



Universidade Estadual de Feira De Santana
Programa de Pós-Graduação em Computação Aplicada

Soluções de EDO e Simulações Numéricas para Dinâmica Relativa Colisional entre Veículos Operacionais e Detritos Espaciais

Jadiane de Jesus Santana

Feira de Santana

2018



Universidade Estadual de Feira De Santana
Programa de Pós-Graduação em Computação Aplicada

Jadiane de Jesus Santana

**Soluções de EDO e Simulações Numéricas para Dinâmica
Relativa Colisional entre Veículos Operacionais e Detritos
Espaciais**

Dissertação apresentada à Universidade Estadual de Feira de Santana como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Computação Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Delson Conceição de Jesus

Feira de Santana

2018

Ficha Catalográfica - Biblioteca Central Julieta Carteado

S223s Santana, Jadiane de Jesus
Soluções de Edo e simulações numéricas para dinâmica relativa
colisional entre veículos operacionais e detritos espaciais / Jadiane de Jesus
Santana. - 2018.
104 f.: il.

Orientador: Antônio Delson Conceição de Jesus.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Feira de Santana,
Programa de Pós-Graduação em Computação Aplicada, 2018.

1. Astronáutica - Computação. 2. Detritos espaciais – Colisão. I. Jesus,
Antônio Delson Conceição, orient. II. Universidade Estadual de Feira de
Santana. III. Título.

CDU: 629.7:004

Está página deverá ser substituída por uma folha contendo as assinaturas dos membros da banca, e deve ser posta após a ficha catalográfica.

Abstract

Earth's operational orbiting satellites are very useful for space science because it has great features as these services enable research and space explorations for scientific, commercial, and military interests as well. However, the increasing flow of space activities has increased the amount of debris orbiting in the operating regions, thereby increasing the chances of collisions in those areas, and allowing immeasurable damages if the satellite remains in this collision orbit.

In view of the large number of operational objects, the study of evasive maneuvers for space vehicles has been growing, and this one is important in face of the possibility of collisions, not only with a single debris but with clouds of space debris. The objective of the evasive maneuver is to avoid collision, but by keeping the vehicle in its orbit nominally.

The history of the phenomenon, that is, how it evolves over time, is found when the differential equation that represents the phenomenon is solved. From the point of view of Physics and Mathematics, the more realistic the model, the more difficult is the solution of the differential equations representing the phenomenon. Thus, this work seeks to present the analytical and semi-analytical solutions for the equations describing the relative dynamics between two bodies subjected to gravitational force, Choehessy-Wiltshire equations, under the influence of forces: gravitational, atmospheric drag, chemical propulsion (exponential model and linear model), atmospheric drag plus chemical propulsion and plasma propulsion, and finally present their respective computational simulations. These simulations made it possible to show what happens to the operational satellites against a collision, for each specified model. With the contribution of the development of the atmospheric drag equation, with the drag coefficient varying.

Keywords: Space debris, Evasive maneuvers, Propulsion system, Atmospheric drag, Applied computing, Mathematical model

Resumo

Os satélites operacionais em órbita da Terra são muito úteis para a Ciência Espacial, pois possuem grandes aplicações e funções. Seus serviços possibilitam pesquisas e explorações espaciais para interesses científicos, comerciais e também militares. Porém, o crescente fluxo das atividades espaciais tem elevado a quantidade de detritos orbitando nas regiões operacionais e, desse modo, aumentando as chances de colisões nessas áreas, e possibilitando imensuráveis prejuízos, caso o satélite permaneça nessa órbita de colisão. Diante da grande quantidade de objetos operacionais e não operacionais, o estudo de manobras evasivas para os veículos espaciais torna-se urgente e necessário, visto a possibilidade de colisões, não só com um único detrito, mas com nuvens de detritos espaciais. O objetivo da manobra evasiva é evitar a colisão, mas, mantendo o veículo em sua órbita nominal. A história do fenômeno, ou seja, como ele evolui no tempo, é encontrada quando a equação diferencial que o representa é resolvida. Assim obtemos a posição relativa entre os objetos colisionais no tempo. Do ponto de vista da Física e da Matemática, quanto mais realista for o modelo, mais difícil será a solução das equações diferenciais representantes do fenômeno. Assim, este trabalho busca apresentar as soluções analíticas e semi-analítica para as equações que descrevem a dinâmica relativa entre dois corpos sob a atuação das forças: gravitacional, de arrasto atmosférico, propulsão química (modelo exponencial e modelo linear) e propulsão plasma. Por fim, busca apresentar suas respectivas simulações computacionais. Estas simulações possibilitaram mostrar o que acontece com os satélites operacionais frente à uma colisão, para cada um modelo especificado. Outra contribuição deste trabalho é solução semi-analítica da dinâmica relativa com arrasto atmosférico para densidade atmosférica não constante.

Palavras-chave: Detritos espaciais, Manobras evasivas, Sistema de propulsão, Arrasto atmosférico, Computação aplicada, Modelo matemático.

Prefácio

Esta dissertação de mestrado foi submetida a Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS) como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Computação Aplicada.

A dissertação foi desenvolvida dentro do Programa de Pós-Graduação em Computação Aplicada (PGCA) tendo como orientador o Prof. Dr. **Antônio Delson Conceição de Jesus**.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela graça da existência, pelo refúgio na adversidade, e o grande amor que tem por nós. Agradeço também a minha família, minha mãe, Maria Cristina, pelos incansáveis esforços, mesmo tendo pouco fez o muito para mim- Te amo! Ao meu pai, Antoniel, e a meus irmãos: Jadson e Bruno. Obrigada! Ao meu namorado, Mauricio, pelo companheirismo e amizade, por tornar a caminhada mais leve. Quero deixar meus sinceros agradecimentos ao meu orientador, professor Dr. Antonio Delson, pelo auxílio, disponibilidade e compromisso. Agraço a Marília pela ajuda, não negando perder algumas tardes tirando dúvidas, serei eternamente grata.

Ao professor Jean Barros, por ter se mostrado acessível quando precisei de materiais que me possibilitassem estudar equações diferenciais não lineares. Ao professor Iran, por permitir que pudesse estudar na sala do Grupo de Astronomia-GATO.

Enfim, deixo os meus mais sinceros agradecimentos, e o que aqui não foi expresso terei certeza que foram sentidos. Deus recompense vocês!

Sumário

Abstract	i
Resumo	ii
Prefácio	iii
Agradecimentos	iv
Sumário	v
Lista de Publicações	Erro! Indicador não definido.
Lista de Tabelas	vii
Lista de Abreviações	ix
Lista de Símbolos	x
1. Introdução	1
1.1 Detritos Espaciais	3
1.1.1 Detritos Espaciais e Arrasto Atmosférico.....	4
1.2 Manobras Orbitais	4
1.3 Manobras Evasivas e Propulsão	5
1.4 Objetivos	6
1.5 Contribuições	6
1.6 Organização do Trabalho	6
2. Revisão Bibliográfica	8
2.1 Detritos Espaciais e Modelos Observacionais	8
2.2 Propulsão Plasma	9
2.3 Manobras Evasivas e Modelos Matemáticos Para a Dinâmica não Ideal	10
2.4 Missões Espaciais e Arrasto Atmosférico	12
3. Definição do Problema- Modelos Matemáticos e Recursos Computacionais.	15
3.1 Definição do Problema.....	15
3.2 Dinâmica Relativa Colisional - Equações de Clohessy-Wiltshire	17
3.3 Sistema de Propulsão Química- Modelo Exponencial	22

4. Dinâmica Relativa com Perturbação do Arrasto Atmosférico	27
4.1 Dinâmica Relativa Sujeita às Forças gravitacional, de Arrasto Atmosférico e Força de Propulsão Química.....	35
4.2 Dinâmica Relativa Sujeita às Forças gravitacional e de Propulsão Química (Modelo Linear de Massa).....	40
4.2 Dinâmica Relativa Sujeita às Forças gravitacional e de Propulsão Plasma (Modelo Exponencial de Massa)	46
5. Dinâmica Relativa Sujeito às Forças gravitacional e de Arrasto Atmosférico não constante - Solução Semi-analítica	50
5.1 Considerações sobre a nossa solução	51
6. Manobras Evasivas em Ambiente de Detritos Espaciais	63
6.1 Histograma - Solução homogênea (apenas Força gravitacional)	63
6.2 Simulações com Arrasto Atmosférico.....	66
6.3 Algoritmos da Dinâmica Relativa com Força, gravitacional, de Arrasto Atmosférico e Força de propulsão.....	69
6.4 Manobra evasiva - Propulsão com Modelo Linear.	71
6.5 Manobra evasiva - Propulsão com Modelo Plasma.	72
6.6 Densidade atmosférica não constante - Teste de validade	75
7. Referências Bibliográficas	77
8. Resolução da Equação do Modelo: Dinâmica Relativa sujeito a forças de Arrasto Atmosférico não constante	80
9. Apêndice	80

Lista de Figuras

Figura 1: Detritos Espaciais em órbita em torno da Terra - ameaça contra satélites e estações espaciais.....	15
Figura 2: A massa dos objetos em órbita da Terra oficialmente catalogado pela vigilância espacial dos EUA	16
Figura 3: Dinâmica Relativa com - Sistema de referência orbital - veículo e detrito espacial colisionais.....	18
Figura 4: Possibilidades de colisões x distribuição de velocidades iniciais. Baseado em (Jesus A. D., 2012).....	64
Figura 5: Distância Relativa em função do Tempo, variando o fator de potência.....	65
Figura 6: Diferentes fatores de massa.....	65
Figura 7: Posição Relativa Final entre os dois objetos em função do fator massa para diferentes velocidades de exaustão. FONTE: Baseado em (Oliveira, 2016)	66
Figura 8: Objeto operacional sujeito a força gravitacional-rota de colisão.....	66
Figura 9: Força de arrasto atuando no objeto operacional.....	67
Figura 10: Trajetória do detrito em relação ao centro da Terra.....	67
Figura 11: Distância Relativa entre os objetos colisionais vs. Tempo, para $\lambda = 1$	68
Figura 12: Distância Relativa entre os objetos colisionais vs. Tempo, para $\lambda = 0$	68
Figura 13: Distância relativa entre os objetos colisionais para diferentes densidades atmosféricas constantes	69
Figura 14: Manobras homogênea e Propulsiva vs. Tempo	70
Figura 15: Manobras homogênea e Propulsivas vs. Tempo, variando o fator de potência	70
Figura 16: Distância Relativa entre os objetos colisionais vs. Tempo. Manobra evasiva, Modelo Linear.....	71
Figura 17: Distância relativa entre os objetos colisionais vs. Tempo vs. Taxa de decréscimo da massa.	72
Figura 18: Distância Relativa entre os objetos colisionais vs. Tempo, Modelo plasma	73
Figura 19: Modelo Plasma, atuação da força de propulsão.....	74

Figura 20: Distância Relativa em função do Campo Elétrico	74
Figura 21 Distância Relativa entre os objetos colisionais vs. Tempo, Propulsão Plasma, ângulos diferentes	75

Lista de Abreviações

Abreviação	Descrição
LEO	Órbita Terrestre Baixa (Low Earth Orbit)
MEO	Órbita Terrestre Média (Medium Earth Orbit)
GEO	Órbita Terrestre Alta (Geostationary Orbit)
DE	Detritos Espaciais (Space Debris)
EDO	Equações Diferenciais (Ordinary Differential Equations)
LDEF	(Long Duration Exposure Facility)
CIC	Condição de Colisão

Lista de Símbolos

Símbolo	Descrição
ω	Velocidade Angular do Veículo Espacial
ω_e	Velocidade Angular de Rotação da Terra
ρ	Densidade Atmosférica
π	Número pi
μ	Densidade da Massa da Terra
ϕ	Ângulo no plano Terrestre
θ	Ângulo no espaço Terrestre
χ	Constante de proporcionalidade da razão da do veículo espacial com a massa inicial de combustível
γ	Fator de Potência do Sistema Propulsor
λ	Constante utilizada para o método de separação de variáveis.
β	Constante do Arrasto Atmosférico

Capítulo 1

Introdução

“Se te mostrares fraco no dia da angústia, a tua força será pequena ”

-- Provérbios 24:10

Os satélites operacionais em órbita da Terra são muito úteis para a Ciência Espacial, possuindo grandes aplicações e utilidades, tais como: observações do planeta, sistemas de meteorologia, pesquisas climáticas, telecomunicações, serviços de segurança, e etc. Estes serviços possibilitam as pesquisas e as explorações espaciais para interesses científicos, comerciais e também militares. Porém, o crescente fluxo das atividades espaciais tem elevado a quantidade de detritos orbitando nas regiões operacionais e, desse modo, aumentando as chances de colisões com os veículos operacionais nessas áreas, causando imensuráveis prejuízos. Em julho de 2015 restos de um velho satélite meteorológico russo foi de encontro com a tripulação da Estação Espacial Internacional (ISS) e a equipe não teve tempo suficiente para tirar a estação da rota de colisão e todos tripulantes tiveram que se abrigar na nave espacial *Soyuz*, sendo a quarta vez que isso aconteceu. Felizmente, após a passagem do lixo espacial, os astronautas foram autorizados à voltar para a estação (JN, 2015). Assim, o estudo de manobras espaciais evasivas em ambiente de detritos espacial é de grande importância para a Ciência e Tecnologia moderna.

A Agência Espacial Europeia (ESA) através dos serviços de radares e sensores, fornece dados de detritos catalogados. De acordo com contagens mais recente, em 2016, feito pelo Comando Estratégico da Nasa, agência espacial americana, existem mais de 17 mil objetos em órbita acima da Terra, os possíveis de serem rastreados. O número total de destroços é estimado em cerca de 29.000 objetos maiores que 10 cm, 670.000 maiores que 1 cm, e 170 milhões maiores que 1 milímetro. O peso total de detritos deixados pelo homem no espaço é de aproximadamente 5.000 toneladas (Lima, 2017). Tornando esses recursos importantíssimos para o desenvolvimento da ciência, pois estes dados são utilizados para estudos de possíveis colisões com veículos em operação, e assim evitar prejuízos durante as missões. Estas colisões representam um grande perigo, pois dão origem a novos detritos, o que pode ocasionar a formação de cinturões de detritos orbitando a Terra, e assim, prejudicando as missões e elevando ainda mais as possibilidades de choques. Deste modo, o estudo de manobras evasivas

para os veículos espaciais é atual e importante, diante da possibilidade de colisões com um único detrito mas, também com nuvens de detritos espaciais que se formaram desde as primeiras décadas do século passado ou por meio dessas colisões mais recentes.

As manobras orbitais são de grande importância para que a missão espacial venha a ser alcançada. Todo veículo operacional é programado para realizar manobras ao longo do tempo da sua missão. Uma manobra orbital é definida como sendo uma mudança na posição e na velocidade de um veículo espacial, o que faz com que aconteça uma modificação na órbita, através da atuação do sistema propulsor, e assim realizando uma alteração dos componentes: posição, velocidade e massa do veículo espacial, em um instante inicial, passando para o instante final.

Embora a definição de manobra orbital possa parecer de simples entendimento, a mesma torna-se um desafio ao ser modelada e implementada quando se deseja uma missão eficiente, pois alguns fatores e restrições devem ser analisados, tais como: quantidade mínima de combustível, menor tempo, velocidade final mínima, entre outros. Deste modo, o modelo matemático para as leis da natureza que regem a dinâmica colisional entre estes objetos (veículos e detritos) deve ser o mais preciso possível, considerando as diversas forças que atuam sobre estes objetos. Do ponto de vista da Física e da Matemática, quanto mais realista for o modelo, mais difícil será a solução das equações diferenciais representantes do fenômeno. Evidenciando ainda mais a necessidade de se estabelecer métodos de soluções destas equações, juntamente com o modelo de simulação numérica, que descreva as trajetórias dos corpos ao longo do tempo e, portanto, permitindo um maior alcance de previsibilidade de acidentes.

Os fenômenos físicos são descritos através de leis da física e estas são modeladas matematicamente por Equações Diferenciais Ordinárias (EDO). Ao modelarmos, portanto, um fenômeno físico, necessariamente equacionamos funções derivadas de ordens diversas, mas principalmente as de segunda ordem. A história do fenômeno, ou seja, como ele evolui no tempo é encontrada quando a equação diferencial que representa o fenômeno é resolvida, ou seja, quando se encontra a sua solução. Quando a solução é fechada, ou seja, quando é representada por uma função exata que satisfaz a equação diferencial, dizemos que ela é uma solução analítica. A solução analítica de uma equação diferencial é sempre a resposta mais desejada, porque ela é exata nas variáveis que descrevem o fenômeno. Lamentavelmente, toda vez que o modelo físico-matemático se aproxima da realidade, mais difícil se torna o caminho de se encontrar a solução analítica. A dinâmica relativa espacial pode ter diversas soluções, dependendo da quantidade de forças que ela incorpora no seu modelo. À medida em que o número de forças aumenta, tornando o modelo mais preciso, não tem-se uma solução analítica, apenas a numérica. Nesse caso, uma solução intermediária pode ser encontrada para uma EDO, quando se faz alguma consideração coerente com algum limite dentro do próprio fenômeno, tal que certos termos são desprezados ou mesmo expandidos. Esta solução se chama semi-analítica.

Neste trabalho é proposto o estudo de manobras evasivas para evitar colisões de um detrito espacial com um satélite operacional, para diferentes modelos matemáticos de força, onde, a manobra evasiva é realizada através de um sistema de propulsor, a partir de parâmetros tecnológicos.

1.1 Detritos Espaciais

Os detritos espaciais são todos os objetos derivados pelas operações espaciais (veículos não operacionais, corpos de veículos lançadores, partes de foguetes, resíduos de combustão, ferramentas perdidas, objetos do espaço capturados pelo campo gravitacional, etc.). Devido a grande quantidade destes objetos, medidas alternativas de mitigação (de redução dos detritos) devem ser tomadas, visto que a redução natural, através do arrasto atmosférico não consegue vencer a taxa de deposição de objetos em LEO (*Low Earth Orbit* - órbitas baixas da Terra) onde ocorre maior atividade espacial, por exemplo, além de estudos que possibilitem descrever rotas que representam riscos de choque com outros objetos.

Os detritos espaciais são produzidos por duas fontes principais: **primárias** - detritos originados pelo homem, e/ou detritos que são produzidos pela natureza, e **secundárias** - detritos que são originados a partir de novas colisões entre os próprios detritos, gerando fragmentos ainda menores. Os detritos produzidos pelo homem são chamados de "human debris" e estão relacionados com as missões espaciais. Os produzidos pela natureza são chamados "natural debris".

Os veículos espaciais possuem tempo de vida operacionais limitado. Alguns, após cumprirem seu tempo de vida útil, tornam-se objetos orbitantes sem nenhuma funcionalidade, pois como não há mais combustível para realizar correções de órbitas, tornam-se detritos espaciais ou lixo espacial - estes são produzidos pelo homem e são de origem primária. A poluição por detritos espaciais começou com o lançamento da Sputnik. Em 4 de outubro de 1957, uma esfera de metal com cerca de 60 cm foi lançada no espaço pela ex-União Soviética. Orbitava cerca de 250 km de altitude, no dia 29 de outubro, do mesmo ano, quando suas baterias se esgotaram, e em 4 de janeiro do ano seguinte, foi consumido em chamas ao entrar na atmosfera terrestre. O Sputnik II lançado logo após ficou em órbita e tornou-se detrito espacial, efetivamente. A partir daquela data milhares de veículos foram lançados, aumentando a densidade dos detritos nas diversas altitudes. Muitos são removidos pelo arrasto atmosférico, mas a taxa de remoção é inferior a de deposição pelas missões espaciais, e a atuação da força de arrasto atmosférico é significativa só nas regiões próximas da Terra. Os detritos de origem natural são fruto de acontecimentos provenientes do passado, ou até mesmo os que ainda acontecem. Exemplo de detritos desse tipo são: poeiras cósmicas, gás deixados pela passagem de cometas próximos a Terra, meteoros, e partículas do próprio universo que são capturados pela força gravitacional da Terra ou por outro corpo do Sistema Solar. Os de origem secundárias são os que são originados a partir desses, seja por uma colisão entre eles, ou explosões de veículos (induzidas ou não induzidas), gerando novos fragmentos menores, ou por colisão entre detritos e veículos espaciais. Os detritos estão espalhados em camadas de diversos tamanhos e pesos e orbitam a Terra em diferentes altitudes. Que os detritos espaciais representam riscos já se sabe, mas ainda constitui-se um desafio para a Ciência e a Tecnologia sua remoção, e a prevenção de colisões, pois os mecanismos de sensoriamento remoto possui grandes dificuldades em detectar objetos menores que 10 cm.

1.1.1 Detritos Espaciais e Arrasto Atmosférico

Diante da vasta quantidade de detritos, existem também alguns mecanismos de remoção, sendo o principal e mais eficiente deles o arrasto atmosférico da Terra. O arrasto atmosférico é uma força natural, devido a atmosfera da Terra, que "puxa" os detritos em direção à atmosfera terrestre, onde são destruídos completamente ou parcialmente pelo atrito com os gases da atmosfera. Trata-se de um mecanismo natural de remoção. Mas o arrasto atmosférico está restrito às camadas mais próximas da Terra (altitudes em LEO- *Low Earth Orbit*). Nas camadas de órbitas médias (MEO - *Medium Earth Orbit*), ou mais altas (GEO - *Geostationary Orbit*), não ocorre esta força de remoção e os detritos levam muito tempo para decair até regiões onde ocorre o arrasto. Em alguns casos, levam milhões de anos para reentrar na atmosfera de Terra. Porém, o número de objetos espaciais formados após as missões é muito maior do que a taxa de remoção.

É de grande importância estudar essas regiões, visto o aumento das quantidades dos detritos nas diversas regiões operacionais, o que podem ocasionar colisões. A colisão desses detritos com objetos operacionais está relacionada com atividades de grande energia, pois as velocidades relativas de colisão entre os objetos são elevadas, produzindo um momentum linear também elevado, o que pode levar à uma grande força de impacto. Ou seja, ainda que o fragmento/detrimento seja pequeno, ele terá energia suficiente para provocar acidentes consideráveis.

O ambiente de fora da Terra é, portanto, de grande risco para as missões espaciais. Desta maneira, o modelo matemático para as leis da natureza que regem a dinâmica colisional entre estes objetos (veículos e detritos) deve ser o mais preciso possível, considerando as diversas forças que atuam sobre estes objetos.

1.2 Manobras Orbitais

As manobras orbitais são de grande importância para que a missão espacial venha ser alcançada. Uma manobra orbital é definida como sendo uma mudança na posição e na velocidade de um veículo espacial. Essas mudanças orbitais podem ser de grandes ou de pequenas amplitudes, para correção de órbita ou para mudança de trajetórias, por exemplo, de LEO para MEO ou GEO. Um exemplo importante de transferência de pequena amplitude é a manobra de "*Rendezvous*", que significa o encontro entre dois veículos no espaço.

A manobra orbital de um veículo espacial faz com que aconteça uma mudança através da atuação do sistema propulsor, realizando uma alteração dos componentes iniciais, posição, velocidade e massa, do veículo espacial, em um instante inicial, (r_0, v_0, m_0) , passando para o estado final (r_f, v_f, m_f) nos instantes, t_0 e t_f , onde $t_f > t_0$. Esses mecanismos de estudos possuem objetivos tecnológicos e científicos que refletem de forma significativa em resultados sociais e em diversas áreas do conhecimento e da ciência aplicada.

Alguns fatores devem ser analisados a fim de se obter um melhor desempenho durante as

missões espaciais tais como: quantidade mínima de combustível, menor tempo, velocidade final mínima, entre outros, tornando-se um desafio para atingir tais objetivos. O fator combustível é de grande importância para que seja possível realizar manobras de correção de trajetória e assim, atingir o objetivo da missão. Desse modo, é de grande interesse conciliar as manobras ao fator combustível mínimo, pelo fato que, reduzindo-o, aumenta-se a vida útil da espaçonave, além de proporcionar economia no custo da missão. Mas esse não é o único parâmetro que pode ser analisado. Existem missões que exigem que a realização da missão seja em um menor tempo possível. Neste caso, o parâmetro tempo também tem que ser analisado, ou seja, dependerá da especificidade que se deseja a partir da realização da manobra.

A ciência responsável por trabalhar com movimentos orbitais é a Dinâmica Orbital, movimentos esses de objetos espaciais naturais (planetas, meteoros, etc.) ou objetos artificiais (satélites, ônibus espaciais, espaçonaves, sondas, etc.)

Por meio dos serviços dos satélites torna-se possível ter acesso às informações vindas do espaço, tais como: dados para previsão do tempo, sensoriamento remoto, entre outros. Isso significa que o homem é capaz de se comunicar a longas distâncias, podendo não apenas obter informações, como também transmiti-las em tempo real. E assim poder não só prevenir desastres naturais, por exemplo, colisão entre detritos espaciais e espaçonaves, como também monitorar fronteiras, questões que possibilitem conhecer a origem do universo e também as de uso militar, entre outras.

1.3 Manobras Evasivas e Propulsão

Devido à grande quantidade de detritos espaciais em órbita, tem-se tornado comuns ocorrência de manobras de emergência de espaçonaves tripuladas, tendo como objetivo evitar colisões no espaço. Assim, estratégias tecnológicas conciliadas a modelos matemáticos precisam ser estudadas para que seja concretizada tal objetivo, de modo que a manobra seja realizada de forma eficiente.

De modo geral, uma manobra evasiva pode ser realizada de duas formas:

- Através da atuação do sistema propulsor, o qual exige consumo de combustível, tal que o referido sistema controla a direção da queima para se escapar da colisão em curso;
- Através de manobras de *swing-by* em torno de corpos celeste massivos que “transmitam” energia gravitacional ao veículo espacial. Este tipo de manobra não é estudado neste trabalho.

