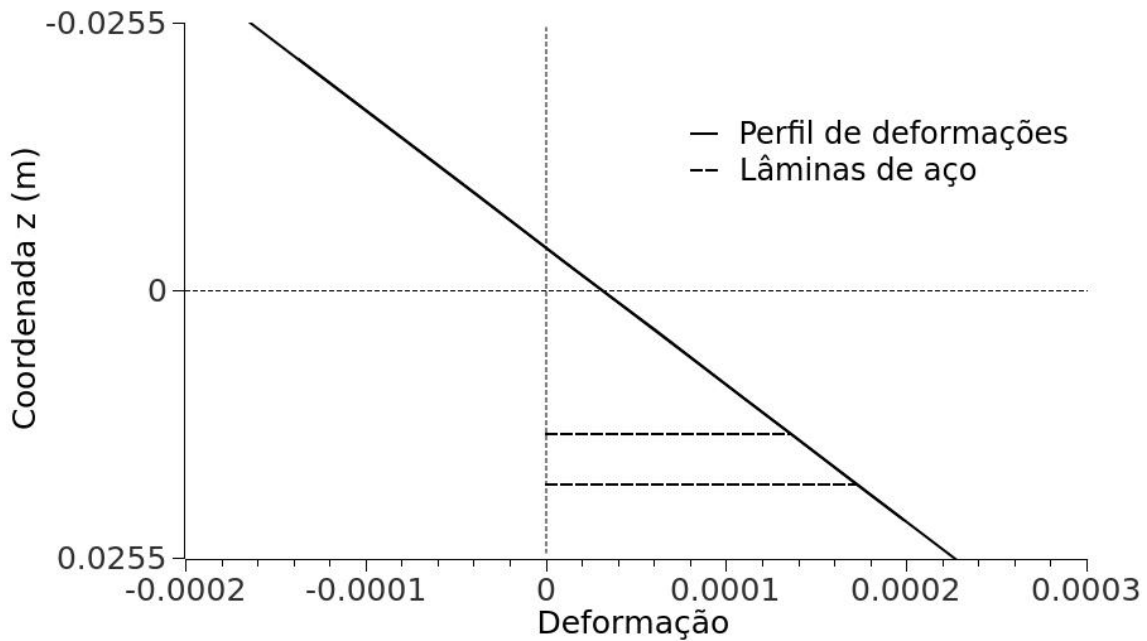


Figura 5.6 Exemplo 1 - Perfil de deformações para a carga $q=13,45 \text{ kN/m}^2$

Pelas informações do referido perfil de deformações e propriedades dos materiais, verifica-se que no nível de carregamento estudado (13,45 kN/m²), as lâminas de aço encontram-se ainda no regime elástico, pois a deformação limite não foi atingida. As primeiras camadas de concreto também se encontram no regime linear, apenas as últimas atingem deformações de tração suficientes para o início da danificação.

Foi verificado posteriormente o valor da variável de dano d nesse passo de carga, para a primeira lâmina (extremidade superior) e a última lâmina (extremidade inferior). Os resultados são apresentados nas Figura 5.7 e 5.8 e foram produzidos a partir de um programa em separado, escrito na linguagem Python. Este tem o propósito de facilitar a visualização dos resultados do programa que foi desenvolvido para este trabalho. No caso de variáveis como deformações, tensões, esforços internos e dano, como a situação aqui ilustrada, os valores são calculados nos pontos de integração de Gauss dos elementos e dentro do visualizador são interpolados por uma equação cúbica para todo o domínio da placa.

O sistema de referência do visualizador é o mesmo apresentado na formulação do elemento finito, eixo x crescente para a direita, eixo y crescente para baixo e o eixo z perpendicular aos dois.

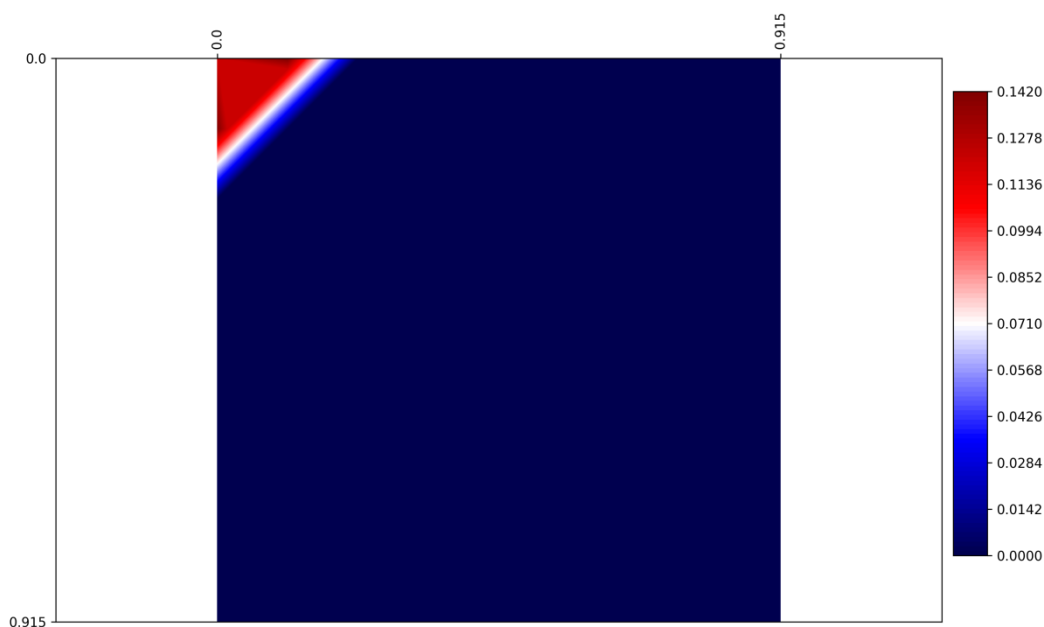


Figura 5.7 Exemplo 1 - Variável de dano d verificada na primeira camada para $q=13,45$ kN/m²

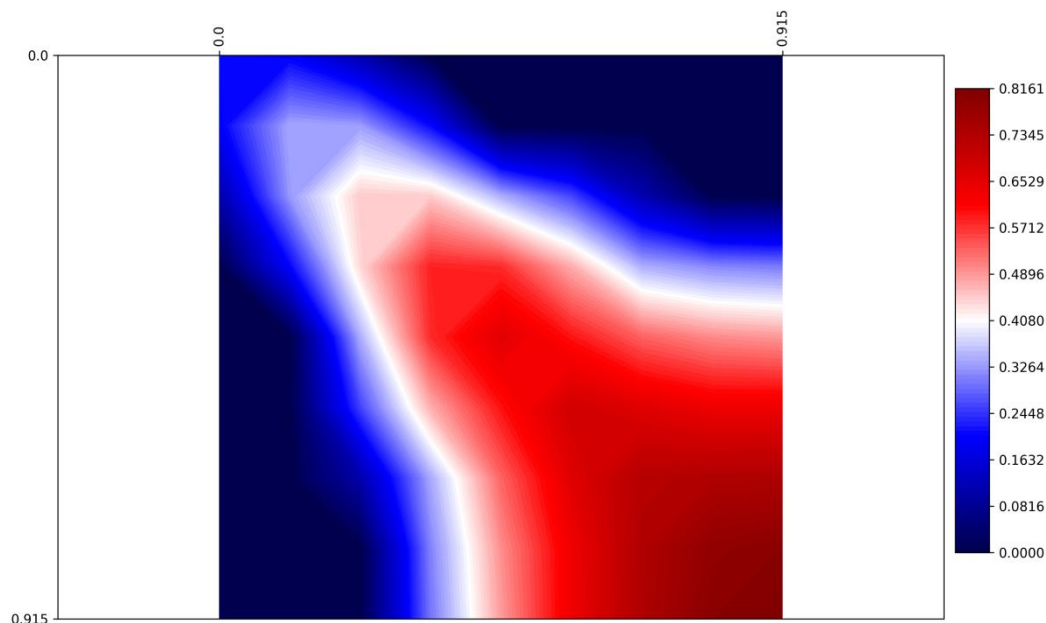


Figura 5.8 Exemplo 1 - Variável de dano d verificada na última camada para $q=13,45 \text{ kN/m}^2$

Observa-se que, mesmo para esse nível de carga baixo, apesar de não ser verificado dano no centro da primeira camada, ocorre danificação da lâmina decorrente de tensões de cisalhamento que tem seus maiores valores registrados nos cantos da placa. Foi novamente verificado o estado do dano da placa para a carga de $15,45 \text{ kN/m}^2$, quando a carga aplicada volta a aumentar mais intensamente, sendo os correspondentes resultados apresentados nas Figura 5.9 e Figura 5.10.

Para esse nível de carga a última lâmina está praticamente toda danificada e na primeira lâmina o dano avançou no canto da placa. Foram verificadas as deformações das lâminas de aço e estas ainda se encontravam no estágio linear. Portanto, foi o processo de danificação no canto das primeiras lâminas e no centro das camadas inferiores que levou ao processo de avanço dos deslocamentos no centro da placa sem grande aumento da carga aplicada.

Para a carga de ruptura, $33,2 \text{ kN/m}^2$, foi verificada na seção transversal do ponto central da placa, que na direção x o concreto estava submetido à uma deformação de compressão de aproximadamente $6,5 \times 10^{-4}$, enquanto o aço estava submetido à uma deformação da ordem de $9,0 \times 10^{-3}$, ou seja, o aço havia escoado e estava próximo da ruptura. A Figura 5.11 ilustra esse perfil de deformações. Devido às variáveis serem avaliadas na altura média das lâminas no programa, os valores das deformações

verificados nas saídas do programa são ligeiramente diferentes dos ilustrados na figura para os extremos da laje.