Para que aconteça as manobras espaciais e/ou correções de curso, é necessário que se tenha um sistema de propulsão, a fim de que se obtenha a maximização da carga útil em um menor consumo de combustível possível. Na *propulsão química* vários competentes químicos são misturados dentro de uma cabine do propulsor, onde ocorre uma explosão que gera um gás com alta expansão, fazendo com que aconteça um impulso no veículo espacial. Mas, esse tipo de propulsão é poluente e, além disso, exige altos gastos à missão espacial. O uso do sistema de *propulsão a plasma* vem sendo estudada e é tido como um sistema mais eficiente para manobras

de precisão nas atividades espaciais, possuindo também eficiência em relação ao consumo de combustível e ainda é uma propulsão mais limpa em relação à propulsão química, do ponto de vista ambiental. Desse modo, consegue-se um maior tempo de vida útil, devido à redução de massa do combustível, possui baixa potência, mas com um impulso relativo elevado. Para determinar qual propulsor é mais adequado e para se conseguir uma melhor realização dos diversos tipos de manobras é necessário analisar dois fatores: a intensidade do impulso aplicado pelos gases, e o impulso específico. Através desse torna-se possível medir o tempo para acelerar um veículo espacial em função do tipo de propelente. O impulso específico é diretamente proporcional a velocidade de ejeção ou exaustão do propelente. Assim, quanto maior for o impulso específico, maior será o tempo de ação do propulsor, conciliado a uma menor quantidade de propelente necessária para que acontece a produção do empuxo. Para que uma manobra evasiva seja implementada, estratégias tecnológicas devem ser incorporadas, e a energia deve ser suficiente para colocar o veículo em uma outra órbita, fora da rota de colisão. Assim, a manobra evasiva é um mecanismo importantíssimo para a realização de missões espaciais em ambientes de risco de colisão com detritos espaciais.

1.4 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é estabelecer soluções (analíticas ou semi-analítica e numéricas) de EDO da dinâmica relativa colisional entre um veículo operacional e detrito espacial, considerando o máximo de forças existentes no ambiente das missões espaciais. Especificamente, pretendemos estudar analiticamente alguns modelos matemáticos referentes a fenômenos físicos da colisão entre dois objetos espaciais no ambiente gravitacional terrestre, incluindo forças de arrasto e realizando manobras evasivas através do sistema de propulsão do veículo, podendo a força de propulsão ser química ou plasma.

1.5 Contribuições

O estudo sobre manobras evasivas espaciais possui contribuições para interesses tanto científicos quanto tecnológico, militares e de segurança. O avanço tecnológico, tem possibilitado as explorações e pesquisas fora da Terra. Desta forma, programas computacionais têm sido usados, buscando soluções para implementação de manobras evasivas diante de riscos de colisões de veículos espaciais com detritos, ou até mesmo para corrigir a órbita do veículo. Este trabalho contribui com a Ciência e a Tecnologia, apresentando seus resultados e soluções para as manobras evasivas, considerando o arrasto atmosférico para densidade não constante e uma linha de procedimento para a implementação das referidas manobras.

1.6 Organização do Trabalho

No Capítulo 1 apresentamos a introdução geral sobre o tema, juntamente com os objetivos e contribuições. No Capítulo 2 é apresentada a revisão bibliográfica sobre detritos espaciais e

modelos observacionais, propulsão plasma, manobras evasivas e modelos matemáticos para dinâmica não ideal, missões espaciais e arrasto atmosférico. No Capítulo 3 apresentamos os modelos matemáticos, descrevendo-os e resolvendo suas respectivas equações diferenciais. No Capítulo 4 é apresentado o modelo matemático referente a Dinâmica com a força de Arrasto Atmosférico. No Capítulo 5 é apresentado o modelo matemático referente a Dinâmica com Arrasto Atmosférico para densidade não constante e uma sugestão de solução da EDO não linear encontrada. No Capítulo 6 apresentamos as simulações referentes aos modelos e soluções semi-analíticas para os diversos casos estudados neste trabalho. Por fim, no Capítulo 7, apresentamos as considerações finais deste trabalho.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

*“ O coração alegre é bom remédio,
mas o espírito abatido faz secar os
ossos. ”*

-- Provérbios 17:22

As manobras orbitais são usadas nas missões espaciais envolvendo objetos operacionais, tais como: satélites, ônibus espaciais, sondas e outros engenhos usados em interesses da Ciência e Tecnologia espaciais. As manobras orbitais que visam escapar de colisões de objetos operacionais com detritos espaciais são as manobras evasivas. A manobra evasiva usa de mecanismos tecnológicos (sistema de propulsão) ou naturais (*Swing-by*) para garantir que o veículo espacial não colida com um ou mais detritos que estejam em rota de colisão com ele.

Neste Capítulo, apresentamos alguns trabalhos que abordam sobre transferências orbitais com vistas a manobras orbitais econômicas e manobras evasivas frente a colisão com detritos e ainda considerando fragmentação deles e sistemas de propulsão.

2.1 Detritos Espaciais e Modelos Observacionais

É imprescindível para o sucesso das manobras de evasão que se conheça os objetos pelos quais se deseja escapar, neste caso, os detritos espaciais. É importante conhecer como eles estão distribuídos no espaço ao redor da Terra, os seus tamanhos e a evolução da sua população. Estudos apontam para o aumento das colisões entre os detritos espaciais, em um tipo de reação em cadeia, correspondente a um crescimento exponencial de objetos orbitais não úteis [Kessler, 1978]. Satélites de longa duração como o LDEF (*Long Duration Exposure Facility*), expostos em órbita e depois recuperados fornecem uma distribuição estatística da quantidade e da direção do fluxo de detritos espaciais nas regiões orbitais. Estes dados estimularam trabalhos numéricos com respeito à população do lixo espacial. Kessler e cooperadores foram pioneiros no ajuste de dados do LDEF e concluíram que existem milhares de objetos maiores que 10 cm, além de uma imensa quantidade de objetos menores (Kessler D. J.-P., (1978)). Outros trabalhos mostraram que os micro-detritos são predominantes e o fluxo de detritos espaciais chegam a uma população de 70.000 objetos em órbita LEO (Kessler D. J., (1991)). Cordelli e cooperadores

(Cordelli, (1998)) criaram um modelo numérico da evolução da população de detritos espaciais de massas maiores que 1 mg e encontraram diversas faixas de crescimento, desde linear a exponencial. Segundo Davis (Davis, (1994).), o processo das colisões mútuas de altas velocidades perturba a evolução de longo alcance das distribuições por tamanho dos DE. Os riscos às atividades espaciais oferecidos pelas colisões dos DE com veículos espaciais e também pelas colisões entre eles aumenta a cada lançamento de foguetes e satélites, como também devido ao aumento das colisões entre os diversos DE neste mesmo ambiente. O primeiro acidente colisional confirmado entre dois objetos catalogados ocorreu em julho de 1996. O satélite francês Cerise em operação foi fortemente danificado quando colidiu com um fragmento do corpo do foguete Ariane. Além desse acidente, outros acidentes menores e muitos outros não catalogados têm ocorrido durante vários anos. A energia cinética liberada por um impacto de uma partícula de umas poucas gramas e com velocidade relativa média de 10 km/s corresponde àquela de uma granada de mão e pode destruir uma espaçonave não protegida (ou corpo natural de igual massa). Obviamente, a consequência destas colisões produziria uma nuvem de muito mais objetos numa reação em cadeia, fato que aumentaria dramaticamente a probabilidade de novas colisões. Simulações numéricas mostram que, se a taxa de atividade espacial for mantida nos padrões atuais, a quantidade de detritos espaciais continuará crescendo, criando um cinturão de partículas em torno da Terra, semelhantemente a um cinturão de asteroides, o que seria suficiente para desencadear uma reação em cadeia em torno de 2 ou 3 vezes a população atual dentro de 20 a 50 anos (Rossi, (1994)). A Agência Espacial Europeia afirmou que “a produção de detritos espaciais auto sustentável por colisões é de interesse de longo prazo. Contudo, é a maior parte do perigo de longo prazo que inviabilizará toda atividade espacial no mundo. Portanto, este mecanismo requer estudo ulterior e cuidadoso” (Debris, (1988))

2.2 Propulsão Plasma

O sistema de propulsão a combustíveis sólidos é de alto custo, mas ainda é usado em larga escala. A propulsão a plasma tem-se constituído um dos mecanismos mais eficientes para a realização eficaz de manobras. Este sistema vem sendo estudada desde 1950. Contudo, somente atingiu aceitáveis níveis de eficiência no final dos anos 1970, graças aos trabalhos de pesquisadores soviéticos, principalmente de A. I. Morozov (Ferreira I. S., 2003), (Martinez e Pollar, 1998), (Choueri, 2004). A propulsão a plasma constitui-se uma das principais alternativas para propulsão de satélites e naves espaciais, para missões de longa duração. Possui características peculiares tais como: alto impulso específico, alta velocidade de exaustão e alta eficiência no uso do propelente em forma de plasma. A mesma tem a vantagem de permitir a redução da massa ($2x$ to $3x$) para missões em LEO; maior possibilidade de reposicionamento do veículo espacial; aumento da janela de lançamento; aumento do tempo de vida de satélites em GEO. Um dos primeiros resultados obtidos a partir de um propulsor a plasma movido pelo efeito Hall no Brasil foi obtido por pesquisadores da Universidade de Brasília (UnB) (Ferreira J. L., 2009). O Brasil tem avançado no desenvolvimento deste propulsor com resultados que correspondem às expectativas internacionais de precisão (Pôssa & Ferreira, 2009). Uma fonte

de plasma é mais eficiente e é projetada para atuar na propulsão para satisfazer os seguintes alvos: confiabilidade, longa vida, facilidade de controle, isto é, necessita de um menor número possível de fontes de alimentação, baixo consumo de potência elétrica (Ferreira I. S., 2003) Ou seja, possui como principal objetivo atingir um ótimo desempenho com o mínimo consumo de potência elétrica.

A fração de massa propelente usada durante as manobras de evasão, durante a vida útil do satélite, é diretamente relacionada com a previsão de consumo de combustível necessário para executar essas manobras e as características do sistema de propulsão [Gomes, 2011].

Para a física, o plasma constitui-se como um gás ionizado composto por partículas carregadas eletricamente neutro, podendo ser encontrada: no interior das estrelas, em nebulosas, no fogo, no vento solar, nas lâmpadas fluorescentes e de neônio, entre outros. É um gás macroscopicamente neutro (ou próximo da neutralidade), porém constituído por elétrons livres e átomos e moléculas ionizados, os quais apresentam comportamento coletivo devido à interação coulombiana entre eles. É produzido através do aumento de temperatura, a fotoionização e a descarga elétrica.

Em 1960, a NASA lançou os primeiros propulsores elétricos do tipo Kaufmann em satélites em (SERT – Satellite for Electric Rocket Teste – I e II). Os soviéticos obtiveram o domínio desta tecnologia bem antes dos pesquisadores dos Estados Unidos. Onde, em 1998 a NASA executou a primeira missão de alto nível de um propulsor iônico, sonda Deep Space 01, enquanto isso os soviéticos já tinham obtido sucesso em pelo menos 16 propulsores do tipo Hall.

Em setembro de 2003, a Agência Europeia (ESA) lançou a sonda SMART – 1, a qual ficou em operação até setembro de 2006. Por fim, o uso de propulsão elétrica tem sido a mais indicada atualmente para realização de missões espaciais, porém, devido ao seu baixo empuxo, cientistas têm estudado propulsores elétricos que forneçam alto desempenho elétrico e que sejam de longa duração.

2.3 Manobras Evasivas e Modelos Matemáticos Para a Dinâmica não Ideal

As manobras espaciais com objetivo de escapar de iminentes colisões com objetos espaciais estão incluídas no contexto das manobras evasivas. Estas manobras são comumente utilizadas nas missões espaciais, envolvendo objetos operacionais (satélites, sondas, ônibus espaciais, estação espacial internacional, etc.) diante de uma provável colisão com objetos espaciais não operacionais (detritos espaciais). O estudo de manobras evasivas tem uma abordagem muito singular no trabalho de Jesus et al. (Jesus A. D., 2012). Naquele trabalho foi explorada a possibilidade de se fazer uma manobra rápida em um satélite operacional para evitar a colisão com um detrito espacial. Para cálculo do tempo de escape da colisão, o trabalho leva em conta as equações de movimento relativo de Clohessy-Wiltshire e parâmetros tecnológicos, tais como velocidade de exaustão dos gases, fator de potência do motor e do fator de massa do satélite. O trabalho mostra que há uma infinidade de possibilidades de colisão, mas que as características

físicas e tecnológicas do fenômeno terminam limitando o conjunto de condições iniciais de colisão. O trabalho mostrou que é possível encontrar parâmetros tecnológicos que permitam a implementação de manobras evasivas de colisões com detritos de diversos tamanhos, chegando até a ordem de centímetros. Mostrou também que é possível controlar o gasto de combustível da missão espacial através desses parâmetros, viabilizando a missão. O trabalho de Clohessy e Wiltshire (Clohessy, 1960) determinou as equações da dinâmica relativa entre dois objetos espaciais sujeitos ao campo gravitacional da Terra com a restrição da proximidade destes objetos e que um deles esteja em órbita circular.

O trabalho de Jesus (Jesus A. , 1999) foi o pioneiro na área dos desvios no sistema propulsor e aplicação às manobras espaciais. Depois disto, Jesus e Teles (Jesus A. D., 2007) incluíram a variação linear e exponencial da massa na dinâmica não ideal, considerando também desvios no ângulo fora do plano da órbita. As manobras estudadas foram de Rendezvous entre duas espaçonaves. Eles encontraram uma relação de causa e efeito não linear entre as coordenadas que localizam os veículos espaciais e os erros de direção no vetor empuxo. Todos estes modelos estabeleceram a base teórica para a realização de manobras evasivas, considerando um sistema de propulsão mais realista, ou seja, com incertezas produzidas pela sua não-idealidade nestes sistemas. Um modelo físico-matemático de abordagem probabilística para a dinâmica dos detritos sob ação do campo gravitacional foi desenvolvido por Jesus (Jesus A. D., 2007) através da distribuição estatística das suas posições, considerando o método da Soma Vetorial Aleatória com Caminhada Aleatória, desenvolvido por ele, determinando a probabilidade de encontrar um detrito em função da sua posição num instante qualquer. Neste modelo, Jesus considerou que as posições do detrito são obtidas em tempo real por um sistema de rastreamento de radares. Um sistema detector de objetos espaciais é de grande importância em missões espaciais e, principalmente, para aplicações militares e de segurança nacional. A utilização de manobras evasivas também é feita para aeronaves, considerando ângulos de ataque, tempo mínimo de operação, economia de energia, etc. frente a iminentes colisões com mísseis ou com outras aeronaves em colisão acidental. Shinar e Steinberg (Shinar, 1977) estudaram manobras evasivas de uma aeronave, utilizando um modelo cinético 2D linearizado, considerando certos fatores negligenciados em muitas abordagens, tais como a estrutura dinâmica do sistema de guiagem da aeronave, a localização do elemento de saturação no “loop” da guiagem, a taxa do ângulo roll limitada para a evasão da aeronave, frente a uma colisão com um míssil. Well et al. (Well, 1982) estudaram o problema de manobras evasivas de aeronaves através do uso de técnicas de otimização numérica em regiões típicas dos ângulos de ataque. Condições de contorno foram combinadas com vínculos de caminhos de trajetórias e forneceram manobras ótimas com tempo de vôo reduzido, se as manobras forem realizadas sob ângulos de ataque elevados. Imado e Miwa (Imado, 1986) estudaram manobras evasivas de uma aeronave sob diversas estratégias e condições iniciais de ângulo relativo e altitude. Encontraram diversas características das manobras evasivas para bloquear a colisão com um míssil. Seus resultados mostraram que cada manobra possui uma região de vantagem específica, deixando a critério do piloto a escolha da estratégia evasiva, dependendo da geometria e da altitude do sistema míssil-aeronave. Um algoritmo numérico para manobras evasivas frente a uma nuvem de detritos gerada por acúmulo gravitacional dos fragmentos de um satélite foi desenvolvido por Prado e Broucke (Broucke,

1996). A nuvem de detritos foi teórica e as manobras evasivas foram realizadas para um satélite localizado na mesma altitude da nuvem. Em 2003, Jung e cooperadores (Jung B., 2003) estabeleceram estratégias evasivas para uma aeronave contra guiagem de navegação de um míssil. Eles não puderam adotar manobras evasivas ótimas como lei de guiagem em tempo real e utilizaram inteligência artificial para obter manobras evasivas subótimas em tempo real. Utilizaram redes neurais sinápticas e funções difusas que foram otimizadas pelo Método de Gradiente. As simulações numéricas por Monte-Carlo mostraram que o desempenho da lei de guiagem foi melhor do que aqueles de guiagem convencional. Recentemente, manobras estratégicas ótimas foram obtidas por Yang Guo e cooperadores (Y. Guo, 2011) para veículos espaciais em tempo mínimo, as quais maximizaram a distância mínima de colisão, ampliando a predição dos erros e economizando energia. As manobras consideram um sistema de detecção de mísseis. Eles utilizaram o método de Inequações Matriciais Diferenciais Lineares. Jesus e cooperadores (Jesus A. D., 2012) estabeleceram condições tecnológicas para a realização de manobras evasivas para satélites ou outros veículos frente a colisões iminentes com detritos espaciais em órbitas baixas da Terra (LEO). Os resultados mostraram curvas-catálogo e tabelas gerais para parâmetros tecnológicos que permitem a implementação de manobras evasivas frente à colisão com detritos de diversos tamanhos, dependendo das condições iniciais no sistema relativo detrito-veículo espacial. Um estudo da dinâmica relativa entre um veículo operacional e uma nuvem de detritos, considerando a possibilidade de colisão entre os detritos, foi realizado por Jesus et. al (Jesus A. D., 2015). Eles encontraram possibilidades de colisão entre detritos de até 10m distribuídos numa esfera de 3 km, enquanto o veículo realizava uma manobra evasiva em 3.000 segundos. Os resultados dependem do tempo de colisão, da distribuição angular dos objetos colisionais e da quantidade de detritos que formam a nuvem.

A preocupação com a realização das manobras evasivas só aumentou no início do século XXI com a ameaça da colisão com detritos espaciais cada vez mais presente.

2.4 Missões Espaciais e Arrasto Atmosférico

O efeito da força de arrasto atmosférico é o de reduzir a velocidade orbital do objeto espacial, projetando-o sobre a atmosfera terrestre. Esta força não conservativa é atuante em órbitas baixas da Terra (LEO) onde ocorre a maioria das atividades das missões espaciais. Com respeito à remoção dos detritos espaciais nesta região, esta força é um recurso natural de limpeza do ambiente espacial. Os trabalhos de Clohessy e Wiltshire (Clohessy, 1960) e Jesus et. al (Jesus A. D., 2012) não incluíram nenhuma força de perturbação. A inclusão de perturbações na dinâmica relativa de Clohessy e Wiltshire se iniciou com o trabalho de Leonard et al. (Leonard C. L., 1986); (Leonard C. H., 1989) com a inclusão do arrasto atmosférico com o objetivo de avaliar o controle de formação de vôo de dois satélites operacionais. Os trabalhos de Carter e Humi (Carter, 2002) aperfeiçoaram o modelo de Leonard e reescreveram uma forma fechada para as equações de Clohessy-Wiltshire devido as perturbações do arrasto atmosférico com diferentes modelos de densidade atmosférica. Baseado em algumas suposições, a análise da dinâmica relativa com o arrasto atmosférico, é feita com a integração de simples equações diferenciais. Schweighart e Sedwick (Schweighart, 2002) também desenvolveram um conjunto

de equações diferenciais para o movimento relativo, mas, agora, com a inclusão do achatamento da Terra incluído o efeito J_2 . A grande maioria destes trabalhos incluem os efeitos perturbativos para estudar a formação de voo de satélite ou para manobras de Rendezvous. A densidade atmosférica atua sobre o satélite, arrastando-o para dentro da órbita terrestre. Doornbos et. al (Doornbos, 2005) estudaram este efeito, identificando-o como a principal fonte de erro na determinação de órbita de um satélite em LEO. Em geral, a precisão dos modelos atuais é da ordem de 15% a 30%. Eles também estabeleceram métodos de calibração de parâmetros para melhorar a precisão na densidade atmosférica. A perda de energia do veículo operacional em LEO é devida à atuação do arrasto atmosférico, segundo Verhoef e Noomen (Verhoef, 2002)

...é diretamente responsável pela perda de energia da nave espacial, o que resulta na deterioração órbita, uma vida limitada e possível impacto sobre a superfície da Terra. A modelagem adequada ou previsão destes efeitos é difícil uma vez que as incertezas nos seus componentes (coeficiente de arrasto), ρ (densidade atmosférica), V (velocidade de satélite) e S (área de secção transversal), pode variar até 20%.

Muitos pesquisadores, com a intenção de reduzir o impacto das incertezas na modelagem de arrasto, por exemplo, relacionam a densidade de altitudes diferentes da real altitude do satélite. Verhoef e Noomen (Verhoef, 2002) observaram o efeito de arrasto atmosférico sobre o semi-eixo, uma vez que este é um bom parâmetro para representar a perda de altitude, tempo de vida e impacto. Saada et. al (Saad, 2008) realizaram um estudo sobre o decaimento orbital do Satélite RS-1 próximo da Terra, considerando as variáveis regulares KS, as perturbações de um satélite artificial, devido à não esfericidade da Terra, o arrasto atmosférico e incluíram os termos harmônicos zonais da Terra até J_6 . Eles desenvolveram um modelo de arrasto com uma atmosfera rotativa oblata, variando a velocidade de rotação da atmosfera. Ao aplicar o método para o satélite RS1 construíram um algoritmo para integrar as equações KS de movimento usando o Método de Runge-Kutta de 4ª Ordem. Os resultados do cálculo mostraram o tempo de vida de satélite a ser 379,21 dias, enquanto que a deterioração observada ocorreu após 371 dias. Ou seja, a maioria dos trabalhos que estuda o efeito do arrasto atmosférico nas missões espaciais, se ocupa em determinar o melhor modelo para a densidade atmosférica. Além disso, as agências espaciais se preocupam em estabelecer políticas e tecnologias para limpar o espaço a custo tolerável. Mas, parece improvável que uma tecnologia do futuro seja capaz de limpar o espaço por um custo menor do que o lançamento de uma única nave espacial. Recentemente, Oliveira e Jesus (Oliveira, 2016) estudaram manobras evasivas de um veículo espacial frente a colisão com detritos espaciais sujeitos ao arrasto atmosférico em LEO, considerando a densidade atmosférica constante. Eles encontraram a solução analítica para a dinâmica relativa dos objetos. A solução mostrou que o arrasto atmosférico favorece a colisão entre objetos que inicialmente têm velocidades elevadas e desacopla as coordenadas do plano da órbita, redistribuindo as possibilidades de colisão para velocidades iniciais grandes. Eles também encontraram solução numérica para a dinâmica com o arrasto atmosférico e com a força de propulsão química. Encontraram que os parâmetros tecnológicos associados ao sistema de propulsão podem inibir os efeitos do arrasto sobre a dinâmica, mas não podem eliminá-los completamente, sem retirar o veículo de sua trajetória nominal circular. Este trabalho apresentou uma proposta de manobras evasivas sub-ótima, estabelecendo regiões angulares da esfera celeste e estratégias de queima de combustível que proporcionam manobras mais

econômicas.

Neste trabalho, pretendemos estudar manobras evasivas de veículos espaciais frente a colisão com uma nuvem de detritos, considerando diversos modelos para a dinâmica relativa entre os objetos. Estes modelos incluirão forças dissipativas como, por exemplo, a força de arrasto para densidade atmosférica mais realista, propulsão química e propulsão plasma, decaimento de massa linear e exponencial. A ênfase do trabalho é a busca das soluções das EDO que representa cada etapa da dinâmica relativa colisional, utilizando métodos matemáticos mais apropriados e precisos.

Capítulo 3

Definição do Problema- Modelos Matemáticos e Recursos Computacionais.

Neste Capítulo apresentamos o modelo matemático para as dinâmicas relativas sob a atuação das: 1) Força gravitacional da Terra (caso homogêneo); 2) Força gravitacional da Terra e propulsão química com modelo exponencial de massa (caso não-homogêneo). As soluções das equações diferenciais que representam cada fenômeno específico, serão resolvidas analiticamente ou, ao menos, semi-analiticamente, e/ou simuladas numericamente.

3.1 Definição do Problema

A grande quantidade de objetos operacionais orbitando a Terra tem aumentando, devido lançamentos como também devido às colisões entre os objetos operacionais com os detritos espaciais. A seguir, a Figura 1 mostra uma ilustração de um ambiente com detritos espaciais.



Figura 1: Detritos Espaciais em órbita em torno da Terra - ameaça contra satélites e estações espaciais
Fonte: BBC, 8 de agosto de 2015

Em quase 60 anos de atividades espaciais, mais de 4.900 lançamentos colocaram em órbita

cerca de 6.600 satélites, dos quais cerca de 3.600 permanecem no espaço. Menos de um terço ainda estão em operação, o que representa um total de mais de 6.300 toneladas (ESA, 2016). Segundo observações, atualmente existem cerca de 21.000 objetos maiores que 10 cm e 500.000 objetos entre 1 e 10 cm e mais de 100 milhões de objetos menores que 1 cm. A maior parte dos detritos orbita em até 2.000 km de distância da superfície da Terra, os quais viajam a uma velocidade de até 28.163 km/h. Sendo que, somente 7% do lixo espacial é funcional (02, BBC, 2015). A Figura 2 descreve a massa dos objetos não operacionais em órbita da Terra catalogados pela Vigilância Espacial dos EUA.

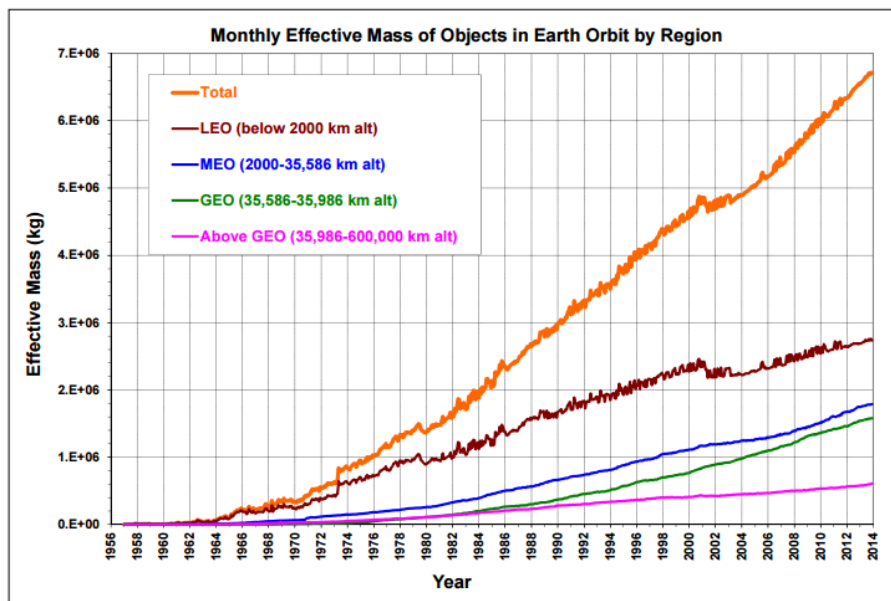


Figura 2: A massa dos objetos em órbita da Terra oficialmente catalogado pela vigilância espacial dos EUA
 Fonte: (NASA, 2015)

A dinâmica relativa espacial pode ter diversas soluções, dependendo da quantidade de forças que ela incorpora no seu modelo. Por exemplo, podemos modelar tal dinâmica entre um veículo e um detrito espaciais, considerando apenas a força gravitacional da Terra sobre eles, e a força de propulsão sobre o veículo. Mas, este problema pode ser considerado também com força de arrasto atmosférico em LEO e ainda pode conter a força sobre o veículo devido a radiação solar (força de albedo). Mas, à medida que o número de forças aumenta, tornando o modelo mais preciso, não se tem a solução analítica, apenas a numérica. Por exemplo, se considerarmos r como a posição relativa entre um veículo espacial e um detrito, medida num sistema centrado no veículo e R a distância entre o veículo e o centro da Terra, uma solução para $r/R \ll 1$ foi encontrada por Clohessy-Witshire (1960) para a dinâmica sujeita só à força gravitacional da Terra e por Jesus et al (2012) para a dinâmica com força gravitacional e força de propulsão. Uma solução intermediária pode ser encontrada para uma EDO, quando se faz alguma consideração coerente com algum limite dentro do próprio fenômeno, tal que certos termos são desprezados ou mesmo expandidos. Esta solução se chama semi-analítica ou até solução algébrica.

3.2 Dinâmica Relativa Colisional - Equações de Clohessy-Wiltshire

As equações de Clohessy-Wiltshire (Clohessy, 1960) descrevem o movimento relativo entre dois objetos próximos que estão sob a ação da gravidade de um corpo, no caso específico, a Terra. O estudo dessas equações permitiu a aplicação de manobras de “rendezvous”, ou seja, encontro entre dois veículos espaciais com velocidade relativa nula. Para que ocorra esse tipo de manobra, é necessário que um dos corpos seja o veículo de controle, o qual servirá de referência, e o outro o veículo o interceptador. Assim, o veículo de controle capta o movimento do veículo interceptador, por meio de um sensor, e calcula a quantidade de combustível necessário para a realização da manobra de encontro entre eles, chamada manobra de “Rendezvous”. Por meio da análise desse tipo de manobra, é possível chegarmos ao objetivo que necessitamos neste trabalho. Assumimos a ideia de que o veículo interceptador é substituído por um detrito espacial, e o interesse agora consiste em realizar o inverso de uma manobra de “Rendezvous”, ou seja, um escape frente à possibilidade de colisão entre o veículo e o detrito. Deste modo, o veículo de controle terá a mesma função, porém, deverá ser capaz de acionar uma propulsão para evitar a colisão com o detrito espacial. Assim, para tal objetivo, é necessário saber em qual órbita o objeto operacional está, e esta tarefa não é tão simples assim.

A determinação precisa da órbita para satélites artificiais é um dos principais desafios da tecnologia aeroespacial. Com o avanço do desenvolvimento da tecnologia espacial houve a necessidade de melhorar a precisão do cálculo de órbita de satélites artificiais incluindo várias perturbações gravitacionais e não gravitacionais [CARVALHO e MORAIS, 2007]

Adotaremos o sistema de referência geocêntrico com coordenadas (X, Y, Z) , na Terra e o sistema de referência (x, y, z) posto no satélite.

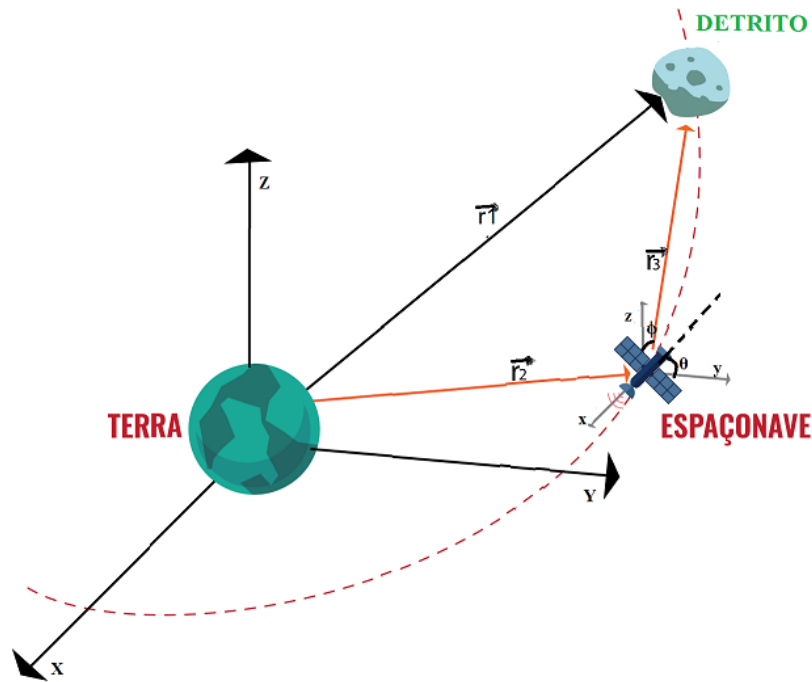


Figura 3: Dinâmica Relativa com - Sistema de referência orbital - veículo e detrito espacial colisionais.

Onde:

- ϕ : coordenada angular fora do plano da órbita
- θ : coordenada angular no plano da órbita
- x : coordenada que tem direção perpendicular à direção tangencial à trajetória
- y : coordenada orientada na direção tangencial ao movimento do satélite, de modo que o plano orbital contenha os eixos x e y .
- z : é a normal ao plano do satélite e paralelo ao seu momento angular.
- \vec{r}_3 : vetor posição relativa do detrito espacial em relação ao satélite

O modelo matemático adotado está associado à dinâmica de manobra de “Rendezvous”.

A equação de movimento para o satélite de controle em relação ao sistema de coordenada inercial, centrado na Terra (X,Y, Z) por (Teles, 2006) temos:

$$\ddot{\vec{R}} = -\frac{\mu}{|\vec{R}|^3}\vec{R} + \vec{a}_{td} \quad (3.1)$$

Onde:

- \vec{R} : representa o vetor que identifica a posição do satélite de controle em relação ao centro da Terra;
- \vec{a}_{td} : representa outras forças diferentes da gravitacional em unidades de massa.

Para o satélite “interceptor”, tem-se:

$$\ddot{\vec{R}} + \ddot{\vec{r}} = -\mu \left[\frac{(\vec{R} + \vec{r})}{(R + r)^3} \right] + \vec{a}_r + \vec{a}_{cd} \quad (3.2)$$

onde,

- \vec{r} : vetor posição do satélite “interceptor” em relação ao satélite de controle;
- \vec{a}_r : aceleração causada pela propulsão;
- \vec{a}_{cd} : outras forças diferentes da gravitacional e da propulsão (arraste atmosférico, etc.) em unidades de massa do satélite “interceptor”.

A manobra de evasão que estudamos deve satisfazer a condição da distância \vec{r} entre os satélites ser pequena, comparada com a distância \vec{R} entre o satélite de controle e o centro da Terra. Podemos expandir o termo gravitacional em séries de potências e truncar termos de altas ordens. Este desenvolvimento não será trabalhado aqui, mas pode ser encontrado em (Teles, 2006). Assim,

$$\begin{aligned} R + r &= (R^2 + 2\vec{R}^T\vec{r} + r^2)^{1/2} \Rightarrow (R + r) = R \left(1 + \frac{2\vec{R}^T\vec{r}}{R^2} + \frac{r^2}{R^2} \right)^{1/2} \Rightarrow (R + \\ r)^3 &= R^3 \left(1 + \frac{2\vec{R}^T\vec{r}}{R^2} + \frac{r^2}{R^2} \right)^{3/2} = \frac{(\vec{R} + \vec{r})}{(R+r)^3} = \frac{\vec{R} + \vec{r}}{R^3} \left(1 + \frac{2\vec{R}^T\vec{r}}{R^2} + \frac{r^2}{R^2} \right)^{-3/2} \approx \frac{\vec{R} + \vec{r}}{R^3} \left[1 - \right. \\ &\left. \frac{3}{2} \left(\frac{2\vec{R}^T\vec{r}}{R^2} + \frac{r^2}{R^2} \right) \right] \approx \frac{\vec{R} + \vec{r}}{R^3} \left[1 - \frac{3\vec{R}^T\vec{r}}{R^2} - \frac{3}{2} \frac{r^2}{R^2} \right] \approx \frac{1}{R^3} \left[\vec{R} + \vec{r} - \frac{3\vec{R}^T\vec{r}}{R^2} \vec{R} \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

Onde os vetores \vec{R} e \vec{R}^T são respectivamente, vetor da posição do centro de referência ao centro da Terra e a forma matricial do seu transposto. Desse modo, por (3.1), (3.2), (3.3) e isolando $\ddot{\vec{r}}$, temos:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{|\vec{R}|^3} \left[\vec{r} - \frac{3\vec{R}^T\vec{r}}{|\vec{R}|^2} \vec{R} \right] - \vec{a}_{td} + \vec{a}_r + \vec{a}_{cd} \quad (3.4)$$

Como o vetor posição do satélite em relação ao sistema de coordenadas rotacional (x, y, z) , portanto, os sistemas do satélite de controle, é dado por:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_{rot} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (3.5)$$

se $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ então:

$$\ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_{rot} + 2(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}) + \omega \times (\omega \times \vec{r}) \quad (3.6)$$

Onde $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ é a velocidade angular do satélite de controle. Neste caso, adotamos órbita circular e, portanto, este vetor é constante.

Substituindo (3.5) em (3.4), teremos:

$$\ddot{r}_{rot} \Rightarrow -\frac{\mu}{|\vec{R}|^3} \left[\vec{r} - \frac{3\vec{R} \cdot \vec{r}}{|\vec{R}|^2} \vec{R} \right] - 2(\vec{\omega} \times \vec{r}) + \omega \times (\omega \times r) - \vec{a}_{td} + \vec{a}_r + \vec{a}_{cd} \quad (3.7)$$

Arrumando as equações em versão matricial e, considerando:

$$\vec{\omega} = \omega \vec{k} \quad (3.8)$$

$$r = (x, y, z) \quad (3.9)$$

$$R = (0, R, 0) \quad (3.10)$$

$$(\vec{\omega} \times \vec{r}) = (-\omega y, \omega x, 0) \quad (3.11)$$

$$\frac{\mu}{|\vec{R}|^3} = \omega^2 \quad (3.12)$$

e desenvolvendo a expressão abaixo temos:

$$\vec{r} - \frac{3\vec{R} \cdot \vec{r}}{|\vec{R}|^2} \vec{R} = (x, -2y, z) \quad (3.13)$$

Substituindo (3.7), (3.8), (3.9), (3.10), (3.11) e (3.12) em (3.6) e reescrevendo em termos:

$$\ddot{x} - 2\omega \dot{y} = f_x \quad (3.14)$$

$$\ddot{y} + 2\omega \dot{x} - 3\omega^2 y = f_y \quad (3.15)$$

$$\ddot{z} + \omega^2 z = f_z \quad (3.16)$$

Estas são as equações de Hill. Elas são consideradas semi-analíticas pelo fato de que foram obtidas por meio da expansão em Taylor, considerando a condição $\frac{r}{R} \ll 1$ (R é a distância relativa do satélite operacional ao centro da Terra) e ainda, a velocidade angular do veículo espacial é $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$, onde k é uma constante do movimento circular do veículo espacial. Do lado esquerdo das equações (3.14), (3.15) e (3.16) temos a dinâmica descrita pelo movimento relativo sujeitos a força gravitacional, e do lado direito, depois da igualdade, a força externa de perturbação que atuam no detrito e no veículo espacial.

Estas equações são conhecidas como Equações de Hill, onde, suas respectivas soluções determinam as coordenadas da posição relativa entre o veículo espacial e um detrito que orbitam em torno da Terra. Para o caso homogêneo, ou seja, $f_x = f_y = f_z = 0$, está sendo considerado apenas a ação da força gravitacional da Terra que atua nos corpos, elas são conhecidas como equações de Clohessy-Wiltshire.

Para resolver as equações utilizamos o método de variação de parâmetros. Como temos um

sistema acoplado em x e y , aplicamos a integral de t na equação x , decrescendo um grau da derivada. Em seguida substituímos na equação y , resolvemo-la e assim encontramos suas respectivas soluções homogêneas. Em seguida calculamos as soluções particulares, e por fim determinamos a solução geral, pois, pelo teorema enunciado abaixo temos que, $S_G = S_h + S_p$, ou seja, a solução geral é composta pela soma da solução homogênea com solução particular.

Teorema 3.1 Seja y_p uma dada solução para a equação linear não-homogênea de n -ésima ordem em um intervalo I e sejam $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ um conjunto fundamental de soluções para a equação homogênea associada no intervalo. Então, para qualquer solução $Y(x)$ em I , podemos encontrar constantes C_1, C_2, \dots, C_n tais que

$$Y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) + y_p(x) \quad (3.17)$$

A diferença de duas soluções da equação não homogênea é solução da homogênea associada. Assim, pelo Teorema 3.1, nós concluímos que uma solução geral da não homogênea é da forma

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) + y_p(x) \quad (3.18)$$

onde $y_p(x)$ é uma solução particular da não homogênea.

Desse modo, nós encontramos a solução homogênea e em seguida a solução particular, para compormos a solução geral, equações ao longo deste Capítulo.

Para determinarmos a dinâmica colisional, aplicamos as condições iniciais CCIC (Conjunto de Condições Iniciais de Colisão). Assim, obtemos as posições relativas iniciais (x_0, y_0, z_0) e as velocidades relativas iniciais $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$, em um instante inicial t_0 . Por fim obtivemos as respectivas soluções:

$$x(t) = -\frac{2\dot{y}_0}{\omega} \cos \omega t + \left(\frac{4\dot{x}_0}{\omega} - 6y_0\right) \sin \omega t - (3\dot{x}_0 - 6\omega y_0)t + \left(x_0 + \frac{2\dot{y}_0}{\omega}\right) \quad (3.18)$$

$$y(t) = \left(\frac{2\dot{x}_0}{\omega} - 3y_0\right) \cos \omega t + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega t + \left(\frac{2\dot{x}_0}{\omega} - 4y_0\right) \quad (3.19)$$

$$z(t) = z_0 \cos \omega t + \frac{\dot{z}_0}{\omega} \sin \omega t \quad (3.20)$$

Seguindo a dinâmica de colisão, pelas condições impostas, teremos um modelo que descreve a colisão entre estes corpos, pois a distância entre eles será nula (condição de colisão):

$$x(t) = 0, y(t) = 0, z(t) = 0 \Rightarrow r(t) = 0 \quad (3.21)$$

Colocando os resultados das componentes cartesianas em função da velocidade inicial, a derivada, a qual determina a velocidade inicial de colisão, temos,

$$\dot{x}_0 = \frac{[6x_0(-\omega t + \sin \omega t) - x_0]\omega \sin \omega t + 2\omega y_0(3 \cos \omega t - 4)(\cos \omega t - 1)}{(4 \sin \omega t - 3\omega t) \sin \omega t - 4(\cos \omega t - 1)^2} \quad (3.22)$$

$$\dot{y}_0 = -\frac{\omega y_0(-4 + 3 \cos \omega t) + 2\dot{x}_0(\cos \omega t - 1)}{\sin \omega t} \quad (3.23)$$

$$\dot{z}_0 = -\frac{\omega z_0 \cos \omega t}{\sin \omega t} \quad (3.24)$$

A partir das condições trabalhadas acima, calculamos as velocidades iniciais relativas para a colisão.

Assumiremos algumas considerações adotada para a obtenção do CIC (Condições Iniciais de Colisão), (Jesus A. D., 2012) :

1. Fornecer uma esfera de possibilidades de posições iniciais relativas para o detrito espacial. Para isto, consideramos a varredura angular no plano igual a $0 \leq \theta < 2\pi$ e, no espaço igual a $0 \leq \phi < \pi$. Nas simulações, o passo do ângulo foi de 1° , e para um valor fixo do vetor da posição inicial r_0 . As componentes são encontradas em coordenadas esféricas, dadas por:

$$x_0 = r_0 \sin \phi \cos \theta \quad (3.25)$$

$$y_0 = r_0 \sin \phi \sin \theta \quad (3.26)$$

$$z_0 = r_0 \cos \phi \quad (3.27)$$

2. Determinar o tempo de colisão no intervalo $1 \leq t_c \leq 10^6$, com passo de 1 segundo. Os tempos são escolhidos, tais que seja possível as manobras evasivas, frente a colisões iminentes em regiões orbitais LEO;
3. O valor de ω é encontrado com base na altitude fornecida para a órbita LEO;

3.3 Sistema de Propulsão Química- Modelo Exponencial

Para realizar manobras evasivas, o satélite precisa de um sistema de propulsão, que seja capaz de modificar seu movimento. Devido a forças dissipativas, o veículo pode sair da órbita nominal e o sistema de propulsão é acionado para trazer o veículo de volta a órbita nominal. Além das manobras de correção, o sistema de propulsão é utilizado para implementar manobras evasivas para tirar o veículo da rota que o (Machado, 2000) levaria a uma colisão com um detrito espacial. Nas missões espaciais, normalmente este sistema está relacionado com a ejeção de

gases.

A força de propulsão por unidade de massa, atuante no veículo, é dado por (Jesus A. D., 2012):

$$\vec{f}_p = -\frac{1}{m(t)} \vec{v}_e \frac{dM(t)}{dt} = -\vec{v}_e \frac{d}{dt} \ln(M(t)) \quad (3.28)$$

Como a massa é variável no tempo, de fato, o combustível decresce pelo sistema de exaustão, o modelo de variação de massa deve ser escrito como:

$$M(t) = M + m(t) \quad (3.29)$$

onde:

- $M(t)$: Massa total do veículo, incluindo a massa do combustível;
- \vec{v}_e : Velocidade de Exaustão dos gases;
- M : Massa do veículo sem combustível;
- $m(t)$: Massa do combustível do propulsor, a qual corresponde a queima do combustível em função do tempo;

O modelo exponencial para variação da massa é aquele no qual a massa decresce exponencialmente no tempo com uma frequência constante ($\gamma > 0$). Consideramos a massa M proporcional à massa inicial do combustível m_0 , com constante de proporcionalidade χ , Equação (3.32), adotados por (Jesus A. D., 2012). Desta forma, definimos três parâmetros tecnológicos que controlam a manobra evasiva pelo sistema de propulsão: o fator de potência do propulsor, γ ; o fator de massa, χ ; a velocidade de exaustão do propelente v_e . Assim:

$$\chi = \frac{M}{m_0} \quad \equiv \quad M = \chi m_0 \quad (3.30)$$

- γ : Fator de potência do propulsor;
- m_0 : Massa inicial do combustível;
- χ : Fator de Massa (Constante de proporcionalidade).

Deste modo, por (3.31) e (3.32) temos que

$$M(t) = m_0(\chi + e^{-\gamma t}), \quad \gamma > 0 \quad (3.31)$$

Incluindo esta força na dinâmica relativa, temos:

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = -v_{ex} \frac{d}{dt} \ln(M(t)) \quad (3.32)$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - 3\omega^2y = -v_{ey} \frac{d}{dt} \ln(M(t)) \quad (3.33)$$

$$\ddot{z} + \omega^2z = -v_{ez} \frac{d}{dt} \ln(M(t)) \quad (3.34)$$

Adotaremos os mesmos parâmetros usados por Jesus et al. (Jesus A. D., 2012). Assim, as manobras evasivas são possíveis quando a distância relativa final calculada, para um tempo de colisão, for maior do que as dimensões do objeto colisional, onde os objetos são considerados esferas com raios conhecidos. Desse modo, serão escolhidos parâmetros tecnológicos que sejam capazes de produzir uma força muito menor que a gravitacional, de tal forma que possamos tratá-la como uma perturbação no movimento do satélite (Jesus A. D., 2015)

O método utilizado para solução é o de separação de variáveis e fizemos uso da expansão do \ln . Deste modo, descreveremos abaixo alguns passos da resolução:

Por (3.33) temos,

Assim, aplicando a derivada e a propriedade do logaritmo do produto, temos:

$$\frac{d}{dt} \ln \left[m_0\chi \left(1 + \frac{e^{-\gamma t}}{\chi} \right) \right] \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\ln \left(1 + \frac{e^{-\gamma t}}{\chi} \right) \right] \quad (3.35)$$

Como χ , que corresponde a razão entre a massa do corpo do satélite e a massa inicial do combustível, é maior do que 1, e o numerador é um número que decresce no tempo, isto implica que o segundo fator do \ln é muito menor do que 1, e assim podemos expandir o \ln , ficando:

$$\ln \left(1 + \frac{e^{-\gamma t}}{\chi} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot e^{-n\gamma t}}{n \chi^n}, \text{ se } \frac{e^{-\gamma t}}{\chi} \ll 1 \quad (3.36)$$

Reescrevendo as equações (3.34), (3.35), (3.36) temos:

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = -v_{ex} \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot e^{-n\gamma t}}{n \chi^n} \quad (3.37)$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - 3\omega^2y = -v_{ey} \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot e^{-n\gamma t}}{n \chi^n} \quad (3.38)$$

$$\ddot{z} + \omega^2z = -v_{ez} \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot e^{-n\gamma t}}{n \chi^n} \quad (3.39)$$

As Equações (3.41) e (3.42) são acopladas em x e y . Assim, inicialmente encontramos a solução $x(t)$, e a partir da mesma encontramos a solução $y(t)$. Como as equações são não homogêneas, primeiro encontramos a solução homogênea, e em seguida, a partir da mesma, impomos uma

solução particular. Este método que utilizamos foi o de variação de parâmetro. Para isto, precisamos que solução da homogênea, associada a equação diferencial seja conhecida para supor uma possível solução para a não homogênea, ou seja, precisamos conhecer a solução homogênea para encontrarmos a solução particular. Este método não será detalhado aqui, mas para um maior entendimento, recorrer a (Machado, 2000) Capítulo 4, Seção 4.4. Assim, temos a solução particular da forma:

$$S_p = v_1(t) \sin \omega t + v_2(t) \cos \omega t \quad (3.40)$$

Após algumas manipulações do método e substituições, encontramos as soluções das componentes em x , y e z , em função de t .

$$x(t) = 2C_1 \sin \omega t - 2C_2 \cos \omega t + Et - \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{-n\gamma t} + G \quad (3.41)$$

$$y(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n\gamma t} + D \quad (3.42)$$

$$C_1 = \left\{ \frac{2\dot{x}_0}{\omega} - 3y_0 + \frac{2v_{ex}}{w} \ln \left(1 + \frac{1}{\chi} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n} \left[\frac{2v_{ex}}{\omega} + \frac{n\gamma v_{ey}}{\omega^2} \right] \left[1 + \left(\frac{n\gamma}{\omega} \right)^2 \right]^{-1} \right\} \quad (3.43)$$

$$C_2 = \left\{ \frac{\dot{y}_0}{\omega} + \frac{v_{ex}}{w} \ln \left(1 + \frac{1}{\chi} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\chi^n} \left[\frac{2v_{ex} n\gamma}{\omega^2} - \frac{v_{ey}}{\omega} \right] \left[1 + \left(\frac{n\gamma}{\omega} \right)^2 \right]^{-1} \right\} \quad (3.44)$$

$$F_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n} \left\{ \left[\frac{4v_{ex}}{n\gamma} + \frac{2v_{ey}}{\omega} \right] \left[1 + \left(\frac{n\gamma}{\omega} \right)^2 \right]^{-1} - \frac{v_{ex}}{n\gamma} \right\} \quad (3.45)$$

$$C_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n} \left\{ \left[\frac{2v_{ex}}{\omega} + \frac{n\gamma v_{ex}}{\omega^2} \right] \left[1 + \left(\frac{n\gamma}{\omega} \right)^2 \right]^{-1} \right\} \quad (3.46)$$

$$G = \left\{ x_0 + \frac{2\dot{y}_0}{\omega} + \frac{2v_{ex}}{\omega} \ln \left(1 + \frac{1}{\chi} \right) + \frac{3v_{ex}}{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 \chi^n} \right\} \quad (3.47)$$

$$E = \left\{ 6\omega y_0 - 3\dot{x}_0 - 3v_{ex} \ln \left(1 + \frac{1}{\chi} \right) \right\} \quad (3.48)$$

$$D = \left\{ 4y_0 - \frac{2\dot{x}_0}{\omega} - \frac{2v_{ex}}{\omega} \ln \left(1 + \frac{1}{\chi} \right) \right\} \quad (3.49)$$

Encontrando o $z(t)$, como não está acoplado às outras equações, fica mais simples resolvê-lo:

$$z(t) = C_3 \cos \omega t + C_4 \sin \omega t - \sum_{n=1}^{\infty} J_n e^{-n\gamma t} \quad (3.50)$$

onde:

$$C_3 = z_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\chi^n} \frac{\gamma v_{ez}}{\omega^2} \left[1 + \left(\frac{n\gamma}{\omega} \right)^2 \right]^{-1} \quad (3.51)$$

$$C_4 = \frac{\dot{z}_0}{\omega} + \frac{v_{ez}}{\omega} \ln \left(1 + \frac{1}{\chi} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n} \frac{v_{ez}}{\omega} \left[1 + \left(\frac{n\gamma}{\omega} \right)^2 \right]^{-1} \quad (3.52)$$

$$J_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\chi^n} \frac{v_{ez} \gamma}{\omega} \left[1 + \left(\frac{n\gamma}{\omega} \right)^2 \right]^{-1} \quad (3.53)$$

Utilizamos a substituição, em função do fator de massa por (3.39). E assim encontramos as componentes cartesianas, onde os parâmetros tecnológicos estão relacionados com a tecnologia disponível, e podem possibilitar a evasão ou não entre os objetos espaciais.

Capítulo 4

Dinâmica Relativa com Perturbação do Arrasto Atmosférico

Este Capítulo apresenta a dinâmica relativa entre um veículo espacial e um detrito espacial sujeita à força gravitacional da Terra e à força de arrasto atmosférico. O arrasto atmosférico é uma perturbação natural mais forte nas regiões orbitais onde a atmosfera da Terra tem uma densidade suficiente para afetar as trajetórias destes objetos, como por exemplo na região LEO, (Jesus A. D., 2015), ou seja, a órbita é mais afetada no perigeu (regiões próximas da superfície da Terra). O efeito do arrasto atmosférico traz algumas consequências para a órbita do satélite. Uma delas é a redução da sua excentricidade, e assim faz com que ele retorne para a atmosfera da Terra. A densidade atmosférica da Terra diminui com a altitude.