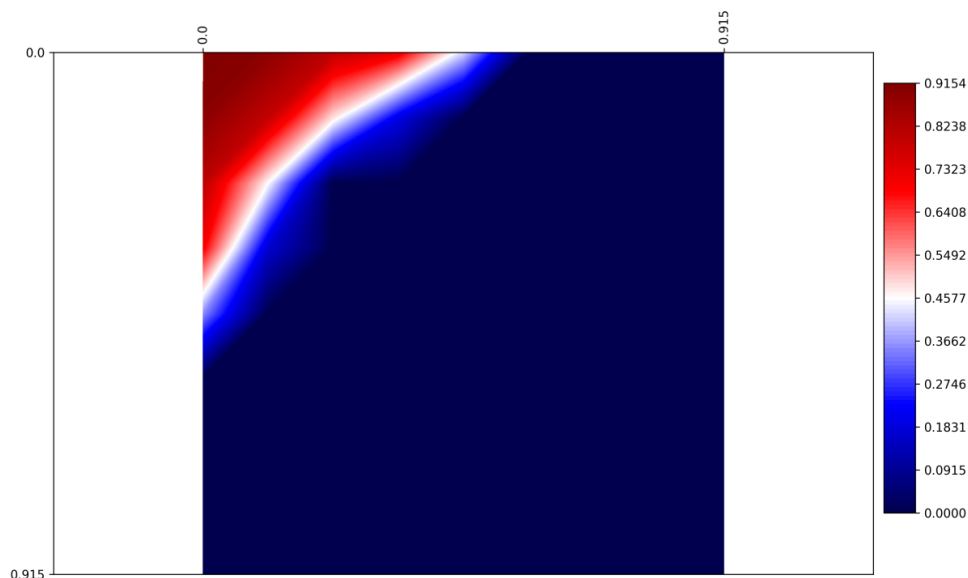


Figura 5.9 Exemplo 1 - Variável de dano d verificada na primeira camada para $q=15,45 \text{ kN/m}^2$

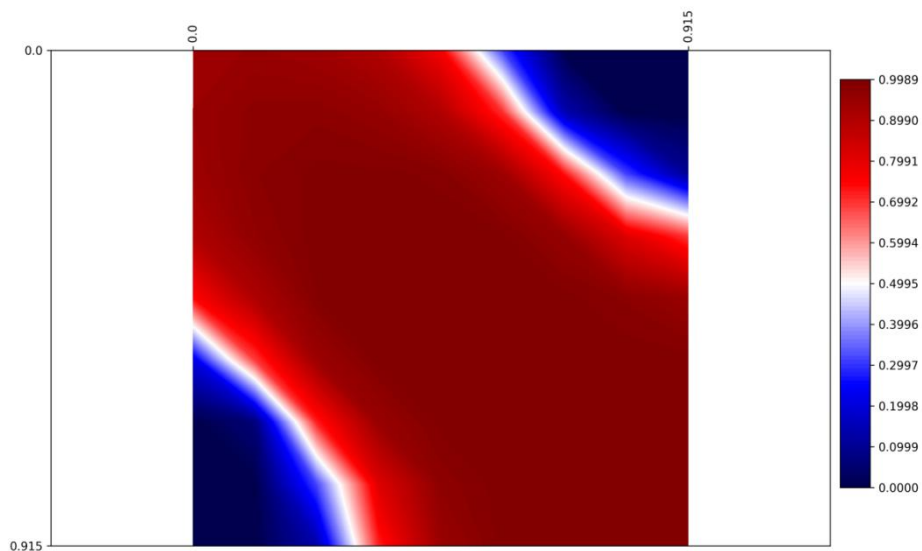


Figura 5.10 Exemplo 1 - Variável de dano d verificada na última camada para $q=15,45 \text{ kN/m}^2$

Conforme o diagrama dos domínios de deformação na ruptura de elementos de concreto armado, segundo a NBR 6118:2014 - Projeto de estruturas de concreto -

Procedimento e mostrado na Figura 5.12, a seção se encontrava no domínio 2, característico de seções em flexão normalmente armadas. Lima (2013), por sua vez, identificou que a camada de concreto mais comprimida estava submetida à uma deformação de $2,0 \times 10^{-3}$ e as barras de aço vieram a romper, caracterizando assim a ruptura do elemento na condição de superarmado, o que é estranho diante das deformações encontradas por Lima.

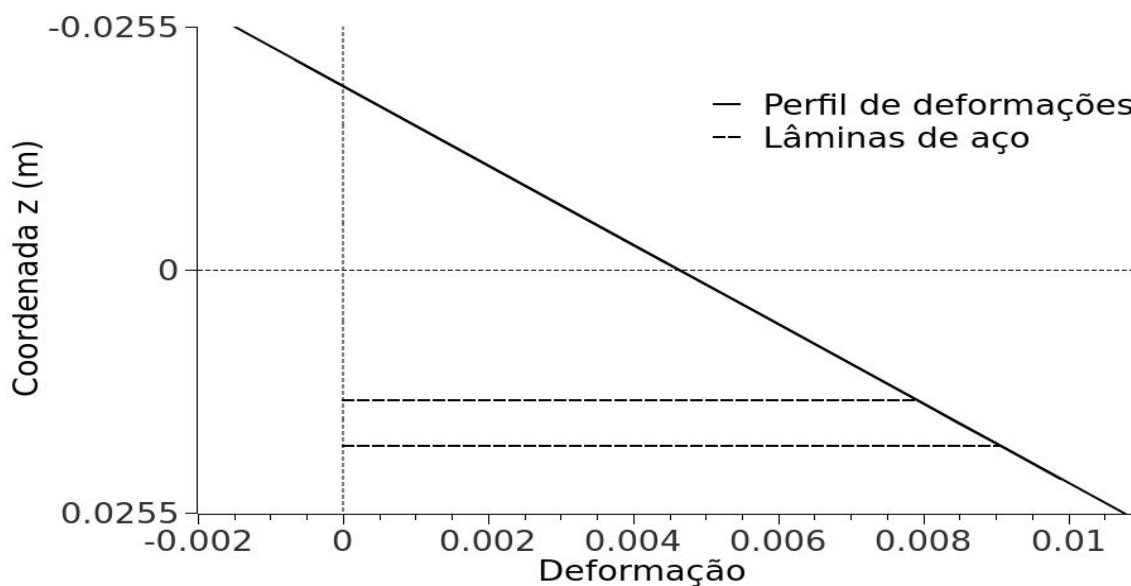


Figura 5.11 Exemplo 1 - Perfil de deformações para a carga de ruptura

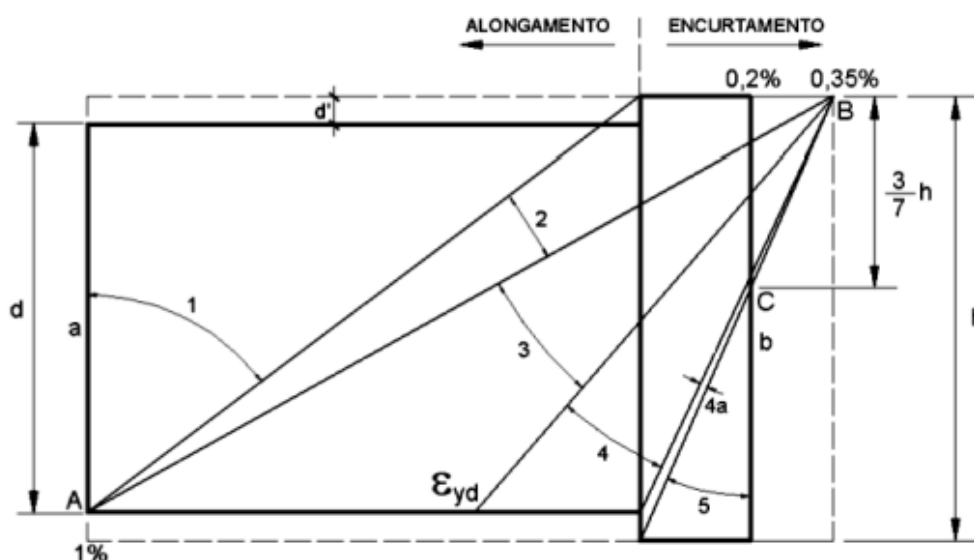


Figura 5.12 Diagrama dos domínios de deformação na ruína de elementos de concreto armado

FONTE: Libânio et al. (2003)

Seguindo com os estudos do problema em questão, foi verificada a influência do número de lâminas totais empregadas na análise. Foram testadas laminações com 10, 15, 20, 25 e 30 camadas, cujos resultados são apresentados na Figura 5.13.

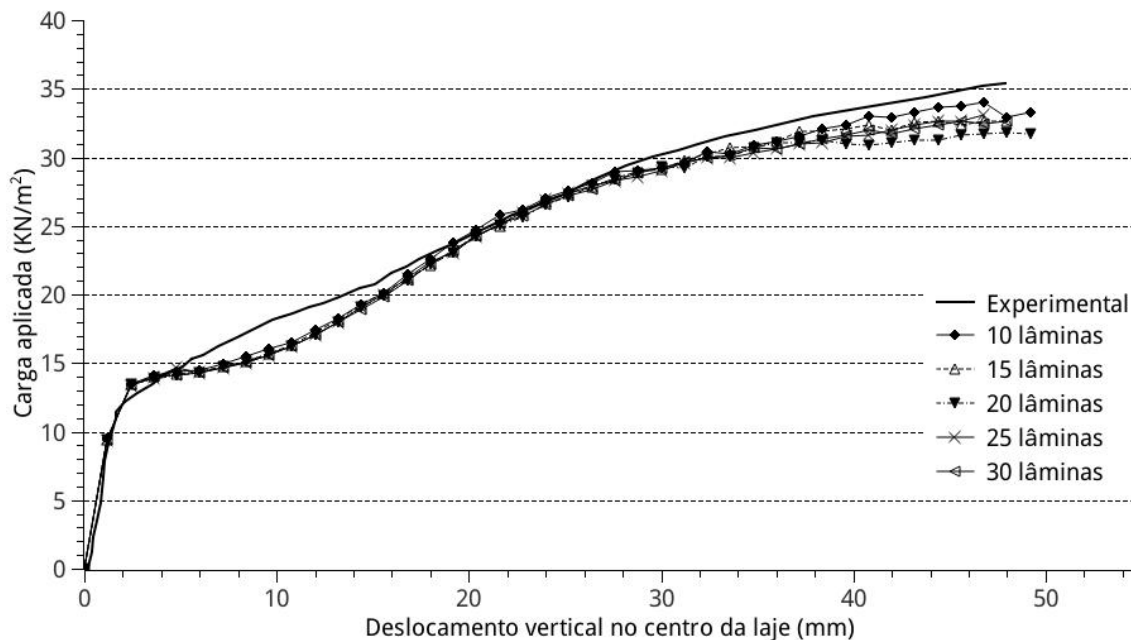


Figura 5.13 Exemplo 1 - Influência do número de camadas

Pode-se ver que praticamente as curvas se sobrepõem, com alguma diferença próxima da carga de ruptura, quando inclusive as respostas já apresentam uma pequena instabilidade com reduções nos valores da carga. O aspecto de convergência da resposta para poucas camadas também foi obtido por Lima (2013) que apontou que a partir de 15 camadas não havia grande diferença, embora Lima (2013) tenha apresentado seus resultados finais, para essa laje, com 36 lâminas.