Neste Capítulo, estudamos 1) a dinâmica colisional sob o efeito da força de arrasto atmosférico e da força gravitacional da Terra e, 2) a mesma dinâmica com estas forças mais a força de propulsão, atuando no veículo. Em ambos os casos, assumimos que a força de arrasto atua apenas no detrito. Apresentaremos a atuação da força de perturbação atuando sobre o satélite e sobre o detrito, porém, tanto as resoluções das equações, quanto as simulações contemplam a atuação desta força agindo apenas sobre o detrito.

Um corpo que se move com velocidade relativa \vec{v}_{rel} num ambiente com atmosfera, está sujeito a uma aceleração aerodinâmica, que pode ser escrita na forma (David, (2007)) :

$$\vec{f}_{drag} = -\frac{1}{2} \frac{C_D A}{m} \rho |\vec{v}_{rel}| \vec{v}_{rel} \quad (4.1)$$

Onde:

- ρ : Densidade atmosférica;
- A : Área do objeto que está perpendicular à direção do seu movimento;
- C_D : Coeficiente de Arrasto atmosférico;
- m : Massa do corpo (detrito ou veículo).

Vamos assumir o modelo utilizado por (Sousa, 2015) onde a densidade atmosférica depende somente da distância R até o centro da Terra:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{R-s}{R_0-s} \right)^\tau \quad (4.2)$$

Onde:

- ρ_0 : densidade atmosférica inicial do ponto do perigeu com distância R_0 do centro da Terra;
- τ e s : parâmetros ajustáveis. São adaptados para estimar as observações das atividades solares e atualizar as constantes mudanças na dinâmica da atmosfera.

Será assumido também que: a atmosfera é simetricamente esférica e rotacional com velocidade angular constante $\vec{\omega}_e$ e que não há mudanças na atmosfera durante a passagem dos dias .

A aceleração de arrasto atmosférico que atua no veículo é:

$$\vec{f}_{DragSat} = -\frac{1}{2} \frac{C_{DSat} A_{Sat}}{m_{Sat}} \rho |\vec{v}_{relSat}| \vec{v}_{relSat} \quad (4.3)$$

Assim, por (David, (2007)) a velocidade do veículo relativa a atmosfera em rotação é calculada por:

$$\vec{v}_{relSat} = \vec{V} - \vec{\omega}_e \times \vec{R} \quad (4.4)$$

Onde,

- \vec{V} : Velocidade do veículo em relação ao sistema de referência geocêntrico;
- \vec{R} : Posição do veículo em relação ao sistema de referência geocêntrico.

Ainda,

$$\vec{R} = R\vec{i} \quad (4.5)$$

$$\vec{V} = R\omega\vec{j} \quad (4.6)$$

Escrevendo $\vec{\omega}_e$ no sistema equatorial geocêntrico:

$$\vec{\omega}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_e \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Por (4.4), (4.5), (4.6) e (4.7), tem-se que:

$$\vec{v}_{relSat} = R(\omega - \omega_e)\vec{j} \quad (4.8)$$

Desse modo, por (4.3) e (4.8) pode ser escrita como:

$$\vec{f}_{DragSat} = -\frac{1}{2} \frac{C_{DSat} A_{Sat}}{m_{Sat}} \rho [R(\omega - \omega_e) \vec{j}]^2 \quad (4.9)$$

Para a inclusão do arrasto atmosférico no detrito espacial é necessário fazer algumas considerações do trabalho de (Reid, (2009)) apud (Sousa, 2015)). A posição do detrito é determinada a partir do sistema posto no satélite. Como a Terra tem uma velocidade de rotação ω_e e ela transporta esta rotação a atmosfera, tem-se que calcular a velocidade relativa do detrito em relação a rotação da atmosfera:

$$\vec{V}_{DeRel} = \vec{V}_{De} - \omega_e \times \vec{R}_{De} \quad (4.10)$$

- \vec{V}_{De} : Vetor velocidade;
- \vec{R}_{De} : Vetor posição do detrito com respeito ao sistema geocêntrico.

Escrevendo o vetor posição, do detrito espacial, em relação ao sistema geocêntrico tem-se:

$$\vec{R}_{De} = \vec{R} + \vec{r} \quad (4.11)$$

E por fim, a velocidade do detrito com respeito ao sistema girante do satélite é expressa por:

$$\vec{V}_{De} = \vec{V}_{Sat} + \dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (4.12)$$

Assim:

$$\vec{V}_{De} = \begin{bmatrix} \dot{x} - y\omega \\ R\omega + \dot{y} + \omega x \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Devemos escrever a velocidade angular de rotação da atmosfera definido por (4.7) também com respeito ao sistema fixo do satélite. Devemos então realizar as rotações de Euler, e então transformaremos do sistema geocêntrico equatorial da Terra para o sistema perifocal e, finalmente, para o sistema fixo do satélite. Para escrever a velocidade angular de rotação da atmosfera da Terra no sistema fixo do satélite, aplicou-se o produto das matrizes de rotação dos ângulos de Euler, onde:

$$\vec{\omega}_{eSat} = R_3(\theta)R_1(i)R_3(\Omega)\vec{\omega}_e \quad (4.14)$$

Onde, θ, i, Ω correspondem a, posição angular, inclinação e nodo ascendente do sistema de referência do veículo, respectivamente. As matrizes de Euler são:

$$R_1(i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(i) & \sin(i) \\ 0 & -\sin(i) & \cos(i) \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$R_3(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$R_3(\Omega) = \begin{bmatrix} \cos(\Omega) & \sin(\Omega) & 0 \\ -\sin(\Omega) & \cos(\Omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Por (4.14), aplicando o produto tem-se que a velocidade angular da Terra escrito no sistema fixo do satélite é:

$$\vec{\omega}_e = \begin{bmatrix} \sin(\theta)\sin(i) \\ \cos(\theta)\sin(i) \\ \cos(i) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Por (4.10), (4.13) e (4.18) podemos escrever a velocidade relativa do detrito espacial a atmosfera da Terra:

$$\vec{V}_{DeRel} = \begin{bmatrix} \dot{x} - y(\omega - \omega_e \cos(i)) - z\omega_e \cos(\theta)\sin(i) \\ \dot{y} + (R + x)(\omega - \omega_e \cos(i)) + z\omega_e \sin(\theta)\sin(i) \\ \dot{z} + (R + x)(\omega_e \cos(\theta)\sin(i)) - y\omega_e \sin(\theta)\sin(i) \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Desse modo, a aceleração de arrasto atmosférico atuante no detrito espacial pode ser escrita como:

$$\vec{f}DragDe = -\frac{1}{2} \frac{C_D A_{De}}{m_{De}} \rho |\vec{v}_{DeRel}| \vec{v}_{DeRel} \quad (4.20)$$

Seguindo o trabalho de (Reid, (2009)) apud (Sousa, 2015) a expressão da aceleração do arrasto atmosférico no detrito espacial na aproximação $R \gg r$ é:

$$\vec{f}DragDe = -\frac{1}{2} \frac{C_D A_{De}}{m_{De}} \rho v_{oy} \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{oy} + 2v_{1y} \\ v_{oz} + v_{1z} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Onde:

$$v_{oy} = R(\omega - \omega_e \cos(i)) \quad (4.22)$$

$$v_{oz} = R(\omega_e \cos(\theta) \sin(i)) \quad (4.23)$$

$$v_{1x} = \dot{x} - y(\omega - \omega_e \cos(i)) - z\omega_e \cos(\theta) \sin(i) \quad (4.24)$$

$$v_{1y} = \dot{y} + x(\omega - \omega_e \cos(i)) + z\omega_e \sin(\theta) \sin(i) \quad (4.25)$$

$$v_{1z} = \dot{z} + x(\omega_e \cos(\theta) \sin(i)) - y\omega_e \sin(\theta) \sin(i) \quad (4.26)$$

Depois de algumas adaptações das expressões acima, as equações de Clohessy-Wiltshire com o arrasto atmosférico são dadas por:

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = -\frac{1}{2\beta}(\omega - \omega_E)[\dot{x} - y(\omega - \omega_E)] \quad (4.27)$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 y = -\frac{1}{2\beta}(\omega - \omega_E)[2(\dot{y} + x(\omega - \omega_E)) + R(\omega - \omega_E)] \quad (4.28)$$

$$\ddot{z} + \omega^2 z = -\frac{1}{2\beta}(\omega - \omega_E)\dot{z} \quad (4.29)$$

Onde

$$\beta = \left(\frac{C_d A \rho}{m}\right)^{-1} \quad (4.30)$$

Com,

- C_d : Coeficiente de Arrasto Atmosférico;
- A : Área do satélite;
- ρ : Densidade Atmosférica;
- m : Massa do Satélite.

Fazendo algumas simplificações, as equações (4.27), (4.28) e (4.29), ficam na forma:

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} + A\dot{x} - Cy = 0 \quad (4.31)$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 y + 2A\dot{y} + 2Cx = -RC \quad (4.32)$$

$$\ddot{z} + Az + w^2 z = 0 \quad (4.33)$$

Onde:

$$\alpha = \omega - \omega_E \quad (4.34)$$

$$A = \frac{\alpha}{2\beta} \quad (4.35)$$

$$C = \frac{\alpha^2}{2\beta} \quad (4.36)$$

A Equação (4.33) é mais simples de resolver, já a (4.31) e a (4.32) são equações acopladas. Para estas, aplicamos o método da adição e assim tornando-as separáveis. A condição da igualdade entre as duas equações que são de diferentes variáveis é que elas sejam iguais a uma constante. Esta constante chamamos de constante de separação, $-\lambda^2$. Assim,

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} + A\dot{x} - Cy = \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - 3\omega^2y + 2A\dot{y} + 2Cx + RC \quad (4.37)$$

$$\ddot{x} + (-2\omega + A)\dot{x} - 2Cx = \ddot{y} + (2A + 2\omega)\dot{y} + y(C - 3\omega^2) + RC = -\lambda^2 \quad (4.38)$$

Desta forma, temos:

$$\ddot{x} + (-2\omega + A)\dot{x} - 2Cx = -\lambda^2 \quad (4.39)$$

Simplificando fica:

$$\ddot{x} + D\dot{x} - 2Cx = -\lambda^2 \quad (4.40)$$

Onde:

$$D = (-2\omega + A) \quad (4.41)$$

Resolvemos a parte homogênea, em seguida a solução particular, para podermos escrever a solução geral. Apresentaremos as soluções abaixo, considerando os três casos para o delta: subcrítico, crítico e supercrítico. A seguir, apresentamos a solução $x(t)$.

Aplicando as condições iniciais encontramos os coeficientes. Fazendo $x(0) = x_0$ encontramos C_1 e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ encontramos C_2 . Assim:

delta: $\left(\frac{D}{2}\right)^2 + 2C$.

Para Delta < 0:

$$x(t) = e^{-\frac{Dt}{2}} \left[C_1 \cos \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + 2C} t + C_2 \sin \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + 2C} t \right] + \frac{\lambda^2}{2C} \quad (4.42)$$

$$C_1 = x_0 - \frac{\lambda^2}{2C} \quad (4.43)$$

$$C_2 = \left\{ x_0 + \frac{D}{2} \left[x_0 - \frac{\lambda^2}{2C} \right] \right\} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + 2C}} \quad (4.44)$$

Para delta = 0:

$$x(t) = e^{-\frac{Dt}{2}} C_1 e^{\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + 2C} t} + e^{-\frac{Dt}{2}} t C_2 e^{-\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + 2C} t} + \frac{\lambda^2}{2C} \quad (4.45)$$

$$C_1 = x_0 - \left\{ -x_0 + \left[-\frac{D}{2} + \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + 2C} \right] \left[x_0 - \frac{\lambda^2}{2C} \right] \right\} \frac{1}{\left[\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + 2C} - 1 \right]} - \frac{\lambda^2}{2C} \quad (4.46)$$

$$C_2 = \left\{ -x_0 + \left[-\frac{D}{2} + \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + 2C} \right] \left[x_0 - \frac{\lambda^2}{2C} \right] \right\} \frac{1}{\left[\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + 2C} - 1 \right]} \quad (4.47)$$

Para delta > 0:

$$x(t) = C_1 e^{\frac{-D + \sqrt{D^2 + 8C}}{2} t} + C_2 e^{\frac{-D - \sqrt{D^2 + 8C}}{2} t} + \frac{\lambda^2}{2C} \quad (4.48)$$

$$C_1 = x_0 - \left\{ -\frac{\dot{x}_0}{2} - \frac{D}{4} \left[x_0 - \frac{\lambda^2}{2C} \right] + \frac{\sqrt{D^2 + 8C}}{4} \left(x_0 - \frac{\lambda^2}{2C} \right) \right\} \frac{\sqrt{D^2 + 8C}}{D^2 + 8C} - \frac{\lambda^2}{2C} \quad (4.49)$$

$$C_2 = \left\{ -\frac{\dot{x}_0}{2} - \frac{D}{4} \left[x_0 - \frac{\lambda^2}{2C} \right] + \frac{\sqrt{D^2 + 8C}}{4} \left(x_0 - \frac{\lambda^2}{2C} \right) \right\} \frac{\sqrt{D^2 + 8C}}{D^2 + 8C} \quad (4.50)$$

Agora apresentaremos a solução de $y(t)$:

$$\ddot{y} + (2A + 2\omega)\dot{y} + y(C - 3\omega^2) + RC = -\lambda^2 \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} + M\dot{y} + Fy = G \quad (4.51)$$

$$M = (2A + 2\omega) \quad (4.52)$$

$$F = (C - 3\omega^2) \quad (4.53)$$

$$G = -RC - \lambda^2 \quad (4.54)$$

Resolvendo a parte homogênea, em seguida a solução particular, para podermos escrever a solução geral como:

$$\text{delta: } \left(\frac{M}{2}\right)^2 - F.$$

Para delta < 0:

$$y(t) = e^{-\frac{M}{2}t} C_1 \cos \sqrt{\left(\frac{M}{2}\right)^2 - F} t + e^{-\frac{M}{2}t} C_2 \sin \sqrt{\left(\frac{M}{2}\right)^2 - F} t + \frac{G}{F} \quad (4.55)$$

$$C_1 = y_0 - \frac{G}{F} \quad (4.56)$$

$$C_2 = \left\{ \dot{y}_0 + \frac{M}{2} \left[y_0 - \frac{G}{F} \right] \right\} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{M}{2}\right)^2 - F}} \quad (4.57)$$

Para delta = 0:

$$y(t) = e^{-\frac{M}{2}t} \left[C_1 e^{\sqrt{\left(\frac{M}{2}\right)^2 - F}t} + t C_2 e^{-\sqrt{\left(\frac{M}{2}\right)^2 - F}t} \right] + \frac{G}{F} \quad (4.58)$$

$$C_1 = y_0 - \frac{G}{F} \quad (4.59)$$

$$C_2 = y_0 - \left[y_0 - \frac{G}{F} \right] \left[-\frac{M}{2} + \sqrt{\left(\frac{M}{2}\right)^2 - F} \right] \quad (4.60)$$

Para delta > 0:

$$y(t) = C_1 e^{\left(\frac{-M + \sqrt{M^2 - 4F}}{2}\right)t} + C_2 e^{\left(\frac{-M - \sqrt{M^2 - 4F}}{2}\right)t} - \frac{\lambda^2 + RD}{F} \quad (4.61)$$

Onde:

$$C_1 = y_0 - \left[-\frac{\dot{y}_0}{2} - \frac{M}{4} \left(y_0 - \frac{G}{F} \right) + \frac{\sqrt{M^2 - 4F}}{4} \left(y_0 - \frac{G}{F} \right) \right] \frac{2\sqrt{M^2 - 4F}}{M^2 - 4F} - \frac{G}{F} \quad (4.62)$$

$$C_2 = \left[-\frac{\dot{y}_0}{2} - \frac{M}{4} \left(y_0 - \frac{G}{F} \right) + \frac{\sqrt{M^2 - 4F}}{4} \left(y_0 - \frac{G}{F} \right) \right] \frac{2\sqrt{M^2 - 4F}}{M^2 - 4F} \quad (4.63)$$

A solução de z(t):

$$\ddot{z} + A \dot{z} + w^2 z = 0 \quad (4.64)$$

Trata-se de uma equação homogênea, a partir da equação característica, cuja solução é:

$$\text{delta: } \frac{A^2 - 4\omega^2}{2}.$$

Para delta < 0:

$$z(t) = C_1 e^{-\frac{A}{2}t} \cos\left(\sqrt{\frac{A^2 - 4\omega^2}{2}}t\right) + C_2 e^{-\frac{A}{2}t} \sin\left(\sqrt{\frac{A^2 - 4\omega^2}{2}}t\right) \quad (4.65)$$

Onde:

$$C_1 = z_0 \quad (4.66)$$

$$C_2 = \left(\dot{z}_0 + \frac{A}{2} z_0 \right) \frac{\sqrt{A^2 - 4\omega^2}}{A^2 - 4\omega^2} \quad (4.67)$$

delta > 0:

$$z(t) = e^{-\frac{A}{2}t} \left[C_1 e^{\sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - \omega^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - \omega^2} t} \right] \quad (4.68)$$

$$C_1 = z_0 - \left\{ -\frac{\dot{z}_0}{2} - \frac{A}{4} z_0 + \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - \omega^2} z_0 \right\} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - \omega^2}} \quad (4.69)$$

$$C_2 = \left\{ -\frac{\dot{z}_0}{2} - \frac{A}{4} z_0 + \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - \omega^2} z_0 \right\} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - \omega^2}} \quad (4.70)$$

delta = 0:

$$z(t) = e^{-\frac{A}{2}t} \left[C_1 e^{\sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - \omega^2} t} + C_2 t e^{-\sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - \omega^2} t} \right] \quad (4.71)$$

$$C_1 = z_0 \quad (4.72)$$

$$C_2 = \left\{ \dot{z}_0 + \frac{A}{2} z_0 - z_0 \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - \omega^2} \right\} \quad (4.73)$$

4.1 Dinâmica Relativa Sujeita às Forças gravitacional, de Arrasto Atmosférico e Força de Propulsão Química

Esta Seção aborda a dinâmica relativa com as forças: gravitacional, arrasto atmosférico e força de propulsão química- modelo variação exponencial de massa. Seguindo a Seção 3.3 e a Seção anterior, tomemos o sistema de equações, utilizando também a expansão do \ln (3.38), resultando nas equações:

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} + A\dot{x} - Cy = \gamma v_{ex} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot e^{-n\gamma t}}{\chi^n} \quad (4.74)$$

$$\ddot{y} - 2\omega\dot{x} + 2A\dot{y} + 2Cx - 3\omega^2 y = -RC + \gamma v_{ey} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot e^{-n\gamma t}}{n \chi^n} \quad (4.75)$$

$$\ddot{z} + A \dot{z} + w^2 z = \gamma v_{ez} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot e^{-n\gamma t}}{n \chi^n} \quad (4.76)$$

Este conjunto de equações assemelha-se com as equações anteriores, diferenciando apenas a parte de propulsão. Assim, já conhecemos parcialmente esta solução, ou seja, a parte homogênea. Então, iremos em busca da parte não-homogênea. Como o sistema é acoplado, faremos o mesmo procedimento da Seção anterior. Por (4.40), (4.50) e (4.64), adicionado ao sistema de propulsão encontramos as componentes, em x :

$$\ddot{x} + D \dot{x} - 2Cx = -\lambda^2 + \gamma v_{ex} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot e^{-n\gamma t}}{\chi^n} \quad (4.77)$$

Do mesmo modo que as resoluções anteriores, encontramos a solução homogênea e então supomos uma solução particular, para encontrarmos a não homogênea, do tipo:

$$x_p = B + C'e^{-n\gamma t} \quad (4.78)$$

E fazendo as devidas derivadas e substituições chegamos a solução geral, lembrando que novamente consideramos os três casos para o delta:

delta: $\left(\frac{D}{2}\right)^2 + 2C$.

Para delta < 0:

$$x(t) = e^{-\frac{Dt}{2}} \left[C_1 \cos \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + 2C} t + C_2 \sin \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + 2C} t \right] + \frac{\lambda^2}{2C} + \gamma v_{ex} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\chi^n} e^{-n\gamma t} \frac{1}{n^2\gamma^2 - Dn\gamma - 2C} \quad (4.79)$$

$$C_1 = x_0 - \frac{\lambda^2}{2C} + \gamma v_{ex} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\chi^n} \frac{1}{n^2\gamma^2 - Dn\gamma - 2C} \quad (4.80)$$

$$C_2 = \left\{ x_0 + \frac{D}{2} C_1 + \gamma^2 v_{ex} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\chi^n} \frac{n}{n^2\gamma^2 - Dn\gamma - 2C} \right\} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + 2C}} \quad (4.81)$$

Para delta > 0:

$$x(t) = C_1 e^{a_1 t} + C_2 e^{a_2 t} + \frac{\lambda^2}{2C} + \gamma v_{ex} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot e^{-n\gamma t}}{\chi^n} \frac{1}{n^2\gamma^2 - Dn\gamma - 2C} \quad (4.82)$$

Onde:

$$a_1 = \frac{-D + \sqrt{D^2 - 8C}}{2} \quad (4.83)$$

$$a_2 = \frac{-D - \sqrt{D^2 - 8C}}{2} \quad (4.84)$$

$$C_1 = x_0 - \left\{ -\frac{\dot{x}_0}{2} - \frac{D}{4} \left(x_0 - \frac{\lambda^2}{2C} \right) + \frac{\sqrt{D^2 - 8C}}{2} - \gamma v \text{ex} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\chi^n} \frac{1}{n^2 \gamma^2 - Dn\gamma - 2C} \left(-\frac{D}{4} + \frac{\sqrt{D^2 - 8C}}{2} \right) + \frac{\sqrt{D^2 - 8C}}{2} \left(x_0 - \frac{\lambda^2}{2C} \right) - \frac{\gamma^2}{2} v \text{ex} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\chi^n} \frac{n}{n^2 \gamma^2 - Dn\gamma - 2C} \right\} \frac{\sqrt{D^2 - 8C}}{D^2 - 8C} - \gamma v \text{ex} \ln \left(1 + \frac{1}{\chi} \right) \frac{1}{n^2 \gamma - Kn\gamma + K'} \quad (4.85)$$

$$C_2 = \left\{ -\frac{\dot{x}_0}{2} - \frac{D}{4} \left(x_0 - \frac{\lambda^2}{2C} \right) - \gamma v \text{ex} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\chi^n} \frac{1}{n^2 \gamma^2 - Dn\gamma - 2C} \left(-\frac{D}{4} + \frac{\sqrt{D^2 - 8C}}{2} \right) + \frac{\sqrt{D^2 - 8C}}{2} \left(x_0 - \frac{\lambda^2}{2C} \right) - \frac{\gamma^2}{2} v \text{ex} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\chi^n} \frac{n}{n^2 \gamma^2 - Dn\gamma - 2C} \right\} \frac{\sqrt{D^2 - 8C}}{D^2 - 8C} \quad (4.86)$$

Para delta = 0:

$$x(t) = e^{-\frac{Dt}{2}} C_1 e^{\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + 2C} t} + e^{-\frac{Dt}{2}} t C_2 e^{-\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + 2C} t} + \frac{\lambda^2}{2C} + \gamma v \text{ex} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\chi^n} e^{-n\gamma t} \frac{1}{n^2 \gamma^2 - Dn\gamma - 2C} \quad (4.87)$$

$$C_1 = x_0 - \frac{\lambda^2}{2C} + \gamma v \text{ex} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\chi^n} \frac{1}{n^2 \gamma^2 - Dn\gamma - 2C} \quad (4.88)$$

$$C_2 = x_0 - \left[x_0 - \frac{\lambda^2}{2C} + \gamma v \text{ex} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\chi^n} \frac{1}{n^2 \gamma^2 - Dn\gamma - 2C} \right] \left[-\frac{D}{2} + \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + 2C} \right] + \gamma^2 n v \text{ex} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\chi^n} \frac{1}{n^2 \gamma^2 - Dn\gamma - 2C} \quad (4.89)$$

Em y, adicionado o sistema de propulsão:

$$\ddot{y} + M\dot{y} + Fy = G + \gamma v_{ey} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot e^{-n\gamma t}}{\chi^n} \quad (4.90)$$

Encontramos a solução homogênea de e em seguida encontramos a solução não-homogênea, para isto, supomos uma solução particular da forma:

$$y_p = T + E e^{-\gamma t} \quad (4.91)$$

E fazendo as devidas derivadas e substituições chegamos a solução geral:

$$\text{delta: } \left(\frac{M}{2}\right)^2 - F.$$

Para delta < 0:

$$y(t) = e^{-\frac{M}{2}t} C_1 \cos \sqrt{\left(\frac{M}{2}\right)^2 - F} t + e^{-\frac{M}{2}t} C_2 \sin \sqrt{\left(\frac{M}{2}\right)^2 - F} t + \frac{G}{F} \quad (4.92)$$

$$+ \gamma vey \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\chi^n} \frac{1}{n^2 \gamma^2 - n \gamma M + F} e^{-\gamma t}$$

$$C_1 = y_0 - \frac{G}{F} - \gamma vex \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\chi^n} \frac{1}{n^2 \gamma^2 - n \gamma M + F} \quad (4.93)$$

$$C_2 = y_0 + \frac{\dot{M}}{2} C_1 + \gamma^2 vey \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\chi^n} \frac{n}{n^2 \gamma^2 - n \gamma M + F} e^{-\gamma t} \quad (4.94)$$

Para delta = 0:

$$y(t) = e^{-\frac{M}{2}t} \left[C_1 e^{\sqrt{\left(\frac{M}{2}\right)^2 - F} t} + t C_2 e^{-\sqrt{\left(\frac{M}{2}\right)^2 - F} t} \right] + \frac{G}{F} \quad (4.95)$$

$$+ \gamma vey \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\chi^n} \frac{1}{n^2 \gamma^2 - n \gamma M + F} e^{-\gamma t}$$

$$C_1 = y_0 - \frac{G}{F} - \gamma vey \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\chi^n} \frac{1}{n^2 \gamma^2 - n \gamma M + F} \quad (4.96)$$

$$C_2 = \left[y_0 - \frac{G}{F} - \gamma vey \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\chi^n} \frac{1}{n^2 \gamma^2 - n \gamma M + F} \right] \left[-\frac{M}{2} + \sqrt{\left(\frac{M}{2}\right)^2 - F} \right] \quad (4.97)$$

$$+ \gamma^2 vey \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\chi^n} \frac{n}{n^2 \gamma^2 - n \gamma M + F}$$

Para delta < 0:

$$y(t) = C_1 e^{b_1 t} + C_2 e^{b_2 t} + \gamma vey \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot e^{-\gamma t}}{\chi^n} \frac{1}{n^2 \gamma^2 - M n \gamma + F} + \frac{G}{F} \quad (4.98)$$

$$b_1 = \left(\frac{-M + \sqrt{M^2 - 4F}}{2} \right) \quad (4.99)$$

$$b_2 = \left(\frac{-M - \sqrt{M^2 - 4F}}{2} \right) \quad (4.100)$$

Onde:

$$C_1 = y_0 + \left\{ \dot{y}_0 + y_0 \left(\frac{-k - \sqrt{k^2 - 4D}}{2} \right) - \gamma v_{ey} \ln \left(1 + \frac{1}{\chi} \right) \frac{1}{n^2 \gamma - K n \gamma + K'} \left[\left(\frac{-k - \sqrt{k^2 - 4D}}{2} \right) + n \gamma \right] - \frac{M}{D} \left(\frac{-k - \sqrt{k^2 - 4D}}{2} \right) \right\} \frac{\sqrt{k^2 - 4D}}{k^2 - 4D} - \gamma v_{ey} \ln \left(1 + \frac{1}{\chi} \right) \frac{1}{n^2 \gamma - K n \gamma + K'} + \frac{M}{D} \quad (4.101)$$

$$C_2 = \left\{ -\dot{y}_0 - y_0 \left(\frac{-k - \sqrt{k^2 - 4D}}{2} \right) + \gamma v_{ey} \ln \left(1 + \frac{1}{\chi} \right) \frac{1}{n^2 \gamma - K n \gamma + K'} \left[\left(\frac{-k - \sqrt{k^2 - 4D}}{2} \right) + n \gamma \right] + \frac{M}{D} \left(\frac{-k - \sqrt{k^2 - 4D}}{2} \right) \right\} \frac{1}{\sqrt{k^2 - 4D}} \quad (4.102)$$

Do mesmo modo, já temos a solução homogênea vamos em busca da solução não-homogênea, assim, supomos uma solução particular, do tipo:

$$z_p = N e^{-n \gamma t} \quad (4.103)$$

E fazendo as devidas derivadas e substituições chegamos a solução geral:

$$\text{delta: } \frac{A^2 - 4\omega^2}{2}.$$

Para delta < 0:

$$z(t) = e^{\frac{-A}{2}t} [C_1 \cos \phi t + C_2 \sin \phi t] + \gamma v_{ez} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} e^{-n \gamma t}}{n \chi^n} \frac{1}{n^2 \gamma^2 - A n \gamma + \omega^2} \quad (4.104)$$

$$\phi = \sqrt{\frac{A^2 - 4\omega^2}{2}} \quad (4.105)$$

$$C_1 = z_0 - \gamma v_{ez} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \chi^n} \frac{1}{n^2 \gamma^2 - A n \gamma + \omega^2} \quad (4.106)$$

$$C_2 = \left[2\dot{z}_0 + \gamma v_{ez} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \chi^n} \frac{1}{n^2 \gamma^2 - A n \gamma + \omega^2} (A + 2n \gamma) + \dot{z}_0 A \right] + \frac{1}{\sqrt{A^2 - 4\omega^2}} \quad (4.107)$$

Para delta = 0:

$$z(t) = e^{-\frac{A}{2}t} \left[C_1 e^{\sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - \omega^2} t} + C_2 t e^{-\sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - \omega^2} t} \right] + \quad (4.108)$$

$$\gamma \text{ vez } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\chi^n} e^{-n\gamma t} \frac{1}{n^2\gamma^2 - An\gamma + \omega^2}$$

$$C_1 = z_0 - \gamma \text{ vez } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\chi^n} \frac{1}{n^2\gamma^2 - An\gamma + \omega^2} \quad (4.109)$$

$$C_2 = \left\{ z_0 - \left(z_0 - \gamma \text{ vez } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\chi^n} \frac{1}{n^2\gamma^2 - An\gamma + \omega^2} \right) \left(-\frac{A}{2} + \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - \omega^2} \right) + \right. \quad (4.110)$$

$$\left. \gamma^2 \text{ vez } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\chi^n} \right\} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - \omega^2}}$$

Para delta < 0:

$$z(t) = e^{-\frac{A}{2}t} \left[C_1 e^{\sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - \omega^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - \omega^2} t} \right] + \quad (4.111)$$

$$\gamma \text{ vez } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\chi^n} e^{-n\gamma t} \frac{1}{n^2\gamma^2 - An\gamma + \omega^2}$$

$$C_1 = z_0 - C_2 - \gamma \text{ vez } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\chi^n} \frac{1}{n^2\gamma^2 - An\gamma + \omega^2} \quad (4.112)$$

$$C_2 = \left\{ -\frac{z_0}{2} + \left(z_0 - \gamma \text{ vez } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\chi^n} \frac{1}{n^2\gamma^2 - An\gamma + \omega^2} \right) \left(-\frac{A}{4} + \frac{\sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - \omega^2}}{2} \right) - \right. \quad (4.113)$$

$$\left. \frac{\gamma^2}{2} \text{ vez } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\chi^n} \frac{n}{n^2\gamma^2 - An\gamma + \omega^2} \right\} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - \omega^2}}$$

4.2 Dinâmica Relativa Sujeita às Forças gravitacional e de Propulsão Química (Modelo Linear de Massa)

Com respeito ao propulsor, a ejeção dos gases pode ser de tal maneira que a massa do combustível reduz-se de forma linear ou exponencial no tempo

No primeiro modelo, sessão anterior, consideramos a massa do combustível decrescendo exponencialmente no tempo. Agora apresentaremos a solução para o modelo em que a massa decresce linearmente no tempo, ou seja,

$$M(t) = M_0(\chi + 1) + \dot{m}t \quad \therefore \dot{m} < 0 \quad (4.114)$$

Resolvendo as mesmas equações (3.14), (3.15) e (3.16) para a massa do satélite variando linearmente no tempo, conforme as equações:

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - 3\omega^2 x = \frac{-\dot{m}vex}{M_0 + \dot{m}t} \quad (4.115)$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} = \frac{-\dot{m}vex}{M_0 + \dot{m}t} \quad (4.116)$$

$$\ddot{z} + \omega^2 z = \frac{-\dot{m}vex}{M_0 + \dot{m}t} \quad (4.117)$$

O método de resolução das Equações (4.115), (4.116) e (4.117) é o mesmo da sessão anterior, variação de parâmetro. Apresentaremos apenas suas as soluções:

A solução homogênea de $x(t)$:

$$x(t) = C_1 \text{sen } \omega t + C_2 \text{cos } \omega t \quad (4.118)$$

Impomos uma solução particular e encontramos a solução não homogênea. Assim encontramos a solução para a componente $x(t)$:

$$\begin{aligned} x(t) = & \left(-6y_0 + \frac{4}{\omega}x_0\right) \text{sin}(\omega t) + 2B(1 - \text{cos } \omega t) + 4 \text{vex} \left[\frac{(M_0 + \dot{m}t)}{\dot{m}} \ln(M_0 + \right. & (4.119) \\ & \left. \dot{m}t) - \frac{(M_0 + \dot{m}t)}{\dot{m}} + \frac{M_0}{\dot{m}} \right] + 4 \text{vex} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3k}}{2k(2k)!} \left(\frac{\omega}{\dot{m}}\right)^{2k} \left[\frac{M_0^{2k}}{\omega} \left(\text{sin} \frac{\omega}{\dot{m}}(M_0 + \dot{m}t) - \right. \right. \\ & \left. \left. \text{sin} \frac{M_0\omega}{\dot{m}}\right) \right] - \frac{\dot{m}^{2k}}{\omega^{2k+1}} (2k)! \left\{ \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n}{(2k-2n)!} \left(\frac{\omega}{\dot{m}}\right)^{2k-2n} \left[(M_0 + \dot{m}t)^{2k-2n} \text{sin} \frac{\omega}{\dot{m}}(M_0 + \right. \right. \\ & \left. \left. \dot{m}t) - M_0^{2k-2n} \text{sin} \left(\frac{M_0\omega}{\dot{m}}\right) \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-2n-1)!} \left(\frac{\omega}{\dot{m}}\right)^{2k-2n-1} \left[(M_0 + \right. \right. \\ & \left. \left. \dot{m}t)^{2k-2n-1} \text{cos} \frac{\omega}{\dot{m}}(M_0 + \dot{m}t) - M_0^{2k-2n-1} \text{cos} \left(\frac{M_0\omega}{\dot{m}}\right) \right] \right\} \right\} + \\ & \frac{1}{\omega} \ln \left(\frac{M_0}{M_0 + \dot{m}t}\right) \text{sin} \frac{\omega}{\dot{m}}(M_0 + \dot{m}t) + \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)(2k-1)!} \left[\left(\frac{\omega}{\dot{m}}(M_0 + \dot{m}t)\right)^{2k-1} - \right. \\ & \left. \left(\frac{M_0\omega}{\dot{m}}\right)^{2k-1} \right] - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3k}}{(2k-1)(2k-1)!} \left(\frac{\omega}{\dot{m}}\right)^{2k-1} \left\{ \frac{M_0^{2k-1}}{\omega} \left[-\text{cos} \frac{\omega}{\dot{m}}(M_0 + \dot{m}t) + \right. \right. \\ & \left. \left. \text{cos} \left(\frac{M_0\omega}{\dot{m}}\right) \right] - \frac{(M_0 + \dot{m}t)^{2k}}{2k\dot{m}} \text{sin} \frac{\omega}{\dot{m}}(M_0 + \dot{m}t) + \frac{M_0^{2k}}{2k\dot{m}} \text{sin} \left(\frac{M_0\omega}{\dot{m}}\right) + \right. \\ & \left. \frac{\dot{m}^{2k-1}}{(2k\omega)^{2k}} (2k)! \left\{ \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n}{(2k-2n)!} \left(\frac{\omega}{\dot{m}}\right)^{2k-2n} \left[(M_0 + \dot{m}t)^{2k-2n} \text{sin} \frac{\omega}{\dot{m}}(M_0 + \dot{m}t) - \right. \right. \\ & \left. \left. M_0^{2k-2n-1} \text{sin} \left(\frac{M_0\omega}{\dot{m}}\right) \right] + \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n}{(2k-n-1)!} \omega^{2k-2n-1} \left[(M_0 + \right. \right. \\ & \left. \left. \dot{m}t)^{2k-2n-1} \text{cos} \left(\frac{\omega}{\dot{m}}(M_0 + \dot{m}t)\right) - M_0^{2k-2n-1} \text{cos} \left(\frac{M_0\omega}{\dot{m}}\right) \right] \right\} \right\} + \\ & \frac{\text{vey}}{\omega} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3k}}{(2k-1)(2k-1)!} \left(\frac{\omega}{\dot{m}}\right)^{2k-1} \left\{ \frac{M_0^{2k-1}}{\omega} \left[\text{sin} \frac{\omega}{\dot{m}}(M_0 + \dot{m}t) - \text{sin} \left(\frac{M_0\omega}{\dot{m}}\right) \right] - \right. \\ & \left. \frac{(M_0 + \dot{m}t)^{2k}}{2k\dot{m}} \text{cos} \frac{\omega}{\dot{m}}(M_0 + \dot{m}t) + \frac{M_0^{2k}}{2k\dot{m}} \text{cos} \frac{M_0\omega}{2k\omega^{2k}} (2k)! \left\{ \sum_{k=0}^k \frac{(-1)^{n+1}}{(2k-2n)!} \omega^{2k-2n} \left[(M_0 + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \dot{m}t)^{2k-2n} \cos \frac{\omega}{\dot{m}} (M_0 + \dot{m}t) - M_0^{2k-2n} \cos \left(\frac{M_0 \omega}{\dot{m}} \right) \Big] + \\
 & \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n}{(2k-2n-1)!} \omega^{2k-2n-1} \left[(M_0 + \dot{m}t)^{2k-2n} \sin \frac{\omega}{\dot{m}} (M_0 + \dot{m}t) - \right. \\
 & \left. M_0^{2k-2n} \sin \left(\frac{M_0 \omega}{\dot{m}} \right) \right] \Big\} - \sum_{k=0}^k \frac{(-1)^{3k}}{2k(2k)!} \left(\frac{\omega}{\dot{m}} \right)^{2k} \left\{ \frac{M_0^{2k}}{\omega} \left[\cos \left(\frac{M_0 \omega}{\dot{m}} \right) - \cos \frac{\omega}{\dot{m}} (M_0 + \right. \right. \\
 & \left. \left. \dot{m}t) \right] - \left(\frac{\dot{m}^{2k}}{\omega^{2k-1}} \right) (2k)! \left\{ \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^{n+1}}{(2k-2n)!} \left(\frac{\omega}{\dot{m}} \right)^{2k-2n} \left[(M_0 + \dot{m}t)^{2k-2n} \cos \frac{\omega}{\dot{m}} (M_0 + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \dot{m}t) - M_0^{2k-2n} \cos \left(\frac{M_0 \omega}{\dot{m}} \right) \right] + \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n}{(2k-2n)!} \left(\frac{\omega}{\dot{m}} \right)^{2k-2n-1} \left[(M_0 + \right. \right. \\
 & \left. \left. \dot{m}t)^{2k-2n-1} \sin \frac{\omega}{\dot{m}} (M_0 + \dot{m}t) - M_0^{2k-2n-1} \sin \left(\frac{M_0 \omega}{\dot{m}} \right) \right] \right\} \Big\} + \\
 & \frac{1}{\omega} \left[\cos(M_0 + \dot{m}t) \ln \left(\frac{M_0}{M_0 + \dot{m}t} \right) \right] + \frac{1}{\omega} \left[\ln \left(\frac{M_0 + \dot{m}t}{M_0} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k(2k)!} \left(\frac{\omega}{\dot{m}} \right)^{2k} \left[(M_0 + \right. \right. \\
 & \left. \left. \dot{m}t)^{2k} - M_0^{2k} \right] \right] - 2D\omega t - 4 \frac{vex}{\dot{m}} \left[(M_0 + \dot{m}t) \ln(M_0 + \dot{m}t) - (M_0 + \dot{m}t) - \right. \\
 & \left. M_0 \ln(M_0) + M_0 \right] + Ct
 \end{aligned}$$

Para a componentey(t), temos:

$$y(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{2vex}{\omega} \left\{ \ln(M_0 + \dot{m}t) - \ln(M_0) \cos \omega t + \right. \quad (4.120)$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \cos \frac{\omega}{\dot{m}} (M_0 + \dot{m}t) \left[\ln \left(\frac{M_0}{M_0 + \dot{m}t} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3k}}{2k(2k)!} \left(\frac{\omega}{\dot{m}} \right)^{2k} \left[M_0^{2k} - (M_0 + \dot{m}t)^{2k} \right] \right] - \right. \\
 & \left. \sin \frac{\omega}{\dot{m}} (M_0 + \dot{m}t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3k}}{(2k-1)(2k-1)!} \omega^{2k-1} \left[M_0^{2k-1} - (M_0 + \dot{m}t)^{2k-1} \right] \right\} + \\
 & \frac{vey}{\omega} \left\{ \cos \frac{\omega}{\dot{m}} (M_0 + \dot{m}t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3k}}{(2k-1)(2k-1)!} \left(\frac{\omega}{\dot{m}} \right)^{2k-1} \left[M_0^{2k-1} - (M_0 + \dot{m}t)^{2k-1} \right] + \right. \\
 & \left. \sin \frac{\omega}{\dot{m}} (M_0 + \dot{m}t) \left[\ln \left(\frac{M_0}{M_0 + \dot{m}t} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3k}}{2k(2k)!} \left(\frac{\omega}{\dot{m}} \right)^{2k} \left[M_0^{2k} - (M_0 + \dot{m}t)^{2k} \right] \right] \right\} + \\
 & \frac{2C}{\omega} (-1 + \cos \omega t)
 \end{aligned}$$

$$A = y_0 \quad (4.121)$$

$$B = \frac{\dot{y}_0}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3k}}{2k!} \left(\frac{\omega}{\dot{m}} \right)^{2k-1} M_0^{2k-1} \left(\cos \left(\frac{M_0 \omega}{\dot{m}} \right) 2 vex + \right. \quad (4.122)$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \sin \left(\frac{M_0 \omega}{\dot{m}} \right) vey \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3k}}{(2k-1)!} \omega^{2k-1} \left(\frac{M_0}{\dot{m}} \right)^{2k-2} \left(\frac{2vex}{\omega} \sin \left(\frac{M_0 \omega}{\dot{m}} \right) - \right. \\
 & \left. \frac{vey}{\omega} \cos \left(\frac{M_0 \omega}{\dot{m}} \right) \right) \Big\} - \frac{\dot{m}}{\omega^2 M_0} \left[2vex - 2vex \cos \left(\frac{M_0 \omega}{\dot{m}} \right) - vey \sin \left(\frac{M_0 \omega}{\dot{m}} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$C = \dot{x}_0 - 2\omega y_0 + vex \ln(M_0) \quad (4.123)$$

$$D = -\frac{2\dot{x}_0}{\omega} + 4y_0 - \frac{2vex}{\omega} \ln(M_0) \quad (4.124)$$

Para a componente $z(t)$, temos:

$$Z(t) = E \cos \omega t + F \sin \omega t + \frac{vez}{\omega} \left\{ \cos \frac{\omega(M_0 + \dot{m}t)}{\dot{m}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)(2k-1)!} \left[\left(\frac{\omega}{\dot{m}} (M_0 + \dot{m}t) \right)^{2k-1} - \left(\frac{M_0 \omega}{\dot{m}} \right)^{2k-1} \right] + \sin \frac{\omega}{\dot{m}} (M_0 + \dot{m}t) \left[\ln \left(\frac{M_0 + \dot{m}t}{M_0} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k(2k)!} \left[\left(\frac{\omega}{\dot{m}} (M_0 + \dot{m}t) \right)^{2k} - \left(\frac{M_0 \omega}{\dot{m}} \right)^{2k} \right] \right] \right\} \quad (4.125)$$

$$F = \frac{\dot{z}_0}{\omega} - \frac{vez}{\omega^2} \left\{ \cos \left(\frac{M_0 \omega}{\dot{m}} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!} \left(\frac{M_0 \omega}{\dot{m}} \right)^{2k-2} \omega + \sin \left(\frac{M_0 \omega}{\dot{m}} \right) \left[\frac{\dot{m}}{M_0 + \dot{m}t} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(\frac{M_0 \omega}{\dot{m}} \right)^{2k-1} \omega \right] \right\} \quad (4.126)$$

$$E = z_0 \quad (4.127)$$

Ao resolvermos as integrais que compõem estas soluções, encontramos soluções em séries com termos escritos em forma de somatórios (Gradshteyn e Ryzhik (2007)). Isto é:

$$S_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)} \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^{i+1} (M_0 + \dot{m}t)^{2k-2i} \omega^{2k-2i}}{(2k-2i)! \dot{m}^{2k-2i}} \quad (4.128)$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1k)} \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^{i+1} (M_0 + \dot{m}t)^{2k-2i} \omega^{2k-2i}}{(2k-2i)! \dot{m}^{2k-2i}} \quad (4.129)$$

Estes somatórios duplos que aparecem tornam a solução extensa, e um código para a simulação numérica com vários laços de repetição. Assim, segundo (Pinheiro, 2016) podemos simplificar a Equação para $x(t)$, utilizando,

$$\int \theta^{2k} \sin \theta \, d\theta = (2n)! \left\{ \cos \theta \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^{i+1} \theta^{2k-2i}}{(2k-2i)!} + \sin \theta \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i \theta^{2k-2-1}}{(2k-2i-1)!} \right\} \quad (4.130)$$

$$\int \theta^{2k} \cos \theta \, d\theta = (2n)! \left\{ \sin \theta \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^{i+1} \theta^{2k-2i}}{(2k-2i)!} + \cos \theta \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i \theta^{2k-2-1}}{(2k-2i-1)!} \right\} \quad (4.131)$$

Assim, pelas integrais temos:

$$\int \cos \frac{\omega}{\dot{m}} (M_0 + \dot{m}t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{3k} \omega^{2k} (M_0 + \dot{m}t)^{2k}}{(2k)(2k)! m^{2k}} dt \quad (4.132)$$

$$\int \cos \frac{\omega}{\dot{m}} (M_0 + \dot{m}t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{3k} \omega^{2k-1} (M_0 + \dot{m}t)^{2k-1}}{(2k-1)(2k-1)! m^{2k-1}} dt \quad (4.133)$$

$$\int \sin \frac{\omega}{\dot{m}} (M_0 + \dot{m}t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{3k} \omega^{2k-1} (M_0 + \dot{m}t)^{2k-1}}{(2k-1)(2k-1)! m^{2k-1}} dt \quad (4.134)$$

$$\int \sin \frac{\omega}{\dot{m}} (M_0 + \dot{m}t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{3k} \omega^{2k} (M_0 + \dot{m}t)^{2k}}{(2k)(2k)! m^{2k}} dt \quad (4.135)$$

Fazendo as seguintes substituições:

$$\theta = \frac{\omega}{\dot{m}} (M_0 + \dot{m}t) \quad (4.136)$$

$$\theta_0 = \frac{M_0 \omega}{\dot{m}}, \text{ quando } t = 0 \quad (4.137)$$

$$\theta_1 = \frac{\omega}{\dot{m}} (M_0 + \dot{m}t), \text{ quando } t = t \quad (4.138)$$

Resolvendo as integrais por partes e destacando a segunda parte dessas soluções, temos:

$$\int \cos \theta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3k} \theta^{2k-1}}{2k!} d\theta \quad (4.139)$$

$$\int \sin \theta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3k} \theta^{2k-1}}{2k!} d\theta \quad (4.140)$$

$$\int \sin \theta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3k} \theta^{2k-2}}{(2k-1)!} d\theta \quad (4.141)$$

$$\int \cos \theta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3k} \theta^{2k-2}}{(2k-1)!} d\theta \quad (4.142)$$

Para eliminar as séries das integrais, primeiro faremos:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3k} \theta^{2k}}{(2k)!} = -\frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} - \dots \quad (4.143)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3k} \theta^{2k-1}}{(2k-1)!} = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \frac{\theta^9}{9!} - \dots \quad (4.144)$$

e,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3k} \theta^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} - \dots = \cos \theta - 1 \quad (4.145)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3k} \theta^{2k-1}}{(2k-1)!} = -\theta + \frac{\theta^3}{3!} - \frac{\theta^5}{5!} + \frac{\theta^7}{7!} - \frac{\theta^9}{9!} + \dots = \sin \theta \quad (4.146)$$

Então concluímos que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3k} \theta^{2k}}{(2k)!} = \cos \theta - 1 \quad (4.147)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3k} \theta^{2k-1}}{(2k-1)!} = \sin \theta \quad (4.148)$$

Assim,

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\cos \theta}{\theta} (\cos \theta - 1) d\theta \quad (4.149)$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\cos \theta \sin \theta}{\theta} d\theta \quad (4.150)$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\sin \theta \sin \theta}{\theta} d\theta \quad (4.151)$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\sin \theta}{\theta} (\cos \theta - 1) d\theta \quad (4.152)$$

A partir das soluções dessas integrais (4.149), (4.150), (4.151), (4.152), substituindo seus respectivos resultados, obedecendo os procedimentos, acontecem algumas simplificações. E assim, é possível encontrarmos uma outra solução para $x(t)$.

$$\begin{aligned} x(t) = & \left(\frac{4\dot{x}_0}{\omega} - 6y_0 \right) \sin \omega t + 2B(1 - \cos \omega t) - (3\dot{x}_0 - 6\omega y_0 + \\ & 3vex \ln(M_0))t + 3vex \left\{ \frac{M_0}{\dot{m}} \ln \left(\frac{M_0 + \dot{m}t}{M_0} \right) + (\ln(M_0 + \dot{m}t) - 1)t \right\} + \\ & \frac{4vex}{\omega} \left\{ \sin \theta_1 \left[\ln \left(\frac{M_0 + \dot{m}t}{M_0} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (\theta_0^{2k} - \theta_1^{2k})}{(2k)(2k)!} \right] - \right. \\ & \left. \cos \theta_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (\theta_0^{2k-1} - \theta_1^{2k-1})}{(2k-1)(2k-1)!} \right\} + \\ & \frac{2vex}{\omega} \left\{ \ln \left(\frac{M_0 + \dot{m}t}{M_0} \right) \cos \theta_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (\theta_0^{2k} - \theta_1^{2k})}{(2k)(2k)!} + \right. \end{aligned} \quad (4.153)$$

$$\sin \theta_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (\theta_0^{2k-1} - \theta_1^{2k-1})}{(2k-1)(2k-1)!}$$

O modelo de massa variável no tempo é mais realista do que o de massa constante. Na implementação computacional da manobra, esta aproximação será necessária, pois a massa variando no tempo, certamente interferirá, segundo as equações encontradas, na posição do veículo.

4.2 Dinâmica Relativa Sujeita às Forças gravitacional e de Propulsão Plasma (Modelo Exponencial de Massa)

Nesta Sessão resolvemos as equações que modelam a dinâmica relativa entre os objetos espaciais (veículo e detrito), considerando a propulsão plasma e modelo exponencial de massa. A partir do sistema de equações de Clohessy-Wiltshire, adicionando a força de propulsão plasma, temos o sistema de equações,

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = \frac{d}{dt}(-v_{ex} t \ln(M(t))) \quad (4.154)$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 y = \frac{d}{dt}(-v_{ey} t \ln(M(t))) \quad (4.155)$$

$$\ddot{z} + \omega^2 z = \frac{d}{dt}(-v_{ez} t \ln(M(t))) \quad (4.156)$$

Onde,

$$M(t) = M_0 + m(t) \quad (4.157)]$$

- $M(t)$: Massa total do veículo, incluindo a massa do combustível;
- \vec{v}_e : Velocidade de Exaustão dos gases;
- M_0 : Massa do veículo sem combustível;
- $m(t)$: Massa do combustível do propulsor plasma.

E,

$$v_{ex} = \frac{-\sigma}{\delta B^2} B_z B_r^2 E \cos(\beta) t \quad (4.158)$$

$$v_{ey} = \frac{-\sigma}{\delta B^2} B_z B_r^2 E \sin(\beta) t \quad (4.159)$$

$$v_{ez} = \frac{\sigma}{\delta B^2} B_r^3 E t \tag{4.160}$$

Onde,

- σ : Condutividade.
- B_z : Campo Magnético (em coordenadas cilíndricas, na direção z).
- B_r : Campo Magnético (em coordenadas cilíndricas, na direção r).
- E : Campo Elétrico.
- B : Módulo do campo magnético (coordenadas cilíndricas).
- δ : Densidade volumétrica da corrente elétrica

O propulsor por efeito Hall, em um gás ionizado, baseia-se em campos elétrico e magnético cruzados, onde, a partir de uma corrente Hall, gere o plasma e a aceleração. Não será discutido neste trabalho as características físicas e detalhes deste sistema de propulsão, apenas apresentaremos de forma breve o esquema de funcionamento do propulsor a plasma, Figura 4, onde: C indica o circuito de injeção de propelente, J o catodo-ôco, que produz o plasma no seu interior e deste extrai uma feixe de elétrons, os quais produziram (por impacto eletrônico) o plasma no interior da fonte, o anodo, com potencial +V, o qual atrai os elétrons, E campo elétrico gerado pelo anodo, B campo magnético com simetria radial (predominantemente) e um gradiente, sendo mais intenso no fim do canal da fonte, de modo a melhorar a aceleração e colimar o feixe de plasma, corrente Hall produzida pela ortogonalidade entre os campos E e B. Ela produz a aceleração e corrente de plasma acelerado.