Por fim é apresentado na Figura 5.14 um comparativo com mais uma modelagem, desta vez feita por Jiang e Mirza (1997). Estes autores modelaram o concreto através da teoria da plasticidade e empregando o método dos elementos finitos na análise com um elemento retangular de 4 nós e 20 graus de liberdade. Para a simulação das armaduras foram usados elementos de barra e admitido comportamento elastoplástico perfeito.

Jiang e Mirza (1997) fizeram um estudo paramétrico verificando que para as diferentes malhas os resultados foram próximos, mas, além disso, também foi testada a influência do tamanho do incremento de carga, e a influência de duas variáveis do

modelo para o concreto. Uma variável relacionada à taxa de perda de resistência do concreto e uma variável β relacionada à resistência última do concreto. Foi constatado por esses autores para esta laje em questão que o tamanho do incremento de carga e a taxa de perda da resistência são de menor importância. A resistência última do concreto foi a variável mais importante. Os resultados atribuídos a estes autores no gráfico foram obtidos dividindo a carga em 50 incrementos e a resistência última do concreto foi admitida igual a 25,0% da resistência de pico.

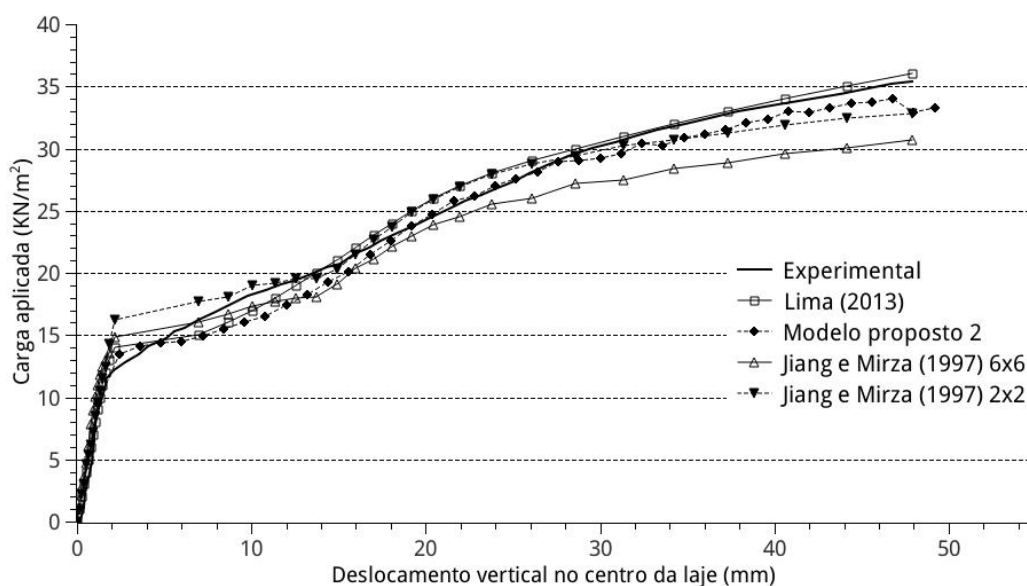


Figura 5.14 Exemplo 1 - Comparação com outros modelos

5.2 EXEMPLO 2 - LAJE QUADRADA APOIADA NOS CANTOS, COM FORÇA CONCENTRADA NO CENTRO, ARMADURA INFERIOR NAS DUAS DIREÇÕES

A segunda laje estudada é uma laje quadrada, apoiada nos quatro cantos, com armadura positiva idêntica nas direções x e y , e submetida a uma força concentrada no ponto central. A laje em questão foi ensaiada experimentalmente por Jofried e McNeice (1971). Suas dimensões são mostradas na Figura 5.15 enquanto as propriedades dos materiais estão na Tabela 5.2.

Para esta laje, Lima (2013) usou uma discretização de 14x14 trechos de integração. Aqui, verificando a convergência, se fez necessário usar uma discretização de 16x16 elementos, o que acarretou em um comprimento característico da malha de 28,575 mm (valor exato). O número de lâminas usado nessa primeira análise foi 10.

Para a análise não linear foi utilizado a técnica de controle de deslocamentos, com um incremento de 0,28 mm no ponto central para o deslocamento w_0 . Por fim, a tolerância usada foi de $1,0 \times 10^{-4}$. O resultado dessa modelagem é mostrado na Figura 5.16.

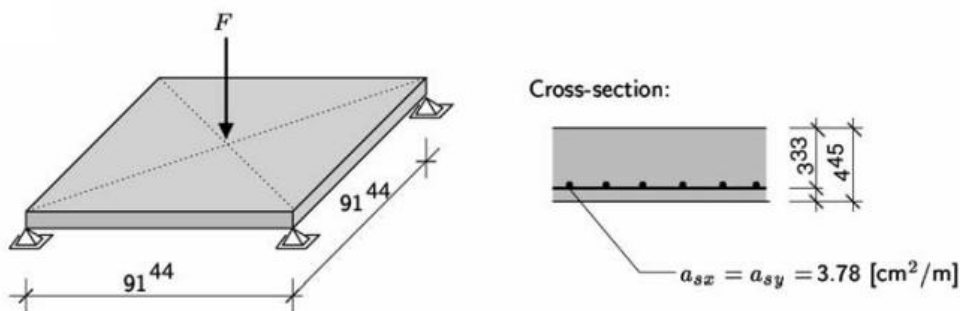


Figura 5.15 Dimensões (em cm) e armaduras da laje do Exemplo 2

FONTE: Krätzig e Pölling (2004)

Tabela 5.2 Propriedades dos materiais da laje do Exemplo 2

Concreto		Aço	
E_c	28,613 GPa	E_s	201,30 GPa
ν_c	0,15	f_y	345,40 MPa
f_c	37,92 MPa	ϵ_{lim}	0,001716
f_t	2,90 MPa	ϵ_{ult}	0,01 (adotado)

Para o Modelo proposto 1 observa-se que a rigidez após o início da não linearidade é ligeiramente superior à verificada experimentalmente, mas no trecho final ocorre perda da rigidez culminando para uma carga de ruptura de 15,2 kN, que é um valor próximo da carga de ruptura experimental da ordem de 14,2 kN, porém sendo atingida para um deslocamento maior que o visto experimentalmente. Com relação ao Modelo proposto 2 ele acompanha o comportamento observado para o Modelo proposto 1, porém, sem a perda de rigidez no trecho final, acarretando assim na detecção de uma carga de ruptura de 18,8 kN, um valor acima da carga verificada experimentalmente. Portanto, diante desses resultados pode-se concluir que ambos os modelos aqui propostos não retratam bem o comportamento estrutural da presente laje, contrariamente a excelente previsão obtida por Lima (2013).

Para a carga aplicada de 14,1 kN, onde o deslocamento no centro da placa foi avaliado em 7,0 mm, foi determinado segundo o Modelo proposto 2 o perfil de deformações do ponto central da placa para a direção y , o qual está ilustrado na Figura 5.17.