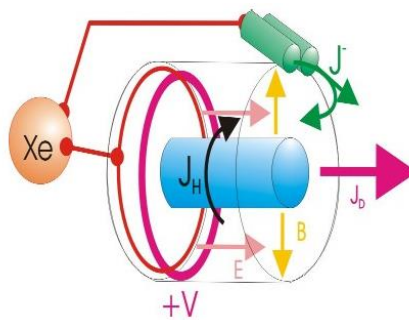


Figura 4: Esquema de funcionamento do propulsor por efeito Hall

Neste caso, E e B são campos constantes no tempo, mas estão em coordenadas cilíndricas ($B_r \hat{r}, B_\beta \hat{\beta}, B_z \hat{k}$), obedecendo a representação abaixo:

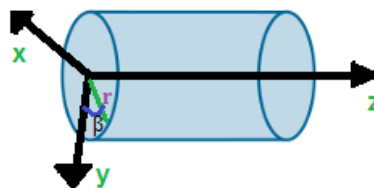


Figura 5: Representação da coordenada cilíndrica

Para resolver as Equações (4.154), (4.155) e (4.156) utilizamos o método de variação de parâmetro, e assim encontramos as soluções para cada uma das componentes:

Para $x(t)$, encontramos:

$$\begin{aligned}
 x(t) = & 2C_1(\cos \omega t - 1) - 2C_2 \sin \omega t - 2\omega \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} K_y}{n\chi^n} \frac{1}{n\gamma} (e^{-n\gamma t} - 1) - \\
 & 2\omega \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\omega^2 \chi^n} K_y \gamma (\cos \omega t - 1) + \left[4\omega K_x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n} - \right. \\
 & 2\omega K_y \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\omega \chi^n} \left. \right] \frac{\omega}{n^2 \gamma^2 + \omega^2} \left[\frac{-t}{n\gamma} e^{-n\gamma t} - \frac{1}{n^2 \gamma^2} e^{-n\gamma t} \right] - \left[4\omega K_x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n} - \right. \\
 & 2\omega K_y \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\omega \chi^n} \left. \right] \left[\frac{\omega}{n^2 \gamma^2 + \omega^2} \left(\frac{-1}{n^2 \gamma^2} \right) - \frac{2\omega}{(n^2 \gamma^2 + \omega^2)^2} e^{-n\gamma t} + \frac{2\omega}{(n^2 \gamma^2 + \omega^2)^2} \right] - \\
 & 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n} \frac{K_y}{n^2 \gamma^2 + \omega^2} \sin \omega t + \left[4\omega K_x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n} - \right. \\
 & 2\omega K_y \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\omega \chi^n} \left. \right] \left[\left(\frac{-n^2 \gamma^2 + \omega^2}{(n^2 \gamma^2 + \omega^2)^2} \right) \frac{1}{\omega} \cos \omega t - \left(\frac{-n^2 \gamma^2 + \omega^2}{(n^2 \gamma^2 + \omega^2)^2 \omega} \right) \right] - \\
 & \left[4\omega K_x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n} - 2\omega K_y \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\omega \chi^n} \right] \frac{2n\gamma\omega}{(n^2 \gamma^2 + \omega^2)^2} \frac{1}{\omega} \sin \omega t + \frac{4C}{\omega} \sin \omega t + \\
 & 3Ct - K_x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n} \left[\frac{-t}{n\gamma} e^{-n\gamma t} - \frac{1}{n^2 \gamma^2} e^{-n\gamma t} + \frac{1}{n^2 \gamma^2} \right] + x_0
 \end{aligned} \tag{4.161}$$

Solução em $y(t)$:

$$\begin{aligned}
 y(t) = & C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t - K_y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n} e^{-n\gamma t} - \\
 & K_y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\omega \chi^n} \frac{\gamma}{n^2 \gamma^2 + \omega^2} \sin \omega t - \left[2K_x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n} - \right. \\
 & K_y \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\omega \chi^n} \left. \right] \frac{e^{-n\gamma t}}{n^2 \gamma^2 + \omega^2} \left(\omega t + \frac{2n\gamma\omega}{n^2 \gamma^2 + \omega^2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n} \frac{K_y}{n^2 \gamma^2 + \omega^2} \cos \omega t + \\
 & \left[2K_x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n} - K_y \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\omega \chi^n} \right] \left[\frac{(-n^2 \gamma^2 + \omega^2)}{(n^2 \gamma^2 + \omega^2)^2} \sin \omega t + \right. \\
 & \left. \frac{2n\gamma\omega}{(n^2 \gamma^2 + \omega^2)^2} \cos \omega t \right] - \frac{2C}{\omega} (\cos \omega t - 1)
 \end{aligned} \tag{4.162}$$

$$C_1 = \frac{y_0}{\omega} - \left[2K_x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n} - K_y \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\omega \chi^n} \right] \left[\frac{2n^2 \gamma^2}{(n^2 \gamma^2 + \omega^2)^2} - \frac{1}{n^2 \gamma^2 + \omega^2} + \frac{(-n^2 \gamma^2 + \omega^2)}{n^2 \gamma^2 + \omega^2} \right] \tag{4.163}$$

$$C_2 = y_0 \tag{4.164}$$

E por fim, encontramos a solução em $z(t)$:

$$z(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t - \quad (4.165)$$

$$K_z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n} \frac{e^{-n\gamma t}}{n^2\gamma^2 + \omega^2} + K_z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\omega\chi^n} \frac{\gamma e^{-n\gamma t}}{n^2\gamma^2 + \omega^2} \left(\omega t + \frac{2n\gamma\omega}{n^2\gamma^2 + \omega^2} \right) +$$

$$K_z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n} \frac{\cos \omega t}{n^2\gamma^2 + \omega^2} - K_z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\chi^n} \frac{2n\gamma^2 \cos \omega t}{(n^2\gamma^2 + \omega^2)^2} -$$

$$K_z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\omega\chi^n} \left[\frac{\gamma \sin \omega t}{n^2\gamma^2 + \omega^2} - \frac{\gamma(-n^2\gamma^2 + \omega^2)}{(n^2\gamma^2 + \omega^2)^2} \sin \omega t \right]$$

$$C_1 = z_0 \quad (4.166)$$

$$C_2 = \frac{\dot{z}_0}{\omega} + \frac{K_z}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\chi^n} \left[\frac{2\gamma^3 n^2}{(n^2\gamma^2 + \omega^2)^2} - \frac{\gamma}{(n^2\gamma^2 + \omega^2)} + \frac{\gamma(-n^2\gamma^2 + \omega^2)}{(n^2\gamma^2 + \omega^2)^2} \right] \quad (4.167)$$

Capítulo 5

Dinâmica Relativa Sujeito às Forças gravitacional e de Arrasto Atmosférico não constante - Solução Semi-analítica

O estudo da dinâmica de corpos sujeitos ao arrasto atmosférico não é simples do ponto de vista matemático, quando se procura uma solução analítica. Trata-se de uma dinâmica não linear (a de Kepler) e ainda piorada devido ao fato de não sabermos como a força de arrasto varia com a posição exatamente. Daí, as soluções encontradas serem numéricas para modelos estabelecidos que são ajustados a partir de medidas experimentais. Este processo é chamado de calibragem de parâmetros, que fornece uma solução particular e não geral do problema. Neste Capítulo pretendemos dar uma contribuição a este problema, buscando uma solução aproximada, ainda que semi-analítica, para o caso mais realista com a densidade atmosférica não constante.

As equações diferenciais desta dinâmica são dadas abaixo, que consideram apenas às forças gravitacional e arrasto atmosférico. Vejamos:

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = -\frac{1}{2}\frac{C_D A}{m}\rho(r)(\omega - \omega_E)[\dot{x} - y(\omega - \omega_E)] \quad (5.1)$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 y = -\frac{1}{2}\frac{C_D A}{m}\rho(r)(\omega - \omega_E)[2(\dot{y} + x(\omega - \omega_E)) + R(\omega - \omega_E)] \quad (5.2)$$

$$\ddot{z} + \omega^2 z = -\frac{1}{2}\frac{C_D A}{m}\rho(r)(\omega - \omega_E)\dot{z} \quad (5.3)$$

Considerando:

$$\beta = \frac{1}{2}\frac{C_D A}{m} \quad (5.4)$$

Sendo:

$$r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2} \quad (5.5)$$

$$r^3(t) = [x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2]^{\frac{3}{2}} \quad (5.6)$$

5.1 Considerações sobre a nossa solução

As soluções das equações diferenciais em (5.1) a (5.3) dariam as componentes do vetor posição no tempo, $r(t)$, e assim, saberíamos como o sistema formado pelo satélite, detrito e Terra se comporta sob o efeito do arrasto atmosférico. Saberíamos a posição relativa do satélite em relação ao detrito em cada instante e a previsibilidade e a segurança para as missões espaciais estariam asseguradas. Com o objetivo de encontrar uma solução semi-analítica para as componentes do vetor posição, $r(t)$, propomos as seguintes considerações:

I - SOBRE O EFEITO DO ARRASTO EM CADA DIREÇÃO - Admitimos que o efeito total do arrasto atmosférico devido a $r(t)$ pode ser aproximado pelo efeito em cada componente deste vetor separadamente, tal que o efeito das demais componentes seja desprezível. Isto equivaleria dizer que os efeitos do arrasto ocorreriam em cada direção isolada e unicamente. As soluções isoladas formariam uma solução final, como sendo uma composição ou combinação linear delas. Assim, nas equações faremos:

$$r^3(t) \sim x^3 \quad (5.7)$$

$$r^3(t) \sim y^3 \quad (5.8)$$

$$r^3(t) \sim z^3 \quad (5.9)$$

nas componentes de $r(t)$ nas equações diferenciais separadamente. Desta forma, podemos escrever a densidade,

$$\rho \sim \frac{K_1}{x^3} \sim \frac{K_2}{y^3} \sim \frac{K_3}{z^3} \quad (5.10)$$

$$K_1 = K_2 = K_3 = R_0^3 \rho_0 \quad (5.11)$$

Onde:

- R_0^3 : Distância do perigeu até o centro da Terra
- ρ_0 : Densidade atmosférica inicial

O modelo de densidade atmosférica não constante mais utilizado pelas agências espaciais varia inversamente com o inverso do cubo da posição.

As Equações (5.1) a (5.3) ficam:

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = -\frac{K'_1}{x^3}\alpha[\dot{x} - y\alpha] \quad (5.12)$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - 3\omega^2y = -\frac{K'_2}{y^3}\alpha[2(\dot{y} + x\alpha) + R\alpha] \quad (5.13)$$

$$\ddot{z} + \omega^2z = -\frac{K'_3}{z^3}\alpha\dot{z} \quad (5.14)$$

Depois de algum algebrismo e considerando-se apenas o sistema homogêneo, temos:

$$\ddot{x}x^3 + C\dot{x} - 2\omega y^3\dot{x} - 2xF = 0 \quad (5.15)$$

$$\ddot{y}y^3 - 3\omega^2y^4 + 2\dot{y}E + 2\omega x^3\dot{y} + Dy = 0 \quad (5.16)$$

$$\ddot{z}z^3 + \omega^2Z^4 + H\dot{z} = 0 \quad (5.17)$$

onde:

$$K'_1 = \beta K_1 \quad (5.18)$$

$$K'_2 = \beta K_2 \quad (5.19)$$

$$K'_3 = \beta K_3 \quad (5.20)$$

$$K'_1\alpha = C \quad (5.21)$$

$$K'_1\alpha^2 = D \quad (5.22)$$

$$K'_2\alpha = E \quad (5.23)$$

$$-K'_2\alpha R = G \quad (5.24)$$

$$K'_3\alpha = H \quad (5.25)$$

$$K'_2\alpha^2 = F \quad (5.26)$$

II - SOBRE A SOLUÇÃO ASSINTÓTICA - Vamos admitir que as componentes de $r(t)$ são o produto de duas funções (Equações (5.26), (5.27) e (5.76), a seguir) a serem determinadas e uma exponencial em t , mas que cresça com o passar do tempo. Isto garante que quando o tempo for muito grande, a densidade da atmosfera torne-se cada vez menor. Neste caso utilizamos uma função polinomial, que será determinada ao longo da resolução. Esta solução chamamos de assintótica, pois descreve o fenômeno no limite do tempo muito grande.

Iniciaremos resolvendo $x(t)$,

Sejam (5.27) e (5.28) solução das equações homogêneas de (5.15) e (5.16), tais que:

$$X(t) = e^{m_1 t} f_1(t) \quad (5.27)$$

$$Y(t) = e^{m_2 t} f_2(t) \quad (5.28)$$

Fazendo a primeira e segunda derivada de (5.27) e (5.28) e substituindo na equação (5.15), temos:

$$e^{m_1 t} (m_1^2 f_1 + 2m\dot{f}_1 + \ddot{f}_1) (e^{m_1 t} f_1)^3 + C e^{m_1 t} (m_1 f_1 + \dot{f}_1) - 2\omega (e^{m_2 t} f_2)^3 \quad (5.29)$$

$$(e^{m_1 t} (m_1 f_1 + \dot{f}_1)) - 2e^{m_1 t} f_1 F = 0$$

Arrumando, fica:

$$e^{4m_1 t} f_1^3 (m_1^2 f_1 + 2m\dot{f}_1 + \ddot{f}_1) + C e^{m_1 t} (m_1 f_1 + \dot{f}_1) - 2\omega e^{(3m_2 + m_1)t} f_2^3 \quad (5.30)$$

$$(m_1 f_1 + \dot{f}_1) - 2e^{m_1 t} f_1 F = 0$$

Realizando algumas operações, teremos:

$$m_1^2 + 2m_1 \frac{\dot{f}_1}{f_1} + \frac{\ddot{f}_1}{f_1} + \left(\frac{m_1}{f_1^3} + \frac{\dot{f}_1}{f_1^4} \right) (C e^{-3m_1 t} - 2\omega e^{-3(m_1 - m_2)t} f_2^3) - \frac{2e^{-3m_1 t}}{f_1^3} F \quad (5.31)$$

$$= 0$$

Tomando:

$$m_1 - m_2 \neq 0 \quad (5.32)$$

$$\frac{\dot{f}_1}{f_1} = \frac{d \ln(f_1)}{dt} \quad (5.33)$$

$$\frac{\ddot{f}_1}{f_1} = \frac{\dot{f}_1}{f_1} \frac{d \ln(\ddot{f}_1)}{dt} = \left[\frac{d \ln(f_1)}{dt} \right] \left[\frac{d \ln(\dot{f}_1)}{dt} \right] \quad (5.34)$$

$$\frac{d(\ln f_1)}{dt} = G(t) \quad (5.35)$$

Por hipótese, assumimos que:

$$\frac{e^{-3m_1 t}}{f_1^3} \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow \infty \quad (5.36)$$

$$e^{-3m t} f_2^3 \rightarrow K \text{ (muito pequeno)} \quad (5.37)$$

$$C e^{-3m_1 t} \rightarrow 0 \quad (5.38)$$

$$\left(\frac{m_1}{f_1^3} + \frac{\dot{f}_1}{f_1^4} \right) \rightarrow 0 \quad (5.39)$$

Então, substituindo na equação, temos:

$$m_1^2 + 2m_1 G(t) + G(t) \frac{d(\ln \dot{f}_1)}{dt} + \left(\frac{m_1}{f_1^3} + \frac{\dot{f}_1}{f_1^4} \right) (C e^{3m_1 t} - 2\omega e^{-3(m_1 - m_2)t} f_2^3) - \quad (5.40)$$

$$\frac{2e^{-3m_1 t}}{f_1^3} F = 0$$

Fazendo as considerações de (5.36) a (5.39), temos que:

$$m_1^2 + 2m_1 G(t) + G(t) \frac{d(\ln f)}{dt} + 0(0 - 2 \cdot \omega K) - 2 F \cdot 0 \cong 0 \quad (5.41)$$

Assim,

$$G(t) \cong \frac{-m_1^2}{2m_1 + \frac{d(\ln \dot{f}_1)}{dt}} \quad (5.42)$$

Substituindo (5.42) e aplicando a integral definida temos,

$$\int_0^t \frac{d(\ln f_1(t))}{dt} dt \cong m_1^2 \int_0^t \frac{dt}{2m_1 + \frac{d(\ln \dot{f}_1)}{dt}} \quad (5.43)$$

Esta expressão dá a condição de aproximação para a função $f_1(t)$. O resultado dependerá da suposição que fizermos para esta função. Ela pode ser tomada como uma função aferidora da precisão da nossa solução.

Considerando $f_1(t)$ como sendo um polinômio de 2º grau, temos:

$$f_1(t) = a_x + b_x t + c_x t^2 \quad (5.44)$$

$$\dot{f}_1(t) = b + 2ct \quad (5.45)$$

Assim, substituindo (5.45) na derivada $d(\ln \dot{f}_1)$ em (5.43):

$$\frac{d \ln(b + 2ct)}{dt} = \frac{2c}{b + 2ct} \quad (5.46)$$

Resolvendo a integral definida de (5.43), temos:

$$\ln \frac{f(t)}{f(0)} = \ln \frac{f(t)}{a} \cong -m_1^2 \left[\int_0^t \frac{b}{(2m_1 b + 2c) + 4m_1 c t} dt + \int_0^t \frac{2Ct}{(2m_1 b + 2c) + 4m_1 c t} dt \right] \quad (5.47)$$

Resultado da primeira e segunda integral, respectivamente:

$$I_1 = \frac{b}{K_2} \ln \left(1 + \frac{K_2 t}{K_1} \right) \quad (5.48)$$

$$I_2 = \frac{2Ct}{K_2} - \frac{2CK_1}{K_2^2} \ln \left(1 + \frac{K_2 t}{K_1} \right) \quad (5.49)$$

Onde:

$$K_1 = 2(m_1 b + C) \quad (5.50)$$

$$K_2 = 4m_1 C \quad (5.51)$$

O desenvolvimento encontra-se no Apêndice, e assim chegamos a $x(t)$:

$$x(t) \cong a_x e^{\frac{m_1}{4} \left\{ 2t + \ln \left[1 + \left(\frac{2m_1 C_x}{m_1 b_x + C_x} \right) t \right] \right\}} \quad (5.52)$$

Se $m_1 = 1$

$$x(t) \cong a_x e^{\frac{1}{4} \left\{ 2t + \ln \left[1 + \left(\frac{2C_x}{b_x + C_x} \right) t \right] \right\}} \quad (5.53)$$

De igual modo, a resolveremos $y(t)$ (5.16)

Substituindo as expressões (5.26) e (5.27), e suas respectivas derivadas, temos:

$$(e^{m_2 t} f_2)^3 (m_2^2 f_2 + 2m_2 \dot{f}_2 + \ddot{f}_2) e^{m_2 t} - 3\omega^2 (e^{m_2 t} f_2)^4 + 2e^{m_2 t} (m_2 f_2 + \dot{f}_2) E + 2\omega (e^{m_1 t} f_1)^3 e^{m_2 t} (m_2 f_2 + \dot{f}_2) + D (e^{m_2 t} f_2) = 0 \quad (5.54)$$

Ficando:

$$e^{4m_2 t} f_2^3 (m_2^2 f_2 + 2m_2 \dot{f}_2 + \ddot{f}_2) - 3\omega^2 e^{4m_2 t} f_2^4 + 2e^{m_2 t} (m_2 f_2 + \dot{f}_2) E + 2\omega e^{(3m_1 m_2)t} f_1^3 (m_2 f_2 + \dot{f}_2) + D e^{m_2 t} f_2 = 0 \quad (5.55)$$

Simplificando temos:

$$m_2^2 + 2m_2 \frac{\dot{f}_2}{f_2} + \frac{\ddot{f}_2}{f_2} - 3\omega^2 + 2E e^{-3m_2 t} \left(\frac{m_2}{f_2^3} + \frac{\dot{f}_2}{f_2^4} \right) + 2\omega e^{-3m_2 t} f_1^3 \left(\frac{m_2}{f_2^3} + \frac{\dot{f}_2}{f_2^4} \right) + D \frac{e^{-3m_2 t}}{f_2^3} = 0 \quad (5.56)$$

Tomando:

$$m_2 - m_1 = m \quad (5.57)$$

$$\frac{\dot{f}_2}{f_2} = \frac{d}{dt} \ln(f_2) = G(t) \quad (5.58)$$

$$\frac{\dot{f}_2}{f_2} \frac{d}{dt} \ln(\dot{f}_2) = G(t) \frac{d}{dt} \ln(\dot{f}_2) = \frac{\ddot{f}_2}{\dot{f}_2} \quad (5.59)$$

Substituindo, fica:

$$m_2^2 + 2m_2 G(t) \frac{d}{dt} \ln(\dot{f}_2) - 3\omega^2 + \left(\frac{m_2}{f_2^3} + \frac{\dot{f}_2}{f_2^4} \right) [2E e^{-3m_2 t} + 2\omega e^{-3m_2 t} f_1^3] \left(\frac{m_2}{f_2^3} + \frac{\dot{f}_2}{f_2^4} \right) + D \frac{e^{-3m_2 t}}{f_2^3} = 0 \quad (5.60)$$

Igualmente, quando $t \rightarrow \infty$:

$$\left(\frac{m_2}{f_2^3} + \frac{\dot{f}_2}{f_2^4}\right) \rightarrow 0 \quad (5.61)$$

$$e^{-3m_2 t} \rightarrow 0 \quad (5.62)$$

$$f_1^3 e^{-3m_2 t} \rightarrow K' (\text{pequeno}) \quad (5.63)$$

$$\frac{e^{-3m_2 t}}{f_2^3} \rightarrow 0 \quad (5.64)$$

Substituindo de (5.61) a (5.64) em (5.60):

$$m_2^2 + 2m_2 G(t) \frac{d}{dt} \ln(\dot{f}_2) - 3\omega^2 \cong 0 \quad (5.65)$$

$$G(t) \cong \frac{(3\omega^2 - m_2^2)}{2m_2 + \frac{d}{dt} \ln(\dot{f}_2)} \quad (5.66)$$

Substituindo (5.66) e aplicando a integral definida temos:

$$\int_0^t \frac{d}{dt} \ln(f_2) dt \cong (3\omega^2 - m_2^2) \int_0^t \frac{dt}{2m_2 + \frac{d}{dt} \ln(\dot{f}_2)} \quad (5.67)$$

$$\ln \frac{f_2(t)}{f_2(0)} \cong (3\omega^2 - m_2^2) \int_0^t \frac{dt}{2m_2 + \frac{d}{dt} \ln(\dot{f}_2)} \quad (5.68)$$

Esta expressão dá a condição de aproximação $f(t)$.

Considerando $f_2(t)$ um polinômio de 2º grau, temos

$$f_2(t) = a_y + b_y t + c_y t^2 \quad (5.69)$$

$$\dot{f}_2(t) = b_y + 2c_y t \quad (5.70)$$

Assim, substituindo o \ln em (5.68), temos:

$$\frac{d}{dt} \ln(b + 2ct) = \frac{2c}{b + 2ct} \quad (5.71)$$

Voltando a integral (5.67), e substituindo temos:

$$\ln \frac{f_2(t)}{f_2(0)} \cong (3\omega^2 - m_2^2) \int_0^t \frac{dt(b + 2ct)}{2m_2(b + 2ct) + 2c} \quad (5.72)$$

Tomando:

$$K_1 = (3\omega^2 - m_2^2) \quad (5.73)$$

$$K_2 = 2(m_2 b + 2ct) \quad (5.74)$$

$$K_3 = 4cm_2 \quad (5.75)$$

Substituindo na integral (5.72),

$$\ln \frac{f_2(t)}{f(0)} \cong K_1 \left[\int_0^t \frac{b dt}{K_2 + K_3} + \int_0^t \frac{2ct dt}{K_2 + K_3} \right] \quad (5.76)$$

Resolvendo as integrais, substituindo, e fazendo algumas simplificações, temos que:

$$y(t) \cong a_y e^{\frac{m_2}{4} \left\{ \frac{m_2^2 - 3\omega^2}{m_2^3} \ln \left(1 + \frac{2c_y m_2 t}{m_2 b_y c_y} \right) + \frac{(3\omega^2 - m_2^2)t}{m_2^2} \right\}} \quad (5.77)$$

tomando $f(0) = a_y$.