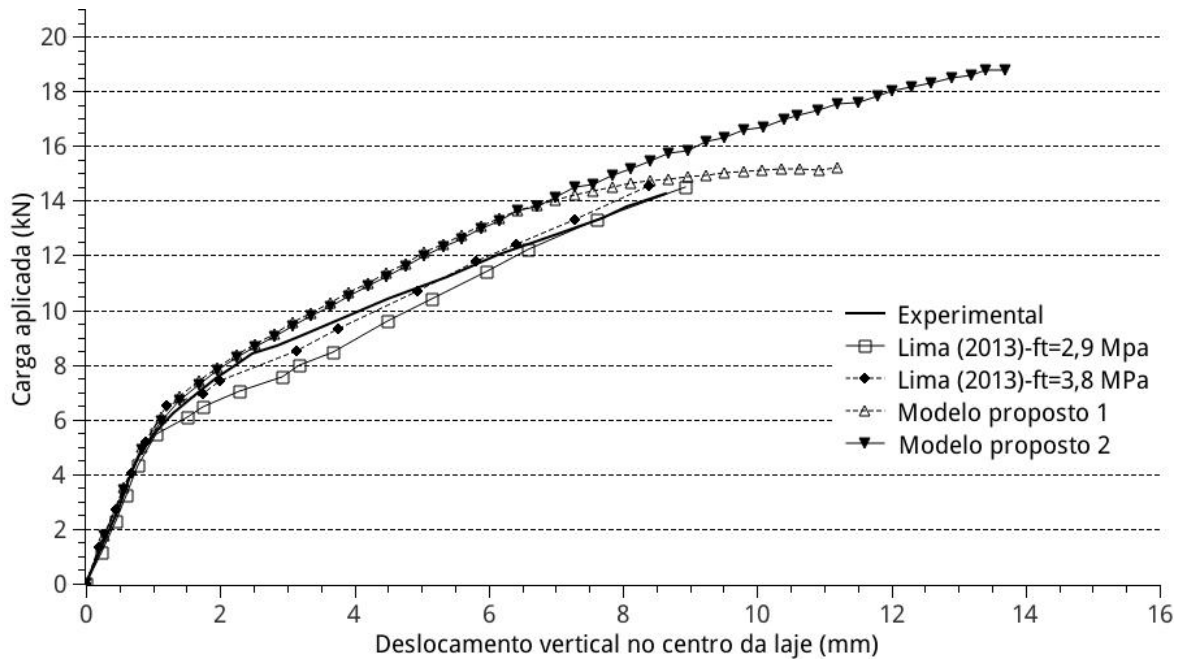


Figura 5.16 Exemplo 2 - Carga x deslocamento para $l^*=28,575$ mm

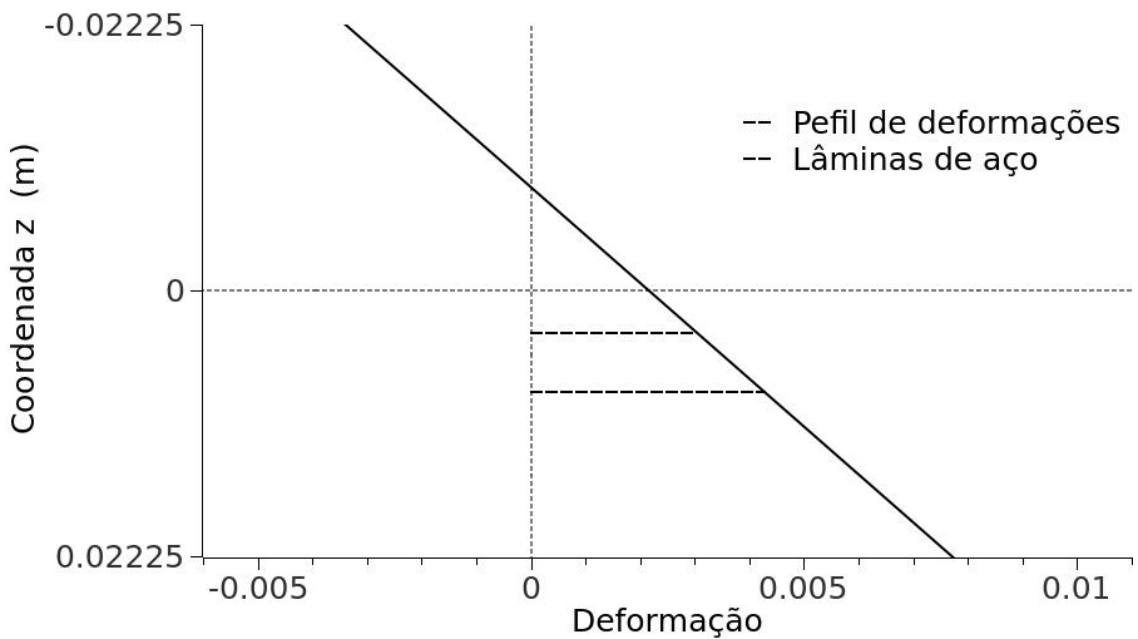


Figura 5.17 Exemplo 2 - Perfil de deformações para a carga de 14,1 kN

O que se observa é que na direção y , onde as deformações são maiores, o concreto na lâmina superior mais comprimida encontrava-se submetido a uma deformação de $2,6 \times 10^{-3}$ e a variável de dano indicava um valor de 0,83, isto é, o material apresentava alguma resistência, mas estava próximo da ruptura. Com relação à lâmina de aço inferior esta apresentava uma deformação de $5,15 \times 10^{-3}$ (portanto havia escoado), e um dano igual de 0,43.

Lima (2013) observou em sua modelagem (com resistência à tração do concreto de 2,9 MPa) que neste mesmo nível de carga as deformações eram respectivamente de $5,7 \times 10^{-3}$ e $6,3 \times 10^{-3}$ para o concreto e para o aço, isto é, o concreto não oferecia mais resistência e o aço havia escoado. Portanto, esse autor classificou a estrutura como normalmente armada. Por sua vez, os resultados do Modelo proposto 2 para a carga de ruptura aqui detectada, indicaram que o concreto estava submetido a uma deformação de $6,2 \times 10^{-3}$ e o aço $1,45 \times 10^{-2}$, típico de uma peça normalmente armada, conforme esquematizado no perfil de deformações mostrado na Figura 5.18.

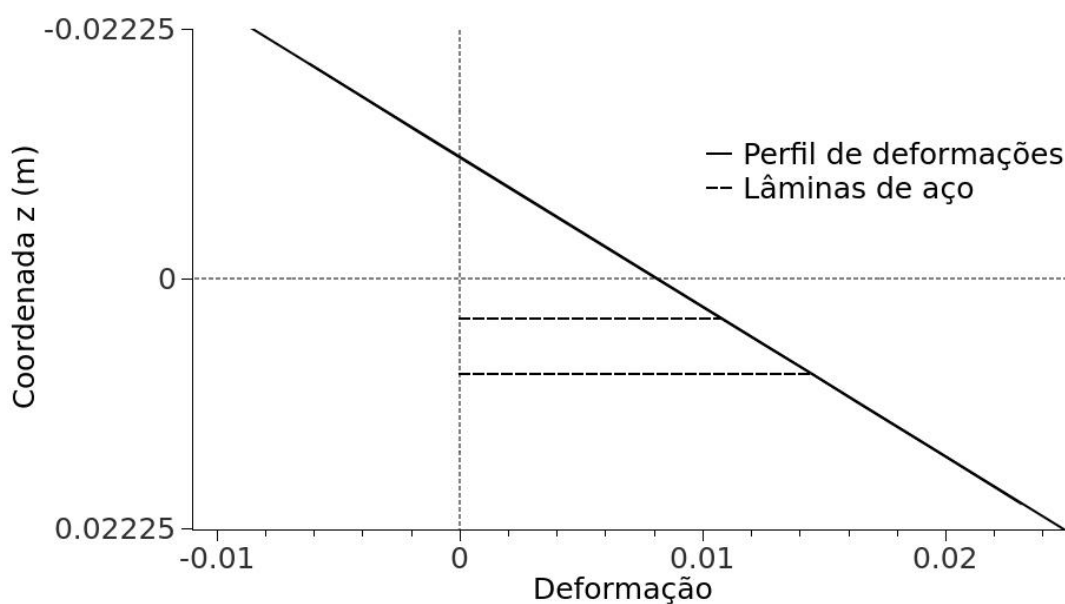


Figura 5.18 Exemplo 2 - Perfil de deformações para a carga de 18,8 kN

A seguir foi feito um estudo de convergência para o número de lâminas, novamente utilizando o Modelo proposto 2, conforme mostrado na Figura 5.19. Percebe-se que as curvas convergem, praticamente se sobrepondo, mesmo para um número pequeno de lâminas, apenas diferindo ligeiramente na proximidade da carga de

ruptura, sendo 10 lâminas o valor adotado para as análises subsequentes. Por sua vez, Lima (2013) com o MDFE apontou uma convergência da solução para o número de lâminas igual ou maior que 15, superior ao detectado aqui com o MEF.

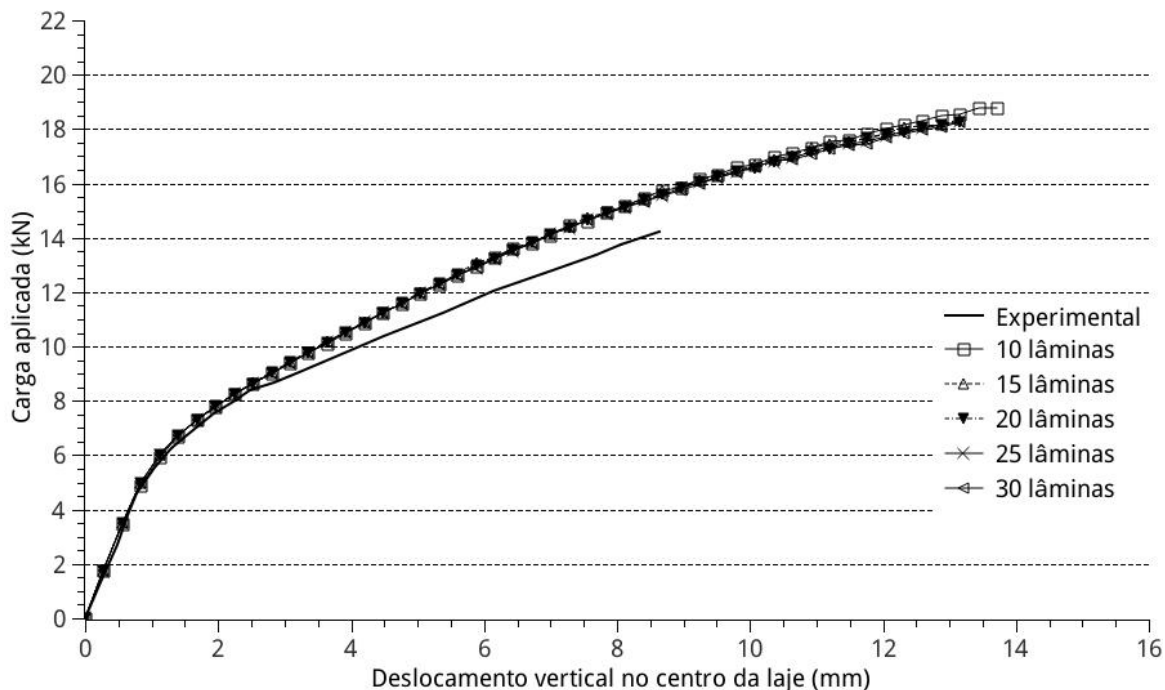


Figura 5.19 Exemplo 2 - Influência do número de camadas

Para finalizar a análise do presente caso, na Figura 5.20 são apresentados os resultados do modelo proposto com modelagens feitas por outros autores.

A observação desse conjunto de previsões para a resposta carga-deslocamento permite concluir que alguns autores conseguiram descrever suficientemente bem o comportamento da estrutura, como Lima (2013) e Krätzig e Pölling (2004). Por outro lado o modelo de Zhang et al. (2007) apresenta uma resposta mais rígida no início da etapa não linear com uma ruptura em torno de 10 kN, enquanto Doulah e Kablr (2001) e Zhang et al. (2007) encontraram cargas de ruptura acima das previstas experimentalmente, assim como o modelo aqui proposto.

Pela diversidade de comportamento dos modelos vê-se que a modelagem do problema apresenta algumas dificuldades. No caso do modelo de Krätzig e Pölling (2004), por exemplo, a modelagem dos materiais foi feita por um modelo elastoplástico, sendo considerada além do concreto e das barras de aço a interface dos dois materiais admitindo-se assim a possibilidade de perda de aderência entre os materiais.

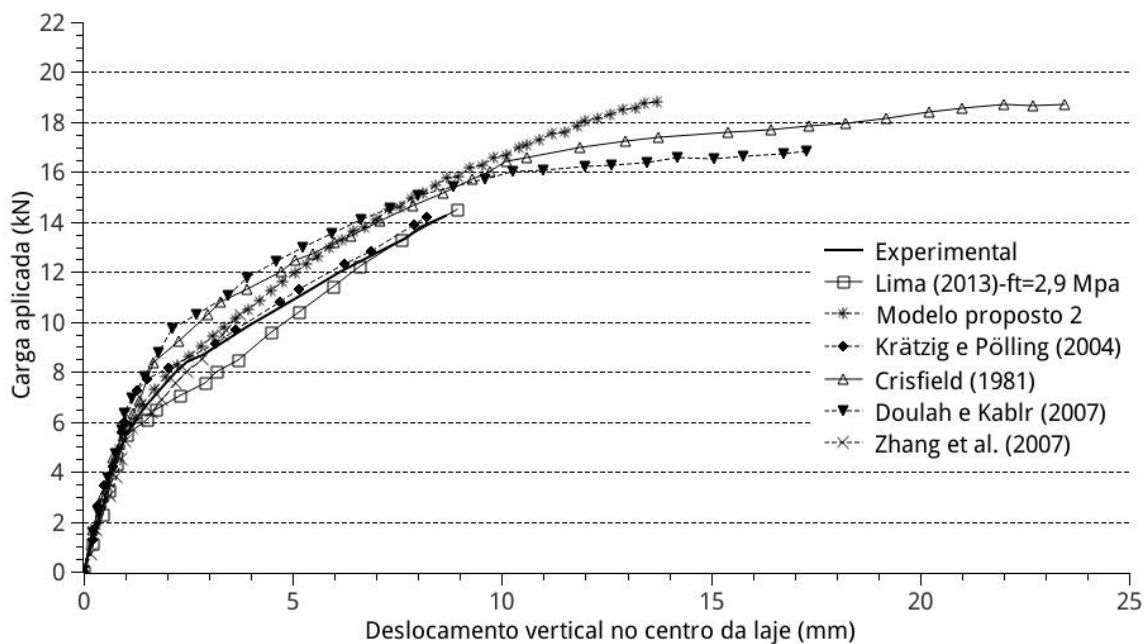


Figura 5.20 Exemplo 2 - Comparação com outros modelos

5.3 EXEMPLO 3 - LAJE QUADRADA APOIADA NOS CANTOS, COM FORÇA CONCENTRADA NO CENTRO, ARMADURA SUPERIOR E INFERIOR NAS DUAS DIREÇÕES

A terceira laje modelada foi testada experimentalmente por Duddeck et al. (1978) e é uma placa quadrada, reforçada com armadura superior e inferior nas duas direções, apoiada nos cantos e submetida a uma carga concentrada no centro da mesma. As dimensões da laje e propriedades dos materiais são apresentadas respectivamente na Figura 5.21 e na Tabela 5.3. Esta placa apresenta as seguintes áreas de aço: armadura superior na direção $x = 2,94 \text{ cm}^2$; armadura superior na direção $y = 1,07 \text{ cm}^2$; armadura inferior na direção $x = 6,05 \text{ cm}^2$; armadura inferior na direção $y = 2,20 \text{ cm}^2$.

Para garantir a convergência a malha necessária foi de 16 por 16 elementos, o que implica em um comprimento característico de 32,5 mm (valor exato). A placa foi discretizada em 20 lâminas, número maior do que o inicialmente adotado nos exemplos anteriores por causa do maior número de lâminas de aço e, conseqüentemente, de lâminas de concreto entre as mesmas. Foi utilizado o controle de deslocamentos na análise com um incremento de 0,32 mm e tolerância de $1,0 \times 10^{-4}$. Na Figura 5.22 são apresentados os respectivos resultados carga-deslocamento.

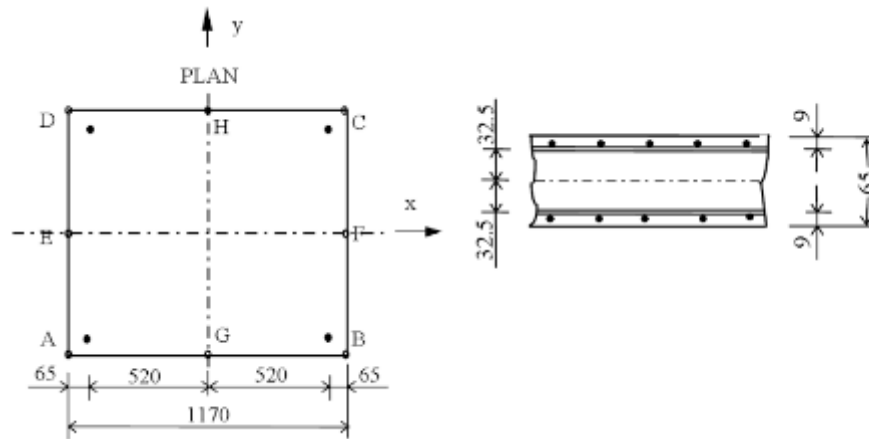


Figura 5.21 Dimensões (em mm) e armaduras da laje do Exemplo 3

FONTE: Zhang et al. (2006)

Tabela 5.3 Propriedades dos materiais da laje do Exemplo 3

Concreto		Aço	
E_c	16,4 GPa	E_s	201,00 GPa
ν_c	0,15	f_y	670,00 MPa
f_c	43,00 MPa	ϵ_{lim}	0,003333
f_t	3,00 MPa	ϵ_{ult}	0,01 (adotado)

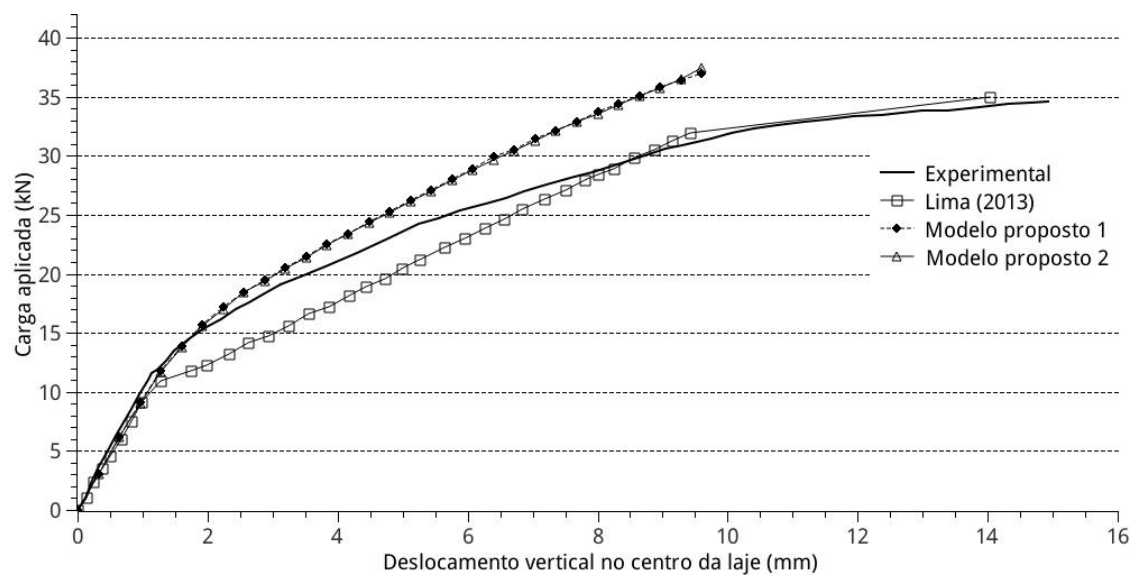


Figura 5.22 Exemplo 3 - Carga x deslocamento para diferentes formulações

Para essa laje percebe-se que não há diferença entre o comportamento previsto pelos dois modelos aqui implementados, com os dois apresentando uma rigidez para a placa maior do que a indicada pela curva experimental. Nos dois casos a carga de ruptura verificada, em torno de 37,0 kN, foi ligeiramente superior à apontada no experimento de Duddeck et al. (1978), 34,6 kN. Porém, de modo geral os dois modelos não conseguem reproduzir bem a fase não linear da curva carga-deslocamento, ao contrário do verificado com o modelo de Lima (2013), que novamente obteve excelente previsão da resposta estrutural.

Tal comportamento, provavelmente é explicado pelo fato de haver armaduras superior e inferior nas duas direções, de forma que há a ocorrência de um nível mais alto de tensões de compressão na região superior da laje, comparando com a laje do Exemplo 2 que tem as mesmas condições de contorno e carregamento.

Quando comparadas as curvas tensão-deformação simulada de um concreto submetido à compressão por este modelo, como ilustrado na Figura 3.4, com o comportamento observado experimentalmente, de forma simplificada representado na Figura 2.2, vê-se que a gerada pelos modelos aqui implementados apresenta maior rigidez nos estágios iniciais por considerar o comportamento do material linear até atingir a tensão máxima, diferente do que afirmam por exemplo Mehta e Monteiro (2008) que apontam o início da não linearidade quando é atingida uma tensão em torno de 30 % da resistência do concreto.

Avaliando o perfil de deformações na direção x para o ponto central da placa, segundo o Modelo proposto 2, para a carga de ruptura (ver Figura 5.23), o concreto mais comprimido estava submetido a uma deformação de $3,4 \times 10^{-3}$ e apenas a penúltima camada de reforço havia escoado, estando submetida a uma deformação de $9,84 \times 10^{-3}$. A última camada de aço está orientada na direção y e a deformação a que estava submetida nessa direção era inferior à limite. Esse perfil de deformações é característico de um elemento normalmente armado.

No passo de carga seguinte a penúltima camada de aço ruiu e a última escoou com a estrutura rompendo por consequência. Lima (2013) apontou como deformações máximas na seção central da placa $13,0 \times 10^{-3}$ para o concreto e para o aço valor superior ao limite de $1,0 \times 10^{-2}$, porém não se pronunciando sobre o domínio de deformações na ruptura.