Se $m_2 = 1$,

$$y(t) \cong a_y e^{\frac{1}{4} \left\{ 1 - 3\omega^2 \ln \left(1 + \frac{2c_y t}{b_y c_y} \right) + (3\omega^2 - 1)t \right\}} \quad (5.78)$$

Para a solução em $z(t)$, (5.17)

Seja (5.79) suposta solução da equação homogênea:

$$z(t) = e^{m_3 t} f_3(t) \quad (5.79)$$

Fazendo a primeira e segunda derivada e substituindo na equação (5.79), temos:

$$(e^{m_3 t} f_3)^3 e^{m_3 t} (m_3^2 f_3 + \ddot{f}_3 + 2m_3 \dot{f}_3) + K e^{m_3 t} (m_3 f_3 + \dot{f}_3) + \omega (e^{m_3 t} f_3)^4 = 0 \quad (5.80)$$

$$e^{4m_3 t} f_3^3 (m_3^2 f_3 + 2m_3 \dot{f}_3 + \ddot{f}_3) + K e^{m_3 t} (m_3 f_3 + \dot{f}_3) + \omega e^{4m_3 t} f_3^4 = 0 \quad (5.81)$$

Simplificando, fica:

$$\left(m_3^2 f_3 + 2m_3 \frac{\dot{f}_3}{f_3} + \frac{\ddot{f}_3}{f_3} \right) + K e^{-3m_3 t} \left(\frac{m_3}{f_3^3} + \frac{\dot{f}_3}{f_3^4} \right) + \omega = 0 \quad (5.82)$$

Tomando:

$$G(t) = \frac{d(\ln(f_3))}{dt} \quad (5.83)$$

$$\frac{\ddot{f}_3}{f_3} = G(t) \frac{d(\ln(\dot{f}_3))}{dt} \quad (5.84)$$

Substituindo (5.83) e (5.84) em (5.82), temos que:

$$m_3^2 + 2m_3 G(t) + G(t) \frac{d(\ln(\dot{f}_3))}{dt} + K e^{-3m_3 t} \left(\frac{m_3}{f_3^3} + \frac{\dot{f}_3}{f_3^4} \right) + \omega = 0 \quad (5.85)$$

Onde:

Quando $t \rightarrow \infty$

$$\left(\frac{m_3}{f_3^3} + \frac{\dot{f}_3}{f_3^4} \right) \rightarrow 0 \quad (5.86)$$

$$e^{-3m_3 t} \rightarrow 0 \quad (5.87)$$

Ficando:

$$m_3^2 + G(t) \left(2m_3 + \frac{d(\ln(\dot{f}_3))}{dt} \right) + 0 + \omega^2 \cong 0 \quad (5.88)$$

$$G(t) \cong \frac{-\omega^2 - m_3^2}{2m_3 + \frac{d(\ln(\dot{f}_3))}{dt}} \quad (5.89)$$

Por (5.89), substituindo e aplicando a integral definida, fica:

$$\frac{d}{dt}(\ln(f_3)) \cong \frac{-(\omega^2 + m_3^2)}{2m_3 + \frac{d(\ln(\dot{f}_3))}{dt}} \quad (5.90)$$

$$\int_0^t \frac{d}{dt}(\ln(f_3)) \cong -(\omega^2 + m_3^2) \int_0^t \frac{dt}{2m_3 + \frac{d(\ln(\dot{f}_3))}{dt}} \quad (5.91)$$

$$\frac{\ln f(t)}{f(0)} \cong -(\omega^2 + m_3^2) \int_0^t \frac{dt}{2m_3 + \frac{d(\ln(\dot{f}_3))}{dt}} \quad (5.92)$$

Se tomarmos $f(t)$ como um polinômio do 2º grau, teremos:

$$f_3(t) = a_z + b_z t + c_z t^2 \quad (5.93)$$

$$\dot{f}_3(t) = b + 2ct \quad (5.94)$$

Substituindo (5.94) no \ln em (5.92) e arrumando fica:

$$\frac{\ln f(t)}{f(0)} \cong -(\omega^2 + m_3^2) \left[\int_0^t \frac{b_z dt}{(2m_3 b_z + 2c_z) + 4m_3 c_z t} + \int_0^t \frac{2c_z t dt}{(2m_3 b_z + 2c_z) + 4m_3 c_z t} \right] \quad (5.95)$$

Resolvendo as integrais, tomando $f(0) = a_z$, e fazendo algumas arrumações, temos que:

$$z(t) \cong a_z e^{\frac{1}{4m_3} \left\{ -2(\omega - m_3^2)t + \frac{(m_3^2 + \omega)}{m_3} \ln \left(1 + \frac{2m_3 c_z t}{m_3 b_z + c_z} \right) \right\}} \quad (5.96)$$

Se $m_3 = 1$,

$$z(t) \cong a_z e^{\frac{1}{4} \left\{ -2(\omega - 1)t + (1 + \omega) \ln \left(1 + \frac{2c_z t}{b_z + c_z} \right) \right\}} \quad (5.97)$$

III - SOBRE AS AMPLITUDES VARIÁVEIS NO TEMPO - As soluções assintóticas são solução quando o tempo é muito grande. Algumas constantes físicas do fenômeno, por exemplo, constantes relacionadas com o coeficiente de arrasto, com a área, com a velocidade angular, etc. não aparecem nestas funções. Estas soluções, portanto, só seriam válidas para um tempo grande, que daria uma altitude elevada, tal que o arrasto não atuaria mais. Mas, a solução da equação diferencial precisa incluir estes parâmetros que são elementos integrantes do fenômeno estudado. Assim, de posse das componentes da solução assintótica, retornemos às equações

diferenciais para encontrarmos as amplitudes a_x , a_y e a_z .

Vamos em busca de a_x , a_y e a_z .

Façamos as seguintes substituições:

$$(1 + 2t) = a(t) \quad (5.98)$$

$$(1 - 3\omega^2) = b \quad (5.99)$$

$$(1 + 3\omega^2) = c \quad (5.100)$$

$$(1 - \omega) = d \quad (5.101)$$

$$(1 + \omega) = f \quad (5.102)$$

Assim:

$$x(t) \cong a_x e^{\frac{t}{2}} (1 + 2t)^{\frac{1}{4}} \quad (5.103)$$

$$x(t) \cong a_x e^{\frac{t}{2}} a^{\frac{1}{4}}(t) \quad (5.104)$$

Derivando a primeira e segunda ordem, e arrumando temos:

$$\dot{x}(t) \cong \frac{a_x}{2} e^{\frac{t}{2}} \left\{ a^{\frac{1}{4}}(t) + a^{-\frac{3}{4}}(t) \right\} \quad (5.105)$$

$$\ddot{x}(t) \cong \frac{a_x}{4} e^{\frac{t}{2}} \left\{ a^{\frac{1}{4}}(t) + 2 a^{-\frac{3}{4}}(t) - 3 a^{-\frac{7}{4}}(t) \right\} \quad (5.106)$$

O mesmo com $y(t)$, substituindo fica:

$$y(t) \cong a_y a(t)^{\frac{b}{4}} e^{\frac{c}{4}t} \quad (5.107)$$

Derivando a primeira e a segunda ordem, e arrumando fica:

$$\dot{y}(t) \cong \frac{a_y}{4} e^{\frac{c}{4}t} \left\{ c a(t)^{\frac{b}{4}} + 2 b a(t)^{\frac{b-4}{4}} \right\} \quad (5.108)$$

$$\ddot{y}(t) \cong \frac{a_y}{16} e^{\frac{c}{4}t} \left\{ c^2 a^{\frac{b}{4}}(t) + 4 b c e^{\frac{b-4}{4}} + (2b^2 - 8b) e^{\frac{b-8}{4}} \right\} \quad (5.109)$$

Substituindo (5.102) a (5.108) em (5.15) e arrumando fica:

$$\frac{a_x^4}{4} e^{\frac{t}{2} + \frac{3t}{2}} \left\{ a^{\frac{1}{4}} + 2 a^{-\frac{3}{4}} - 3 a^{-\frac{7}{4}} \right\} a^{\frac{3}{4}} - \frac{c a_x}{2} e^{\frac{t}{2}} \left\{ a^{\frac{1}{4}} + a^{-\frac{3}{4}} \right\} - 2 \omega a_y^3 a^{\frac{3b}{4}} e^{\left(\frac{3ct}{4} + \frac{t}{2}\right)} \frac{a_x}{2} \left\{ a^{\frac{1}{4}} + a^{-\frac{3}{4}} \right\} - 2 a_x e^{\frac{t}{2}} a^{\frac{1}{4}} F = 0 \quad (5.110)$$

Organizando, teremos que:

$$a_x = \sqrt[3]{\frac{4e^{-\frac{3}{2}t} \left\{ 2F(1+2t)^{\frac{1}{4}} + \left[(1+2t)^{\frac{1}{4}} + (1+2t)^{-\frac{3}{4}} \right] \left[\frac{(1+3\omega^2)}{2} + a_y^3 (1+2t)^{\frac{3(1+3\omega^2)}{4}} e^{\frac{3(1+3\omega^2)t}{4}} \right] \right\}}{\{(1+2t) + 2 - 3(1+2t)^{-1}\}}} \quad (5.111)$$

Com restrição de $t \neq 0$.

Substituindo em (5.16),

$$\begin{aligned} & \frac{a_y}{16} e^{\frac{c}{4}t} \left\{ c^2 a^{\frac{b}{4}} + 4bc e^{\frac{b-4}{4}} + (2b^2 - 8b)e^{\frac{b-8}{4}} \right\} \left\{ a_y^3 a^{\frac{3b}{4}} e^{\frac{3c}{4}t} \right\} - 3\omega^2 \{ a_y^4 a^b e^{ct} \} + \\ & 2 \frac{a_y}{4} e^{\frac{c}{4}t} \left\{ ca^{\frac{b}{4}} + 2be^{\frac{b-4}{4}} \right\} E + 2\omega \left\{ a_x e^{\frac{t}{2}} (1+2t)^{\frac{1}{4}} \right\}^3 \left\{ \frac{a_y}{4} e^{\frac{c}{4}t} \left\{ ca^{\frac{b}{4}} + 2be^{\frac{b-4}{4}} \right\} \right\} + \\ & Da_y a^{\frac{b}{4}} e^{\frac{c}{4}t} = 0 \end{aligned} \quad (5.112)$$

Fazendo algumas operações, simplificações e arrumando fica:

$$a_y = \quad (5.113)$$

$$\sqrt[3]{\frac{16e^{-\frac{3}{4}(1+3\omega^2)} \left\{ D(1+2t)^{\frac{(1+3\omega^2)}{4}} + e^{-\frac{(1+3\omega^2)}{4}} \left[(1+3\omega^2)(1+2t)^{\frac{(1+3\omega^2)}{4}} + 2(1-3\omega^2)e^{-\frac{3}{4}(1+\omega^2)} \right] I \right\}}{48\omega^2(1+2t)^{(1-3\omega^2)} + \left[(1+3\omega^2)^2(1+2t)^{(1-3\omega^2)} + 4(1-3\omega^2)(1+3\omega^2)(1+2t)^{\frac{3}{4}(1-3\omega^2)} e^{-\frac{3}{4}(1+3\omega^2)} + I_1 \right] I_3}}$$

$$I = \left[\frac{E}{2} + \omega \frac{a_x^3}{2} (1+2t)^{\frac{3}{4}} e^{\frac{3}{2}t} \right] \quad (5.114)$$

$$I_2 = 6(1+\omega^2)(3\omega^2-1)e^{-\frac{3(1+\omega^2)}{4}} \quad (5.115)$$

$$I_3 = (1+2t)^{\frac{3(1-3\omega^2)}{4}} \quad (5.116)$$

Como temos um denominador, fizemos o cálculo da restrição, isto é:

$$t \neq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt[4]{\left(\frac{e^{\frac{3}{4}(1+\omega^2)} (45 - \frac{1}{\omega^2})}{2 \left(-\frac{1}{\omega^2} + 3 \right) (1-3\omega^2)} \right)^{(1-3\omega^2)}}} - 1 \right] \quad (5.117)$$

- Se $(1-3\omega^2) = 0$, viola o denominador, então precisamos considerar duas coisas

$$\omega^2 \neq \frac{1}{3} \quad (5.118)$$

Encontraremos a resolução em $z(t)$.

Considerando (5.97) e fazendo as substituições de (5.101) e (5.102), fica:

$$z(t) \cong a_z e^{\frac{d}{2}t} a^{\frac{f}{4}} \quad (5.119)$$

Derivando na primeira e segunda ordem, fica:

$$\dot{z}(t) \cong \frac{a_z}{2} e^{\frac{d}{2}t} \left\{ da^{\frac{f}{4}} + fa^{\frac{f-4}{4}} \right\} \quad (5.120)$$

$$\ddot{z}(t) \cong \frac{a_z}{4} e^{\frac{d}{2}t} \left\{ d^2 a^{\frac{f}{4}} + 2fda^{\frac{f-4}{4}} + f(f-4)a^{\frac{f-8}{4}} \right\} \quad (5.121)$$

Substituindo na equação (5.17), temos:

$$\begin{aligned} \frac{a_z}{4} e^{\frac{d}{2}t} \left\{ d^2 a^{\frac{f}{4}} + 2fda^{\frac{f-4}{4}} + f(f-4)a^{\frac{f-8}{4}} \right\} \left\{ a_z e^{\frac{d}{2}t} a^{\frac{f}{4}} \right\}^3 + K \frac{a_z}{2} e^{\frac{d}{2}t} \left\{ da^{\frac{f}{4}} + fa^{\frac{f-4}{4}} \right\} \\ + \omega \left\{ a_z e^{\frac{d}{2}t} a^{\frac{f}{4}} \right\}^4 \end{aligned} \quad (5.122)$$

Fazendo algumas operações, arrumando fica:

$$a_z = \sqrt[3]{\frac{-2K e^{\frac{-3}{2}(1-\omega)t} (1+2t)^{\frac{-(11+3\omega)}{4}} \left[(1-\omega) + (1+\omega)(1+2t)^{\left(-1+\frac{\omega}{2}\right)} \right]}{[(1-\omega)^2 + 4\omega](1+2t)^{-2} + (1+\omega)[(\omega-3) + 2(1+2t)]}} \quad (5.123)$$

Precisamos também analisar a restrição:

- O termo $(1+2t)$ sempre será positivo, pois $t > 0$;
- Mas os termos $(1-\omega)$ e $(\omega-3)$ podem ser zero, isto é:

$$\omega_1 = 3 \quad (5.124)$$

$$\omega_2 = 1 \quad (5.125)$$

Contudo, mesmo para estes casos, teríamos:

a) $\omega_1 = 3$

$$t \neq \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{2} \quad (5.126)$$

b) $\omega_2 = 1$

$$4 \neq -(1+2t)^2 + 4(1+2t)^3 \quad (5.127)$$

Como,

$$(1+2t) \neq 0 \quad (5.128)$$

Tomando por exemplo:

a) Se $1+2t = 1 \Rightarrow t = 0$, o que viola para a_x, a_y .

b) Se $1+2t = 2$, por (5.126) teríamos:

$$4 \neq 28$$

c) Se $1+2t = 3$, por (5.126) teríamos:

$$4 \neq 99$$

Então, podemos dizer que as restrições são:

1. (5.129)

$$t \neq \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{2}$$

2. (5.130)

$$t \neq 0$$

Esta etapa consiste em nossa contribuição para se obter uma solução mais próxima do real. Nosso objetivo é encontrar uma solução geral, sem restrições, porém devido a complexidade do problema encontramos dificuldades em exibir uma solução sem restrição.

Capítulo 6

Manobras Evasivas em Ambiente de Detritos Espaciais

Neste Capítulo apresentaremos os resultados obtidos das simulações da dinâmica orbital relativa entre dois corpos. Simulamos a dinâmica relativa incluindo à força de gravidade, a força de propulsão química (modelo de massa exponencial e linear), força de arrasto atmosférico constante e não constante e força de propulsão plasma (modelo de massa exponencial). E assim apresentaremos algumas comparações a partir dos modelos.

6.1 Histograma - Solução homogênea (apenas Força gravitacional)

A partir das soluções das equações homogêneas da dinâmica relativa foi possível identificar as possibilidades de colisão, quando os corpos estão sujeitos unicamente à força gravitacional. O gráfico da Figura 6, a seguir, mostra os resultados para o caso de distância relativa inicial entre os corpos igual a 3km, para um intervalo de 3.000 segundos. O gráfico mostra as possibilidades de colisão (número de colisão) por intervalo de velocidades iniciais relativas, com relação das distâncias relativas entre os objetos na faixa de 3km, assumindo um intervalo de 0 a 3000 segundos.

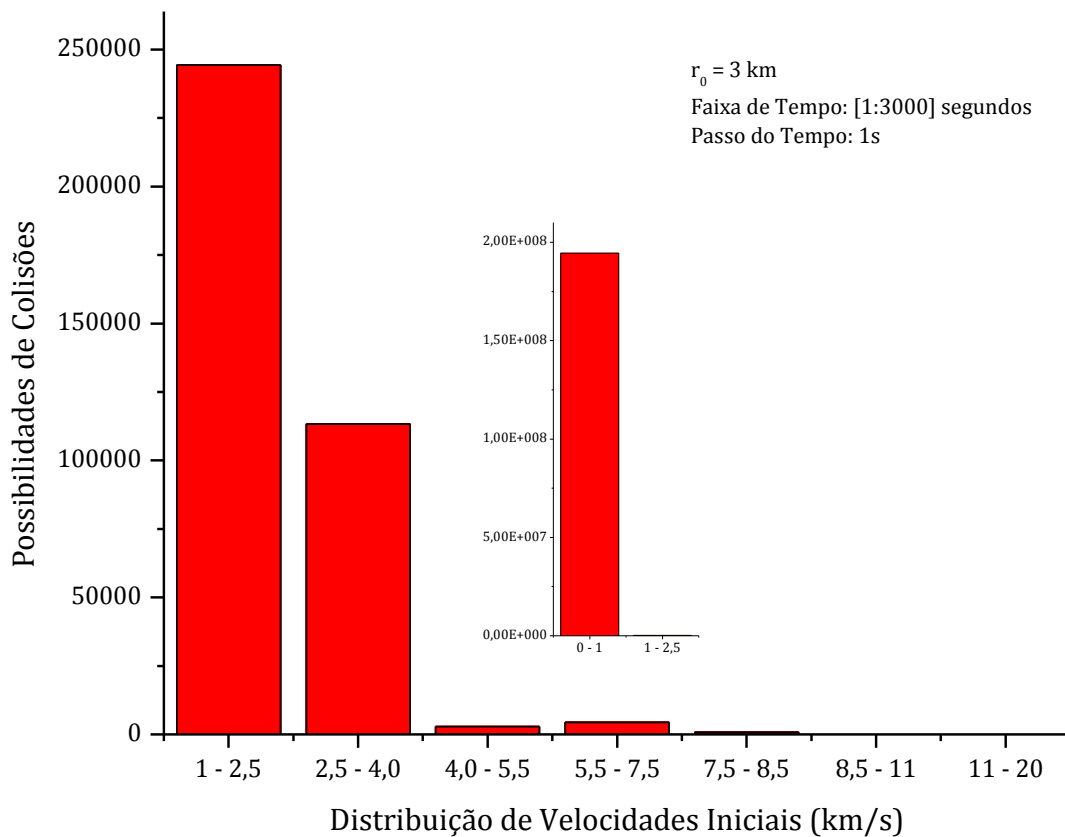


Figura 6: Possibilidades de colisões \times distribuição de velocidades iniciais. Baseado em (Jesus A. D., 2012)

Podemos observar pelo gráfico que as possibilidades de colisão ocorrem em maior número para velocidades iniciais relativas muito pequenas, e à medida que essas velocidades vão aumentando, as possibilidades de colisão são bem menores.

O dado referente às equações homogêneas descreve-nos uma trajetória colisional, ou seja, o objeto operacional está apenas sob a força gravitacional. Porém, ao ser adicionado uma força externa, de um propulsor, dados das Equações (3.40), (3.41), e (3.42), espera-se que este modelo descreva uma trajetória que “fuja” dessa rota de colisão. Para esta simulação utilizamos: $R = 6.598 \text{ km}$, $r_0 = 3 \text{ km}$, $v_{ex} = v_{ey} = v_{ez} = \frac{2,5}{\sqrt{3}} \text{ km/s}$, $t_c = 2667 \text{ s}$, $\chi=10$, $\theta = 57^\circ$, $\varphi = 68$, $\gamma = 1\text{E-}6$.

A Figura 7, mostra a atuação da propulsão para diferentes valores do fator de potência. Este gráfico descreve “as curvas” em cores diferentes, referentes às manobras evasivas. Para isto utilizamos as soluções (3.46), (3.47) e (3.55) das Equações (3.40), (3.41) e (3.42). Devido a escala, a curva em preto que descreve a solução homogênea, Equações (3.20), (3.21), e (3.22), não aparece muito “visível”, mas pela Figura 8, a seguir, fica mais visível. Essa trajetória descrita pela solução homogênea descreve a rota de colisão, ou seja, o satélite estaria apenas sujeito a força gravitacional, porém, ao acionar a força de propulsão, o corpo sai dessa rota e assim escapa. Cada curva de cor diferente da preta representa uma manobra evasiva (trajetória de escape). Quando varia-se o fator de potência, obtém-se uma manobra evasiva que faz o objeto escapar de detritos até o tamanho máximo possível para aquela propulsão. Verificamos que, a medida que o fator aumenta, o veículo espacial consegue escapar de detritos cada vez maiores.

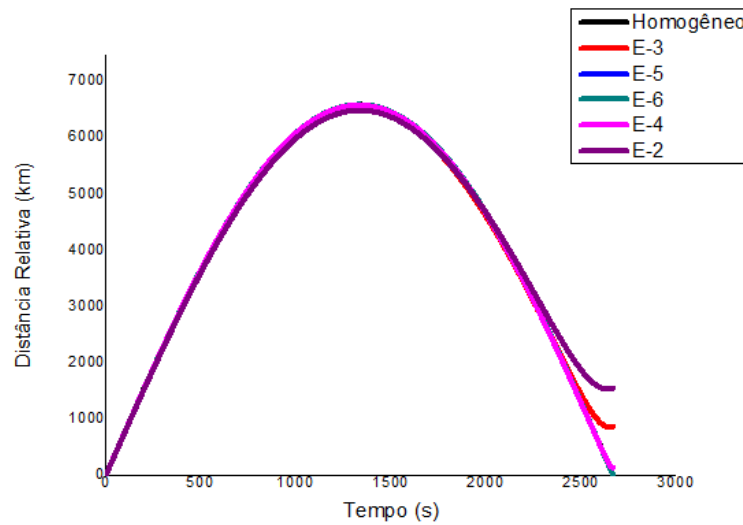


Figura 7: Distância Relativa em função do Tempo, variando o fator de potência.

Fixando o fator de potência em $\gamma = 10E - 6$ e variando o fator de massa χ , observamos, Figura 8, que à medida em que o fator de massa aumenta, o veículo espacial igualmente consegue escapar de detritos cada vez maiores.

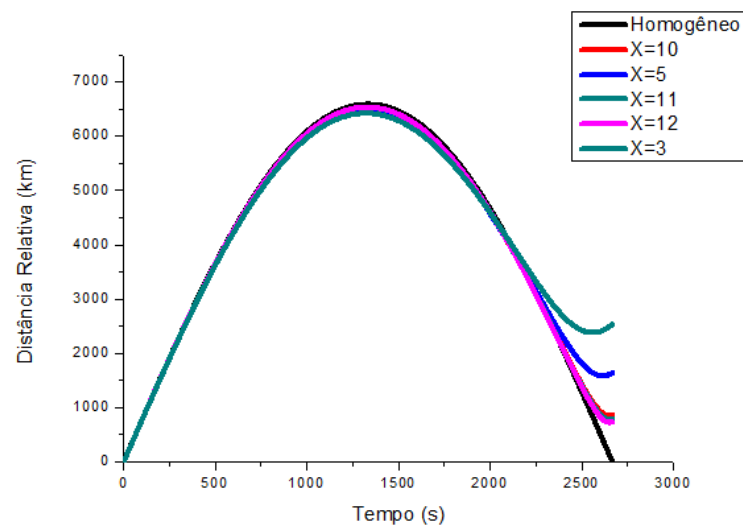


Figura 8: Diferentes fatores de massa

A Figura 9 mostra como a manobra evasiva se comporta frente a detritos em rota de colisão com o veículo em função das velocidades de exaustão do sistema de propulsão. Observamos neste gráfico que quanto mais potente o sistema de propulsão (maior velocidade de exaustão), maior chance do veículo escapar de detritos maiores, para veículos de tamanhos que tenham fator de massa até 10. Porém, veículos menores (sondas, satélites minúsculos, etc.) terão maior chance de escapar apenas de detritos pequenos, independente da potência do seu motor.

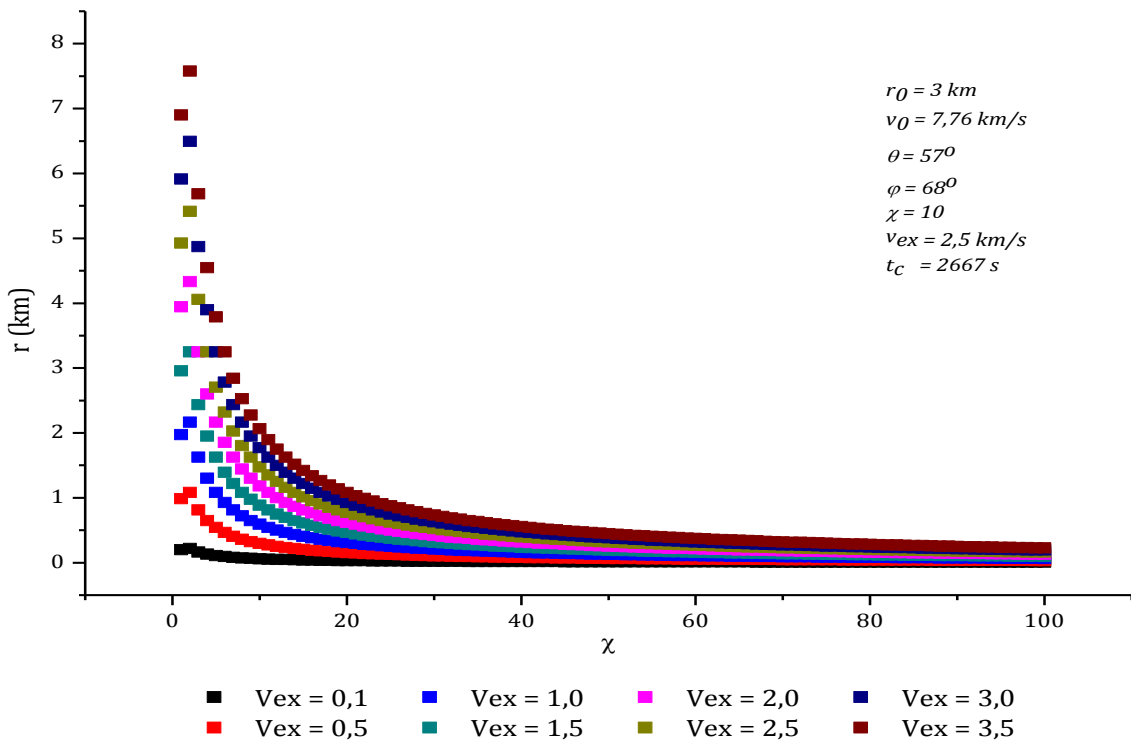


Figura 9: Posição Relativa Final entre os dois objetos em função do fator massa para diferentes velocidades de exaustão. FONTE: Baseado em (Oliveira, 2016)

6.2 Simulações com Arrasto Atmosférico

Nesta seção apresentamos os resultados referentes às Equações (3.82), (3.83) e (3.84). A Figura 10, a seguir, mostra a trajetória dos objetos em rota de colisão sujeitos à força da gravidade apenas, caso homogêneo.