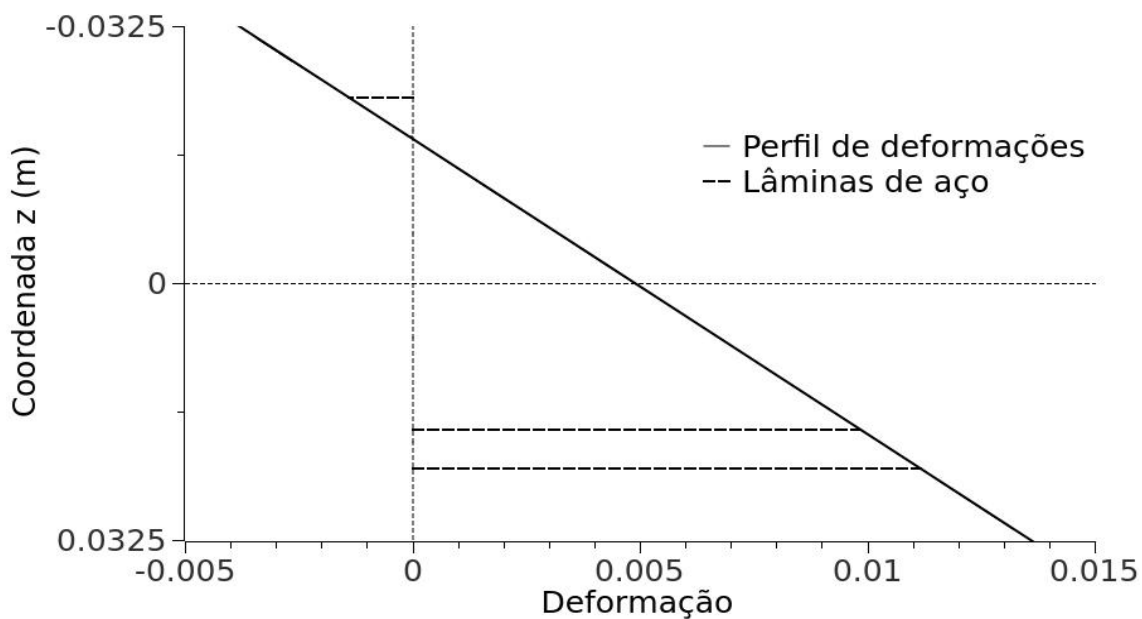


Figura 5.23 Exemplo 3 - Perfil de deformações para carga de ruptura

5.4 EXEMPLO 4 - LAJE EM FLEXÃO A QUATRO PONTOS

A última laje analisada é uma laje retangular, ensaiada experimentalmente por Jain e Kennedy (1974) em um ensaio de flexão à 4 pontos. Esta laje tem 3,8 cm de espessura e apresenta um reforço inferior apenas na direção x , com uma relação entre área de aço e área total da seção igual a 0,00716. As dimensões da placa são mostradas na Figura 5.24 e as propriedades dos respectivos materiais constituintes estão registradas na Tabela 5.4.

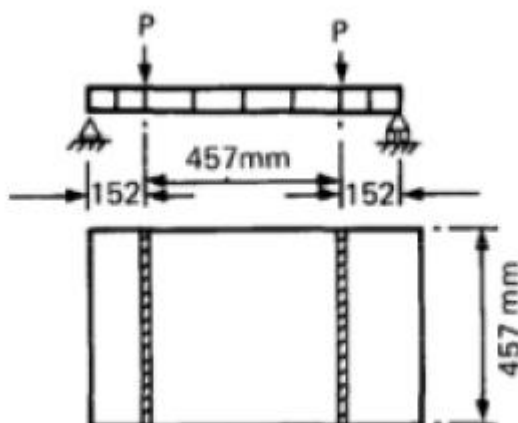


Figura 5.24 Dimensões da laje do Exemplo 4

FONTE: Crisfield (1982)

Tabela 5.4 Propriedades dos materiais da laje do Exemplo 4

Concreto		Aço	
E_c	28,96 GPa	E_s	200,00 GPa
ν_c	0,15	f_y	211,00 MPa
f_c	31,60 MPa	ϵ_{lim}	0,001055
f_t	2,00 MPa	ϵ_{ult}	0,01 (adotado)

Para a presente laje, dado o fato de o programa permitir apenas cargas aplicadas sobre os nós da estrutura, de forma que uma fileira de nós precisa coincidir com a coordenada de aplicação da carga de linha, foi adotada uma discretização de 5 por 5 elementos, que se mostrou suficiente para a convergência da resposta. Portanto, diante dessa discretização do plano médio da placa, resultou o valor de 58,97 mm (valor aproximado) para o comprimento característico da malha. Por sua vez, ainda observando a convergência da solução, foram usadas 10 lâminas para discretizar a espessura da placa.

Quanto ao processo incremental-iterativo foi usado controle de deslocamento, monitorando o deslocamento vertical no centro da placa, tendo como incremento 0,16 mm e a tolerância utilizada foi de $1,0 \times 10^{-4}$. Os resultados são apresentados na Figura 5.25.

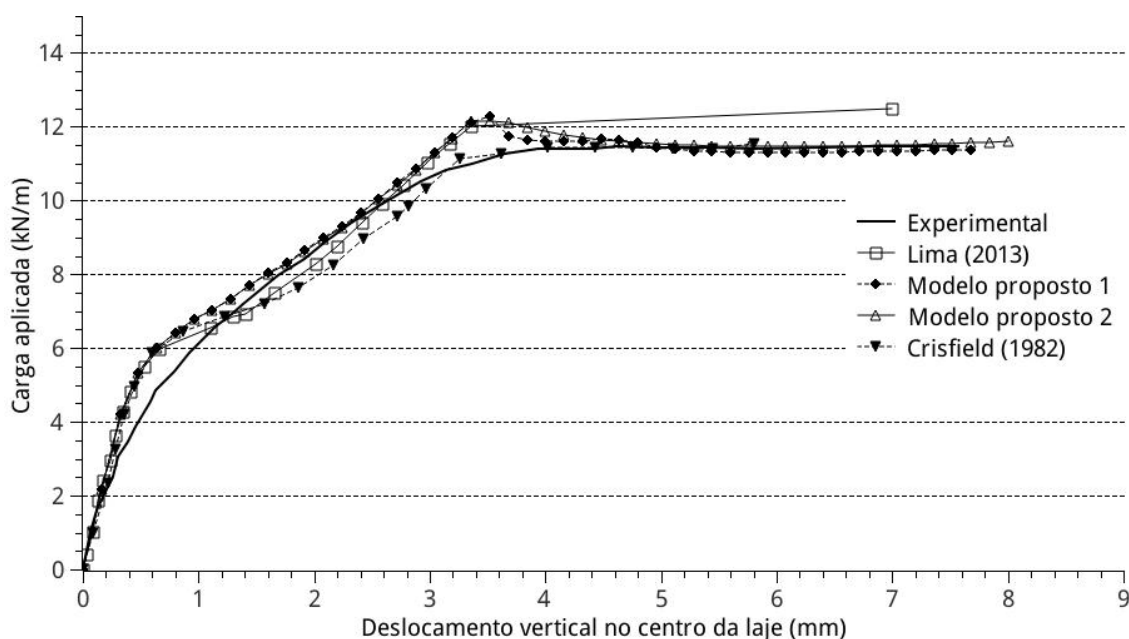


Figura 5.25 Exemplo 4 - Carga x deslocamento para diferentes formulações

O que se observa nessa simulação é que, assim como no exemplo anterior, a influência do modo como é danificado o módulo de elasticidade transversal é muito pequena na resposta carga-deslocamento, só aparecendo após a carga máxima ser atingida, conforme evidencia a proximidade entre as respostas aqui obtidas através do Modelo proposto 1 e do Modelo proposto 2.

Percebe-se que os modelos têm certa dificuldade de descrever o início do trecho não linear e obtêm uma carga máxima de 12,2 kN/m para o Modelo proposto 2, com um deslocamento no centro da placa de aproximadamente 3,4 mm, superior à verificada experimentalmente, 11,5 kN/m. Portanto, pode-se concluir diante desses resultados aqui obtidos que as duas proposições apresentaram previsões praticamente coincidentes entre si, e globalmente satisfatórias para a laje em questão, tal como também obteve Lima (2013), com sua estratégia baseada no modelo de dano de Mazars.

Concentrando-se agora no ponto central da placa, observa-se para a carga máxima, conforme Modelo proposto 2, que o perfil de deformações segundo x , mostrado na Figura 5.26, indica para o concreto e para o aço deformações de $4,19 \times 10^{-4}$ e $1,09 \times 10^{-3}$, respectivamente, donde se conclui que o aço havia começado a escoar.

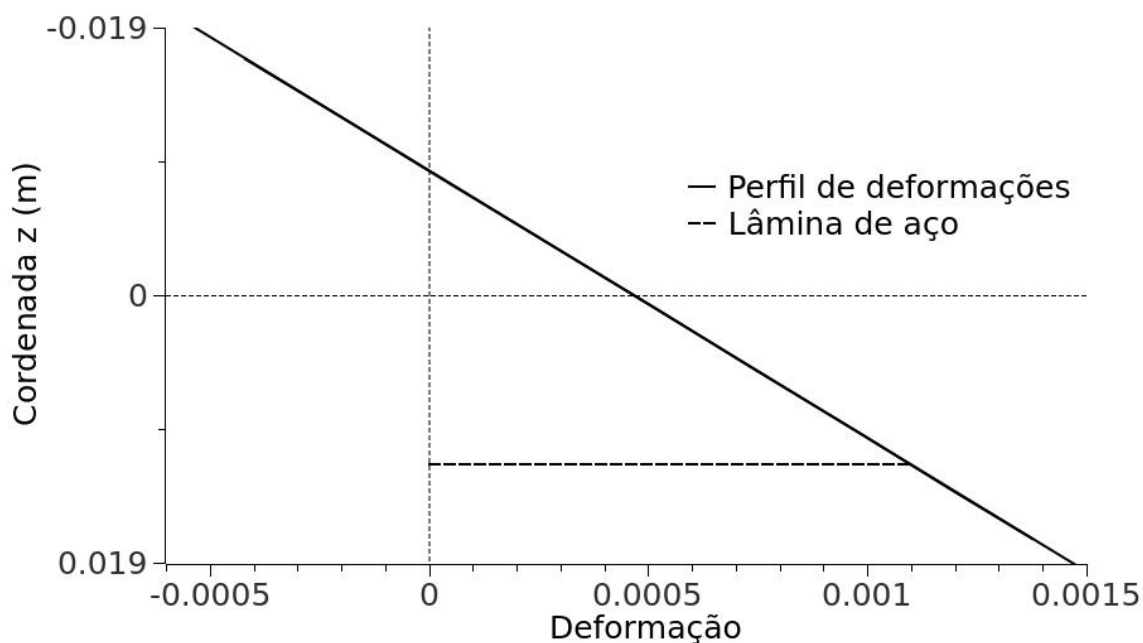


Figura 5.26 Exemplo 4 - Perfil de deformações para a carga de 12,5 kN/m

A progressiva diminuição da carga verificada, inclusive, se dá pela perda da resistência da camada de aço. De fato, mesmo na última condição de equilíbrio obtida

na modelagem a lâmina de aço ainda possuía alguma resistência e as duas camadas superiores de concreto não haviam danificado, situação apresentada na Figura 5.27. O comportamento previsto pelo modelo é característico de um elemento pouco armado. Por sua vez, Lima (2013) verificou para essa placa que o concreto na região mais comprimida ainda se encontrava no regime linear elástico com deformação de $4,5 \times 10^{-4}$ e o aço havia escoado, também caracterizando uma laje pouco armada.

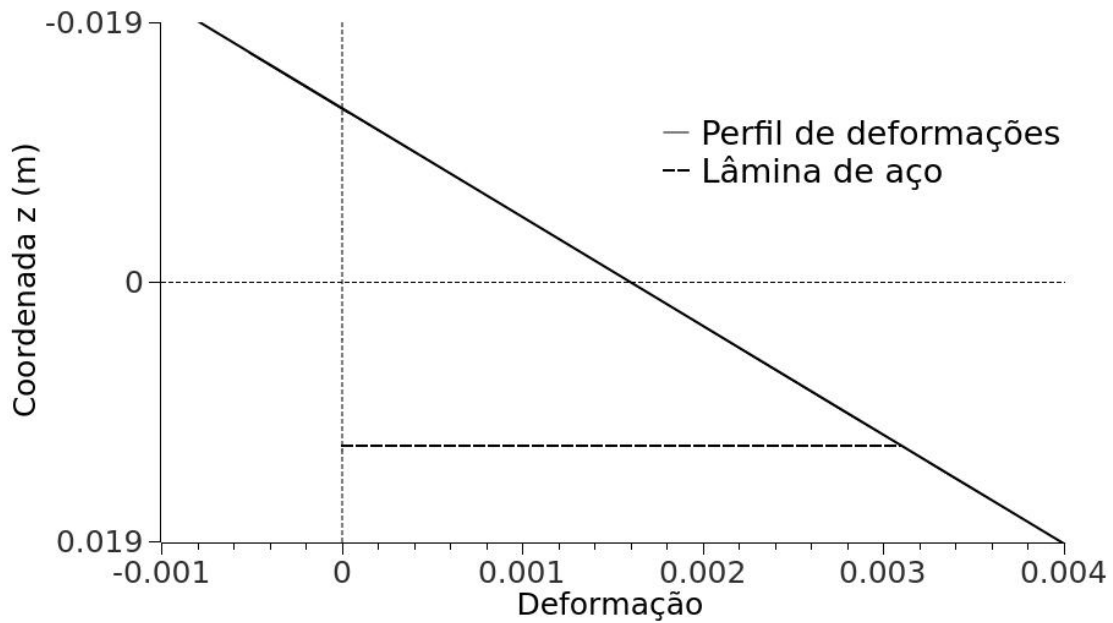


Figura 5.27 Exemplo 4 - Perfil de deformações para a carga de ruptura

6 CONCLUSÕES

Na fase de validação dos dois modelos aqui propostos, foram simulados os resultados carga-deslocamento experimentais de quatro lajes encontradas na literatura. A primeira laje foi extraída dos estudos numérico-computacionais de Jiang e Mirza (1997) e de Lima (2013), sendo quadrada, simplesmente apoiada, submetida a carga uniformemente distribuída e armada na duas direções na região inferior. A análise dessa laje por Lima (2013) apontou uma deficiência no modelo de Mazars (1984), mostrando que era necessário danificar o módulo de elasticidade transversal com o avanço da carga, para se chegar a um resultado carga-deslocamento adequado.

Por sua vez, o modelo de Oliver et al. (1990), aqui implementado e cujos resultados foram aqui identificados por “Modelo proposto 1”, apesar de incluir intrinsecamente uma penalização dessa propriedade (módulo de elasticidade transversal), também não se mostrou preciso na respectiva análise, o que motivou a implementação de uma alternativa proposta por Cervenka (1985) e Hinton (1988) (cujos resultados foram aqui denominados de “Modelo proposto 2”) que permitiu simular satisfatoriamente a laje em questão, deixando claro que é necessário danificar o módulo de elasticidade transversal (o que não é previsto pelo modelo de dano de Mazars (1984)), sendo o modelo destes autores uma alternativa para tanto. Com este exemplo também se notou que um número alto de lâminas na discretização não foi necessário, conseguindo-se convergência da solução já com 10 lâminas, fazendo-se uso nesse estudo do Modelo proposto 2.

O segundo exemplo estudado abordou uma placa quadrada com armadura positiva nas duas direções e submetida a uma carga concentrada no centro, modelada por Krätzig e Pölling (2004) e também por Lima (2013). A análise dessa laje mostrou uma dificuldade de representar a resposta carga-deslocamento por parte dos dois modelos aqui propostos, gerando respostas mais rígidas para o comportamento não linear da laje. Nesse sentido, o Modelo proposto 1 obteve a carga de ruptura mais próxima da experimental, embora com um deslocamento destacadamente superior, enquanto que a análise usando o Modelo proposto 2 apontou a ruptura da laje com carga e deslocamento bem superiores aos valores obtidos experimentalmente.

No que se refere a discretização da espessura da laje, realizada com o Modelo proposto 2, verificou-se que um número de lâminas igual a 10 na discretização é suficiente.

No Exemplo 3, também estudado por Zhang et al. (2006) e Lima (2013), foi analisada uma placa quadrada, submetida a uma carga concentrada no centro, e com armadura nas duas direções, na região superior e inferior (armadura dupla). Portanto, a discretização da espessura dessa laje requereu, naturalmente, mais lâminas em função do número de camadas de aço. Nas análises feitas com os dois modelos aqui propostos verificou-se que a forma como o módulo de elasticidade transversal é danificado não foi relevante no comportamento simulado dessa estrutura, com os resultados dos dois modelos praticamente coincidindo. Apesar dos modelos propostos apresentarem valores próximos para a carga de ruptura, em comparação com o valor experimental, a curva é bastante diferente, especialmente no trecho final onde se obteve deslocamentos inferiores para os mesmo níveis de carga.

O Exemplo 4 tratou de uma laje retangular, com dimensões ligeiramente diferentes nas duas direções, tendo armaduras apenas em uma direção, e somente na região inferior. Esta laje foi ensaiada em flexão a 4 pontos, sendo modelada também por Crisfield (1982) e Lima (2013). Nesse caso, para os dois modelos aqui implementados, observou-se uma previsão satisfatória para o comportamento carga-deslocamento da laje, sendo essas previsões praticamente coincidentes, detectando uma carga máxima pouco acima da correspondente experimental, e uma boa convergência para a carga de ruptura experimental. Portanto, foi possível identificar que, nesse caso, a diferença na forma de danificação do módulo de elasticidade transversal, conforme proposta em cada um dos dois modelos, mostrou-se irrelevante na resposta estrutural.

Com base nos resultados desses quatro exemplos ficou evidente que, no caso da previsão carga-deslocamento de lajes de concreto armado até a ruptura, é imprescindível danificar o módulo de elasticidade transversal do concreto, em uma abordagem via mecânica do dano, tal como apontou Lima (2013), que também usou um modelo escalar de dano ao estudar as quatro lajes aqui analisadas. Porém, as duas alternativas aqui propostas não foram totalmente efetivas, falhando algumas vezes em partes da trajetória de equilíbrio das lajes, como no caso da segunda laje, onde a parte final da resposta não linear não foi satisfatória, ou como no caso do terceiro exemplo, onde a resposta não linear foi mais rígida que a experimental.

Por fim apresentam-se algumas sugestões para trabalhos futuros:

- Ampliar a validação dos modelos aqui propostos simulando mais resultados experimentais carga-deslocamento de lajes de concreto armado, buscando inclusive casos similares ao do exemplo 1, com carga distribuída uniforme, ou com condição de apoio simplesmente apoiada nos quatro bordos;

- Implementar o modelo usado por Cervenka (1985) e Hinton (1988) junto ao modelo de Mazars (1984);

- Testar o Modelo proposto 2 em vigas de concreto armado, inclusive em vigas que rompam por cisalhamento;

- Implementar uma formulação para a flexão de placas que leve em consideração as deformações por cisalhamento;

- Investigar outras maneiras de danificação do módulo de elasticidade transversal;

- Verificar se o comportamento carga-deslocamento das lajes aqui estudadas, particularmente as três últimas, não está sendo afetado pela possibilidade de perda de aderência aço-concreto.

REFERÊNCIAS

- ÁLVARES, M. S. **Estudo de um modelo de dano para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação com emprego do método dos elementos finitos**. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo. São Carlos/SP, 1993.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, **Projeto de estruturas de concreto - Procedimento**, NBR 6118, ABNT, Rio de Janeiro, 2014.
- BANDEIRA M. S. **Análise não-linear de lajes de concreto armado pelo método dos elementos finitos**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás. Goiânia/GO, 2006.
- CALISTER, W. D. **Materials science and engineering an introduction**. Jonh Willy & Sons, inc, 1999.
- CERVENKA, V. Constitutive model for cracked reinforced concrete. **Journal of the American Concrete Institute**. v. 82. n. 6. p. 877-882. 1985
- CHABOCHE, J. L. Continuum damage mechanics: Part II—Damage growth, crack initiation, and crack growth, **Journal of applied mechanics**, **55 (1)**, 65-72, 1988.
- TURNER; CLOUGH, R. W.; MARTIN, M. J., H. C.; TOPP, L. C.: Stiffness and deflection analysis of complex structures, **J. Aeronaut. Sci.** 23, 805–823, 854, 1956.
- COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E.; WITT, R. J. **Concepts and applications of finite element analysis**. 4ª edição. Madison: John Wiley & Sons. 2002.
- CORDEBOIS, J.P. SIDOROFF, J.,. Endommagement anisotrope en élasticité et plasticité, **J.M.T.A.**, Numéro spécial : 45–60. 1982.
- COURANT, R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. **Bulletin of the American Mathematical Society** 49, 1-23.
- CRESCCE, S. H. **Análise não-linear de pavimento de concreto armado pelo método de elementos de contorno**. Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo, São Paulo/SP, 2003.
- CRISFIELD, M. A. Accelerated solution techniques and concrete cracking. **Her Majesty's Stationery Office**, London, v. 33, pp. 585-607, 1982.
- CURNIER, A., HE, Q., and ZYSSSET, P., Conewise linear elastic materials. **Journal of Elasticity**, 37: 1-38, 1995.

- DOULAH, Md. Nizamud; KABIR, A., Non-linear finite element analysis of reinforced concrete rectangular and skew slabs. **Journal of Civil Engineering**. vol. 29, nº 1. 2001.
- DUDDECK, H.; GRIEBENOU, G.; SCHAPER, G.; Material and time-dependent nonlinear behaviour of cracked reinforced concrete slabs. In: Mehlorn G, et al. editors. **Non-linear behaviour of reinforced concrete spatial structures – preliminary report 1**. p. 101–13, 1978.
- FERNANDES, G. R. **Método dos elementos de contorno aplicado à análise não linear de placas**. Dissertação de (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo, São Carlos/SP, 1998.
- FICHANT, S, LA BORDERIE, C. LA., PIJAUDIER-CABOT, G. Isotropic and anisotropic descriptions of damage in concrete structures, **Mechanics Of Cohesive-Frictional Materials**, 4(4), 339-359. 1999.
- FICHANT, S, LA BORDERIE, C. LA., PIJAUDIER-CABOT, G., A comparative study of isotropic and anisotropic descriptions of damage in concrete structures. **Damage Mechanics in Engineering Material**. 1998.
- FICHANT, S, PIJAUDIER-CABOT, G, LA BORDERIE, C. LA., Continuum damage modelling: approximation of crack induced anisotropy, **Mechanics Research Communications**, 24(2), 109-114, 1997.
- FIGUEIRAS, J. A., **Ultimate load analysis of anisotropic and reinforced concrete plates and shells**. PhD Thesis, University of Wales, Department of Civil Engineering, 1983.
- HINTON, E. **Numerical methods and software for dynamic analysis of plates and shells**. Swansea: Pineridge Press Limited, 1988.
- JAIN, S. C.; KENNEDY, J. B. Yield criterion for reinforced concrete slabs, **J. Structures Div. Amer. Soc. Civ. Engrs**. 100 ST3, 631-644, 1974.
- JIANG, J.; MIRZA, F. A. Nonlinear analysis of reinforced concrete slabs by a discrete finite element approach. **Computers & Structures**, Great Britain. v. 65, nº 4, pp. 585-592, 1997.
- JOFRIED, J. C.; MCNEICE, M. Finite element analysis of reinforced concrete slabs. **J Struct Div (ASCE)**. v.97, pp.785-806, 1971.
- KACHANOV, L. M. **Time of the rupture process of non-linear solid mechanics**. Otd. Tech. Nauk., v. 8, pp. 28-31, 1958.

- KHALOO, A. R., AHMAD, A. H., Behavior of normal and high-strength concrete under combined compression-shear loading. **ACI Materials Journal**, November-december, 551-559, 1988.
- KÖKSAL, H.; KARAKOÇ, C., An isotropic damage model for concrete, **Materials and Structures**, vol. 32, pp. 611-617, 1999.
- KRAJCINOVIC, D., FONSEKA, G.U., The Continuous Damage Theory of Brittle Materials, **J. of Applied Mech. ASME**, Vol. 48, pp. 809-824. 1981.
- KRATZING, W. B.; POLLING R. An elasto-plastic damage model for reinforced concrete with minimum number of material parameters. **Computers & Structures**. n° 82, pp. 1201-1215, 2004.
- LIMA, M. V. A. **Análise de placas laminadas pelo método das diferenças finitas energéticas**. Monografia - Departamento de Tecnologia- Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana/BA, 2010.
- LIMA, M. V. A. **Um modelo para a flexão de placas de concreto armado utilizando a mecânica do dano**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana/BA, 2013.
- LUBLINER, J., OLIVER, J., OLLER, S., ONATE, E.. A plastic-damage model for concrete, International, **Journal of Solids and Structures**, 25(3): 299-326, 1989.
- MATZENBACHER, C. W.; CAMPOS FILHO, A.; PACHECO, A. R., Análise da ruptura por flexão e corte de vigas de concreto armado através do método dos elementos finitos. **Mecânica Computacional**. Vol XXIX, p. 9973-9996., 2010.
- MAZARS, J. A description of micro- and macroscale damage of concrete structures, **Engineering Fracture Mechanics**, Vol 25, 729-737, 1986.
- MAZARS, J. **Application de la mecanique de l'endommagement au comportement non lineaire et a la rupture du beton de structure**. Tese (Doutorado) - l'Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1984
- MAZARS, J., PIJAUDIER-CABOT, G. Continuum damage theory-application to concrete, **Journal of Engineering Mechanics**, 115 (2), 346-365, 1989.
- MAZARS, J., PIJAUDIER-CABOT, G. Damage models for concrete, **Handbook of materials behavior models**, 2, 500-512, 2001.
- MEHTA, P. K., MONTEIRO, P. J. M., **Concreto: Microestrutura, Propriedades e Materiais Propriedades e Materiais**, IBRACON 2008 IBRACON, 2008.

MURAKAMI, S., OHNO, N.. **A constitutive equation of creep damage in pollicristalline metals**, in: IUTAM Colloquium Euromech 111, Marienbad. 1988.

NEVES, J. B. **Aplicação do Método das Diferenças Finitas Energéticas na Modelagem do Concreto Reforçado por Fibras Curtas de Aço sob Flexão**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana/BA, 2012.

OLIVER, J.; CERVERA, M.; OLLER, S.; LUBLINER, J. Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete. **II International Conference on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures**, 1990.

PACHECO, T. M.. **Influência do modelo de fissuração na modelagem em elementos finitos de vigas de concreto armado**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana/BA, 2013.

PAVAN, R. C., **Aplicação da Teoria de Dano na Análise do Comportamento de Materiais Compósitos**. Tese (doutorado)- Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Escola de Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Porto Alegre, BR-RS, 2008.

PAVAN, R. C. ; CREUS, G. J. ; MAGHOUS, S. A simplified approach to continuous damage of composite materials and micromechanical analysis. **Composite Structures** , v. 91, p. 84-94, 2009.

PHILLIPS, D. V.; BISHENG, Z., Direct tension tests on notched and un-notched plain concrete specimens, **Magazine of Concrete Research**, vol. 45 (162), 25-35, 1993.

PITUBA, J. J. C., **Sobre a Formulação de um modelo de dano para o concreto**. Tese (Doutorado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, Brasil, 2003.

PITUBA, J. J. C.; PROENÇA, S. P. B. Estudo e aplicação de modelos constitutivos para o concreto fundamentados na mecânica do dano contínuo. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, São Carlos/SP, v. 7, nº. 23, pp. 33-60, 2005.

PITUBA, J. J. C. Avaliação de um modelo anisótropo de dano considerando a perda de resistência devido ao cisalhamento do concreto. *Asociación Argentina de Mecánica Computacional*. Buenos Aires, v. 29, pp. 5397-5410, 2010.

PITUBA, J. J. C. **Estudo e aplicação de modelos constitutivos para o concreto fundamentados na mecânica do dano contínuo**. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo. São Paulo/SP, 1998.

- PITUBA, J. J. C., Formulation of damage models for bimodular and anisotropic media. **Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural**, 3:7-29, 2006.
- RABOTNOV, Y. N. **Creep problems in structural members**. Amsterdam, North-Holland, 1969.
- REDDY, J. N. **Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and analysis**. CRC, New York, 2004.
- RICHARD, B.; RAGUENEAU, F.; CREMONA, C.; ADELAIDE, L. Isotropic continuum damage mechanics for concrete under cyclic loading: Stiffness recovery, inelastic strains and frictional sliding. **Engineering Fracture Mechanics**, nº 77, pp. 1203-1223, 2010.
- ROCHA, M. J. M. A. **Modelagem numérico-computacional de placas laminadas compósitas através do método dos elementos finitos**. In: Anais do XVI Seminário de Iniciação Científica (SEMIC) - UEFS, 16 a 18 de outubro de 2012, Feira de Santana, Bahia, Brasil; 2012. p. 774-777.
- SANTOS, G. J. B. dos. **Modelagem em elementos Finitos do comportamento mecânico não linear de vigas compósitas de matriz cimentícia com reforço de fibras longas**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana/BA, 2009.
- SIMO, J. C.; JU, J. W. Strain - and stress - Based continuum damage models. I Formulation, **Internacional Journal Solids Structures**, vol. 23, pp. 821-840, 1987.
- SIMO, J. C.; JU, J. W. Strain - and stress - Based continuum damage models. II Computacional aspects, **Internacional Journal Solids Structures**, vol. 23, pp. 841-869, 1987.
- TAYLOR, R.; MATHER, D. R. H.; HAYES, B. **Effect of the arrangement of reinforcement on the behaviour of reinforced concrete slabs**. Mag. Concr. Res. v.18, p. 85-94, 1966.
- TAYLOR, R. L.; ZIENKIEWICZ, O. C., The Finite Element Method - Solid and Fluid Mechanics, **Dynamics and Non-Linearity**, Volume 2, 4 edição, Berkshire, 1991.
- VOYIADJIS, G.Z.; TAQIEDDIN, Z. N.; KATTAN, P. I. Anisotropic damage-plasticity model for concrete. **International Journal of Plasticity**, nº. 24, pp. 1946-1965, 2008.

ZHANG, Y. X., Bradford MA, Gilbert RI. A new triangular layered plate element for the non-linear analysis of reinforced concrete slabs. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, 22(7), 677–709. 2006.

ZHANG, Y. X.; BRADFORD, M. A.; GILBERT, R. I. A layered shear-flexural plate/shell element using Timoshenko beam functions for nonlinear analysis of reinforced concrete plates. **Finite elements in analyses and design**. v. 43, pp. 888-900, 2007.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method** - Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Non-Linearity, Volume 2, 4 edição, Berkshire, 1991.