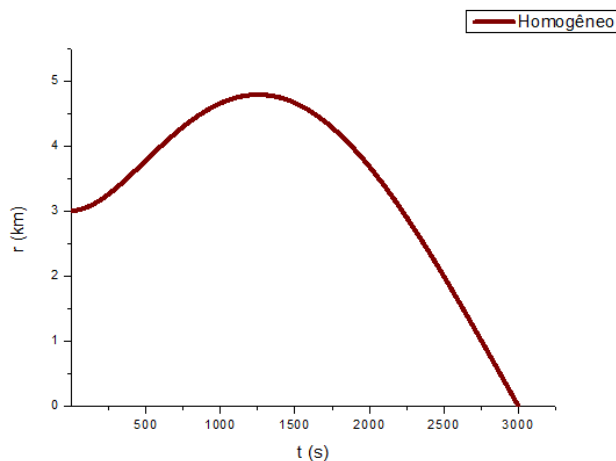


Figura 10: Objeto operacional sujeito a força gravitacional- rota de colisão

Os resultados são referentes ao modelo de arrasto atmosférico, consideramos o arrasto atuando apenas sobre o detrito. Assim, utilizamos: razão da massa do detrito pela área, $m/A = 1.27388535032E + 5 \text{ kg/m}^2$ ($m = 10^3 \text{ kg}$, $A = \pi r^2$, $r = 5,10^5 \text{ km}$). coeficiente de arrasto atmosférico $C_d = 2.2$ e densidade atmosférica $2.789E-10$. O efeito do arrasto atmosférico consiste em afastar os objetos. No gráfico da Figura 11, percebemos que a medida

que o tempo aumenta, os objetos se distanciam cada vez mais, servindo, desse modo, como uma força natural que impede a colisão entre os objetos espaciais. Dados: $\rho = 2.789E-10$, $\chi = 10$, $v_{ex} = v_{ey} = v_{ez} = \frac{2.5}{\sqrt{3}} km/s$, $R = 6\,598\text{ km}$, $r_0 = 3.0\text{ km}$, $\theta = 57^\circ$, $\varphi = 68^\circ$.

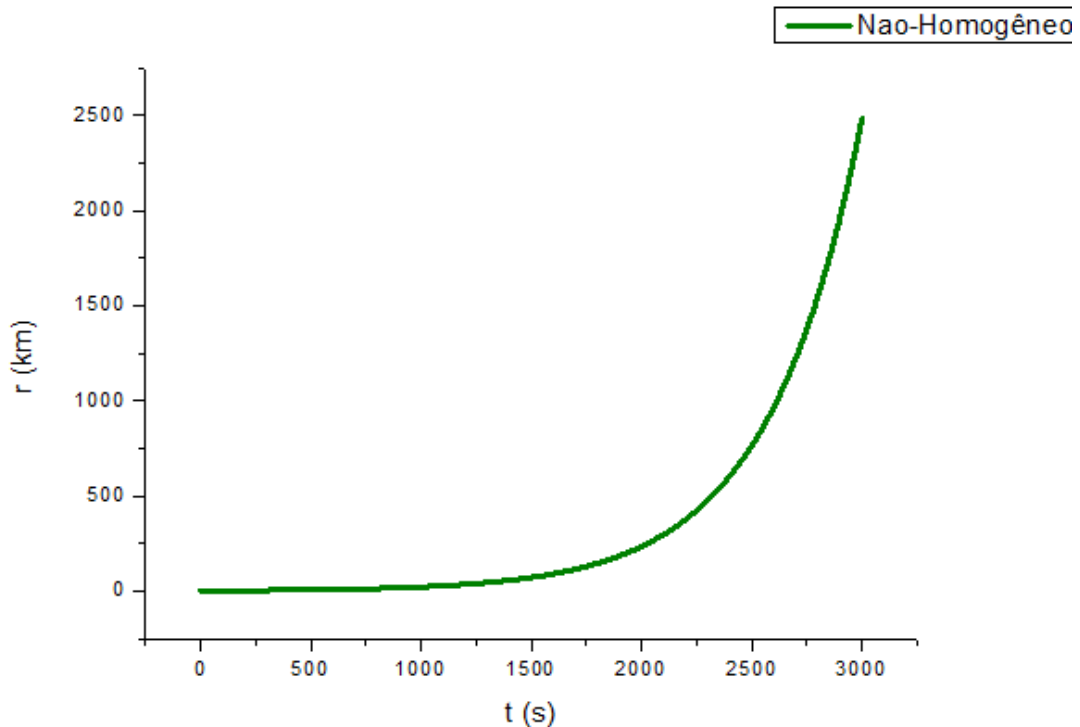


Figura 11: Força de arrasto atuando no objeto operacional

No nosso caso, consideramos a força atuando no detrito. Como já mencionado, a força de arrasto atmosférico atrai os objetos para a Terra, atuando com mais força para corpos com orbitas mais próximas, em LEO, por exemplo. A Figura 12, a seguir, mostra o comportamento do detrito em relação a Terra, sob o efeito dessa força, a imagem abaixo serve apenas para ilustrar como seria essa atuação no detrito em relação a Terra. Isto é, à medida em que o tempo passa, o veículo e o detrito se afastam, o arrasto ao invés de atrair ou de atraí-los para a colisão, faz eles se afastarem.

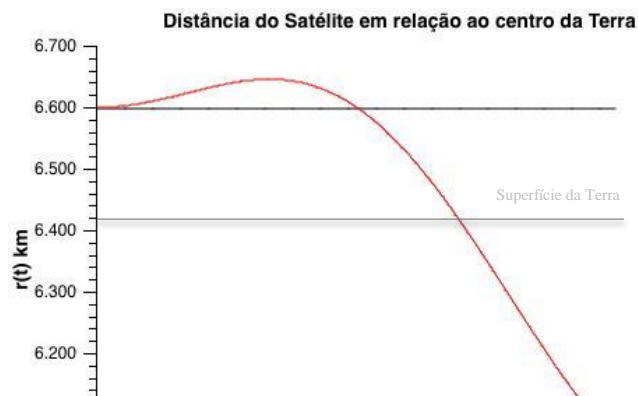


Figura 12: Trajetória do detrito em relação ao centro da Terra.

FONTE: Baseado em (Oliveira, 2016)

Os gráficos das Figura 13 e 14, a seguir, descrevem o modelo de arrasto onde variamos o lambda, λ , o qual consiste em um fator de desacoplamento para as componentes $x(t)$ e $y(t)$. O estudo sobre esse fator ainda é novo. A única coisa que podemos afirmar até o momento é que esse fator possui mesma unidade de aceleração e, sendo assim, quando ele aumenta, a velocidade no plano aumenta e isto contribui para o aumento da distância relativa entre os objetos colisionais.

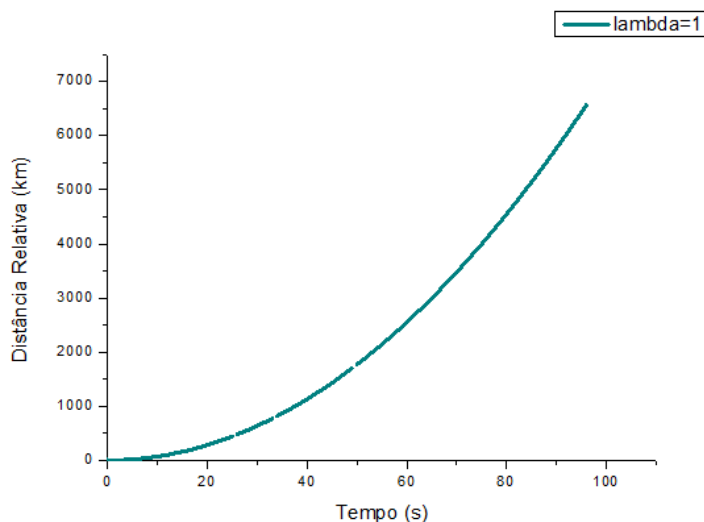


Figura 13: Distância Relativa entre os objetos colisionais vs. Tempo, para $\lambda = 1$.

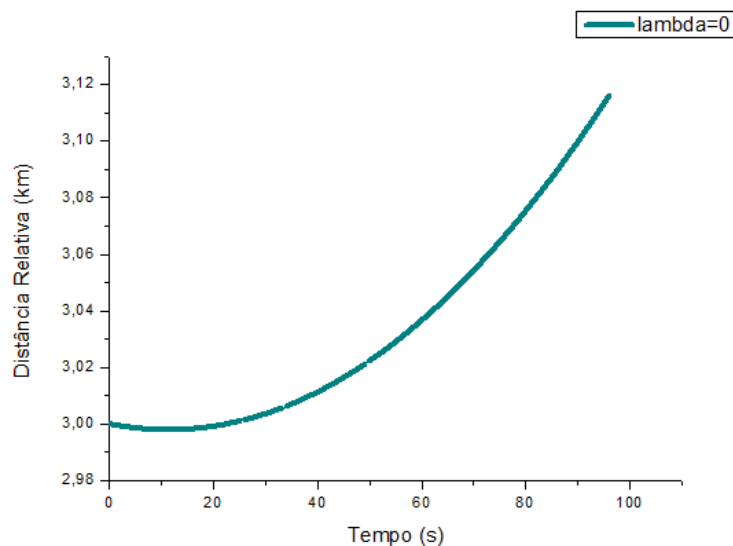


Figura 14: Distância Relativa entre os objetos colisionais vs. Tempo, para $\lambda = 0$.

Nesta seção analisamos o efeito da densidade constante, ρ . Simulamos 4 valores para esta grandeza para verificarmos qual o seu efeito na distância relativa entre os objetos colisionais. Desse modo, quanto maior for a densidade atmosférica, o que equivale a força de arrasto maior, maior será a distância relativa entre os objetos, mostrando que a densidade atmosférica é uma grandeza determinante para o afastamento dos objetos colisionais. O

gráfico da Figura 15, a seguir, mostra os resultados. Verificamos que, quanto maior for o ρ os objetos se afastam para distâncias maiores. Já os detritos tendem a ser atraídos pela Terra.

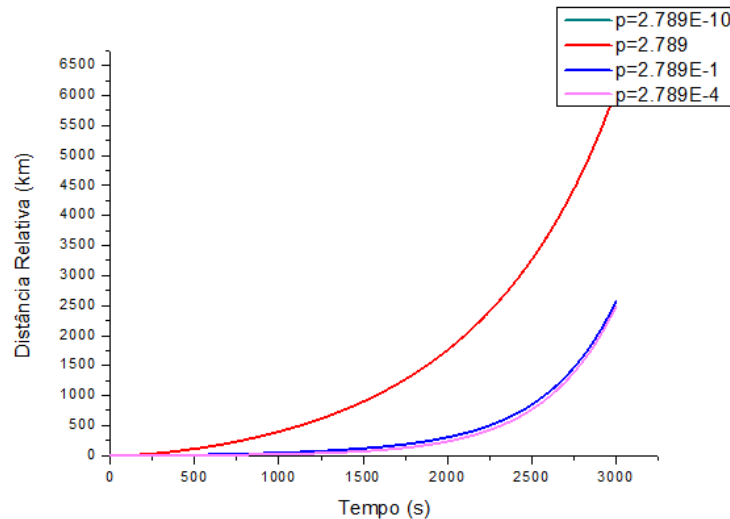


Figura 15: Distância relativa entre os objetos colisionais para diferentes densidades atmosféricas constantes

6.3 Algoritmos da Dinâmica Relativa com Força, gravitacional, de Arrasto Atmosférico e Força de propulsão.

Nesta seção apresentamos os resultados referentes à dinâmica com as forças gravitacional, de arrasto atmosférico e de propulsão química (modelo de massa exponencial), Equações (3.113), (3.114) e (3.115). Utilizamos os mesmos dados da Seção 5.1. Pelos dados foi possível descrever a manobra evasiva, frente à uma colisão. A Figura 16, a seguir, mostra a comparação quando sujeito apenas à força gravitacional e quando acionados os propulsores. No primeiro caso (homogêneo), o objeto irá colidir, já o segundo, como esperávamos, ao acionar os propulsores, a manobra evasiva acontece, para uma distância relativa de aproximadamente 4000 km.

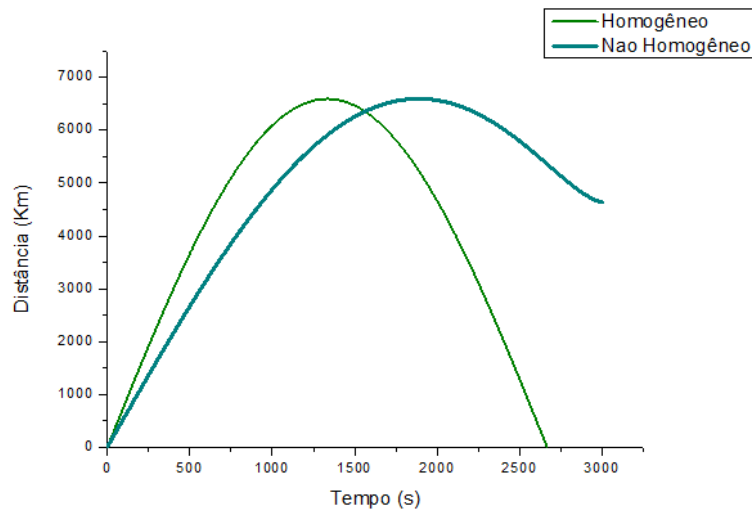


Figura 16: Manobras homogênea e Propulsiva vs. Tempo

Dados utilizados para as simulações com arrasto atmosférico: $m/a = 1.27388535032E - 5 \text{ kg/m}^2$, $C_d = 2.2$, $w_e = 7.2921150E-5$, $\rho = 2.789E-10$, $\chi = 10$, $v_{ex} = v_{ey} = v_{ez} = \frac{2.5}{\sqrt{3}} \text{ km/s}$, $R = 6598 \text{ km}$, $\gamma = 1E-6$, $r_o = 3.0 \text{ km}$, $\theta = 57^\circ$, $\varphi = 68^\circ$.

Neste caso, admitimos que a força de arrasto mais gravidade possibilitam a colisão entre os veículos, e mesmo assim, pelos dados, ao acionar o sistema de propulsão o veículo consegue realizar a manobra e fugir da colisão.

Já na Figura 17 nós fixamos os valores e apenas variamos o fator de potência. Percebe-se que, quanto maior for o fator de potência mais rápido escapa da colisão. Contudo, neste caso, escapa-se de detritos maiores. Então, se o fator de potência for grande, escapa-se de detritos grandes e em tempo mais curtos em relação ao tempo de colisão.

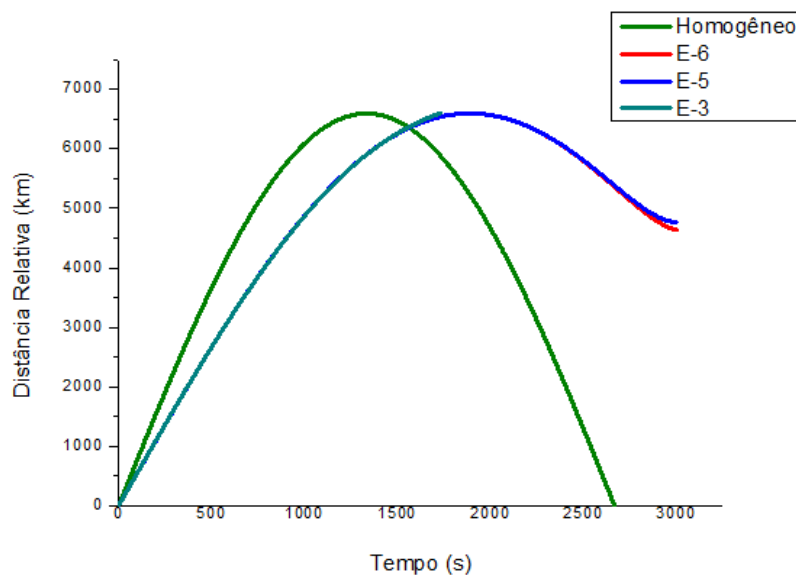


Figura 17: Manobras homogênea e Propulsivas vs. Tempo, variando o fator de potência

6.4 Manobra evasiva - Propulsão com Modelo Linear.

Nesta seção apresentamos os dados referente às equações com ação da força de propulsão química, modelo de variação linear de massa, Equações (3.136), (3.137) e (3.138), onde consideramos a massa do corpo $M_0 = 49.5$, $v_{ex} = v_{ey} = v_{ez} = \frac{2.5E-3}{\sqrt{3}} km/s$, $\dot{m} = -0.016$ taxa de massa, altitude $220 km$. A Figura 18, descreve a trajetória do veículo frente a uma colisão. A partir dos parâmetros tecnológicos utilizados, verificamos que ao acionar o sistema de propulsão do veículo, é possível escapar da colisão, implementando uma manobra evasiva.

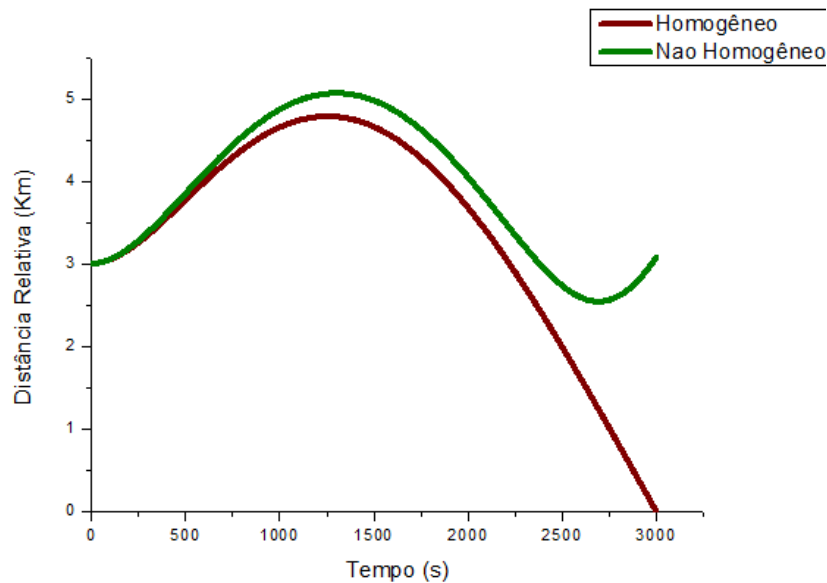


Figura 18: Distância Relativa entre os objetos colisionais vs. Tempo. Manobra evasiva, Modelo Linear.

O gráfico mostra que ao acionar o sistema de propulsão o veículo consegue fugir dessa provável colisão. A linha marrom descreve a simulação das equações homogêneas (4.119), (4.120) e (4.125). Nesse caso, o corpo estaria sujeito à força de gravidade. Ao acionar a propulsão linear (curvas em verde), verificamos que ocorre o escape da colisão. Nesta simulação verificamos que o objeto operacional poderá escapar de um detrito com distância relativa de até 2,5 km, aproximadamente.

A Figura 19, a seguir, mostra os resultados para manobras evasivas com taxa de decréscimo de massa variando, com os outros dados fixos. Observamos que, quanto maior for a taxa de decréscimo da massa, o objeto operacional escapará de detritos menores.

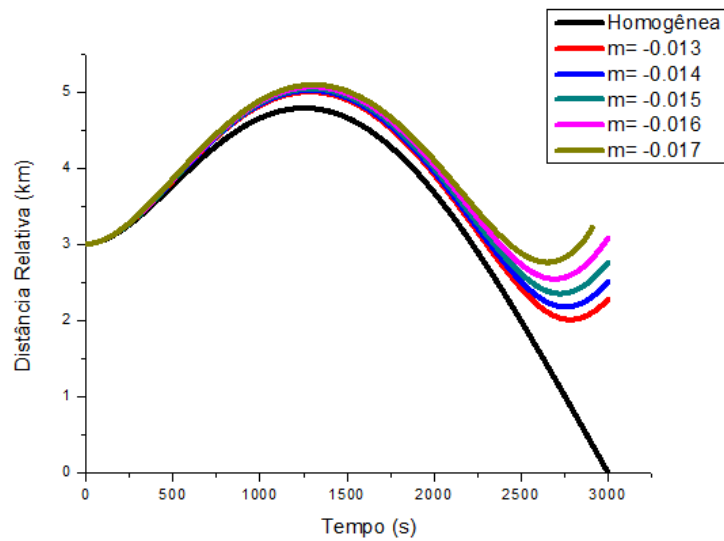


Figura 19: Distância relativa entre os objetos colisionais vs. Tempo vs. Taxa de decréscimo da massa.

Em geral, observamos que para ambos modelos, variação exponencial e linear da massa, em propulsão química, é possível realizar manobras evasivas para diferentes parâmetros tecnológicos. Os resultados também mostram que as manobras evasivas com modelo linear de massa podem ser mais eficientes para escapar de objetos menores, enquanto as do modelo exponencial para objetos maiores.

6.5 Manobra evasiva - Propulsão com Modelo Plasma.

Nesta sessão apresentaremos os dados referente as equações com ação da força de propulsão plasma, Equações (4.154), (4.155) e (4.156). Dados para a simulação, altitude 220 km , $r_0=3.0\text{ km}$, $\theta = 57^\circ$, $\varphi = 68^\circ$, $\chi = 10$, $\gamma = 1\text{E-}6$, $t_c = 2667\text{ s}$, Campo Elétrico, $E = 100\text{ V.m}$, Campo Magnético: $B_r = 0.001\text{ T}$, $B_z = 0.001\text{ T}$, $B_o = 0\text{ T}$, condutividade $\sigma = 10\text{E+}10$, densidade $\delta = 4,8\text{E+}14$, $\beta = 0^\circ$. A Figura 20, a seguir, mostra os resultados.

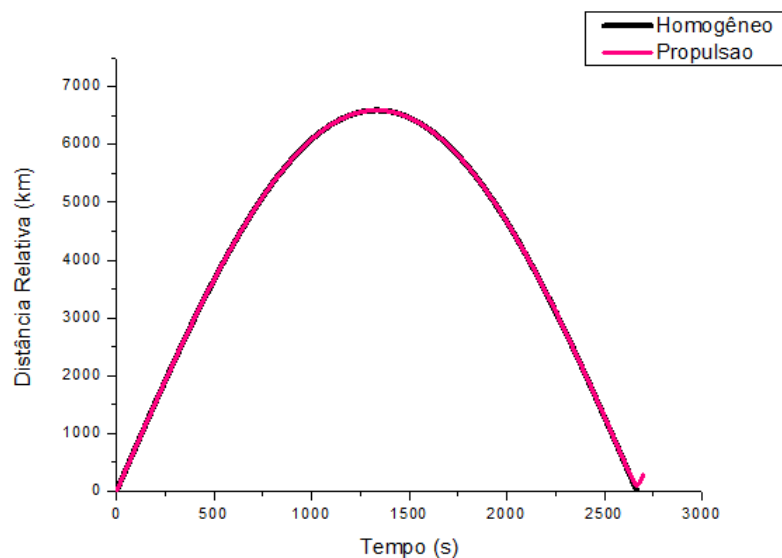


Figura 20: Distância Relativa entre os objetos colisionais vs. Tempo, Modelo plasma

O gráfico mostra que é possível realizar manobras evasivas com a propulsão plasma, mas que escapa-se de objetos pequenos, quando comparados os resultados com os da propulsão química. A Figura 20 mostra duas trajetórias, uma em preto - colisão, e a outra em rosa representa a simulação das soluções do modelo plasma, Equações (4.161), (4.162) e (4.165). A Figura 21, a seguir, mostra apenas a manobra evasiva, propulsada. Para este modelo encontramos a menor distância relativa igual 44 km. Para esta simulação usamos $E=100$ V.m A Figura 22, a seguir, mostra a distância relativa em função do campo elétrico. Observamos que há dois comportamentos desta distância com o campo elétrico. Entre 0 e 100 V.m há uma queda dos valores da distância relativa, ou seja, esta faixa é apropriada para escapar de detritos pequenos. A outra faixa é a dos valores maiores do que 100 V.m, que é apropriada para escapar de detritos grandes. Assim, o campo elétrico é uma grandeza no modelo plasma através da qual é possível se controlar as manobras evasivas em função dos tamanhos dos detritos. A Figura 23, a seguir, mostra os resultados para a distância relativa entre os objetos em função do ângulo. Este ângulo é uma das coordenadas cilíndricas nas quais foram escritos os campos elétrico e magnético.

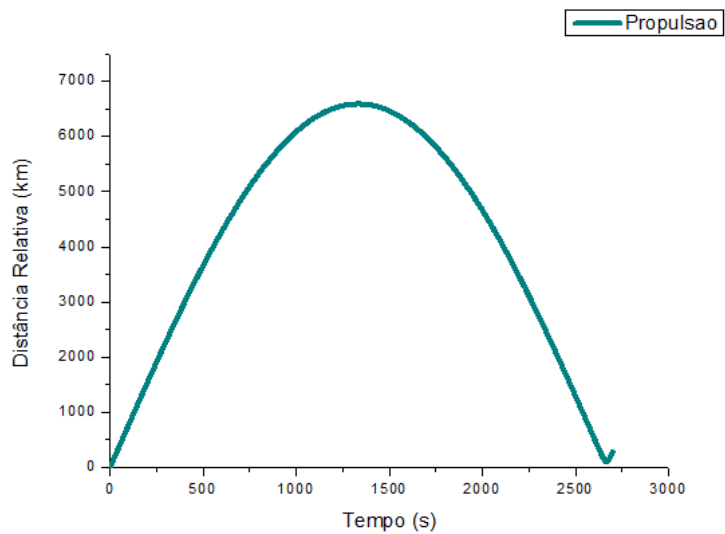


Figura 21: Modelo Plasma, atuação da força de propulsão.

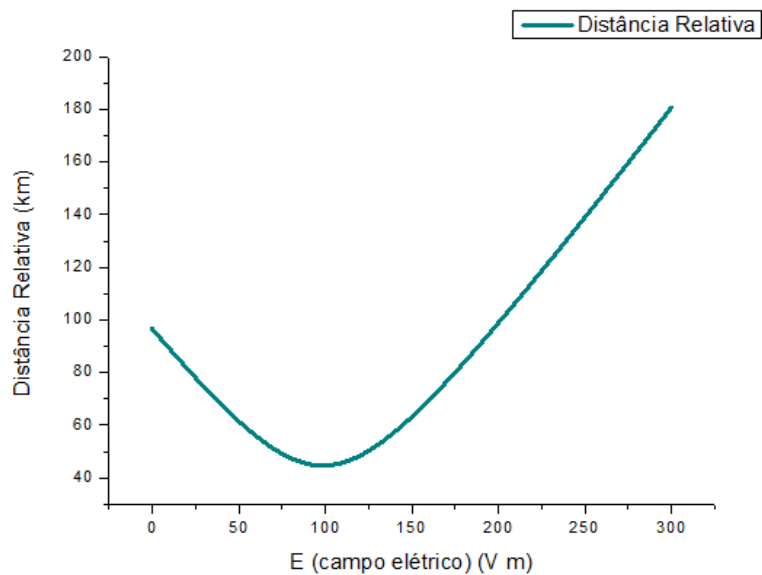


Figura 22: Distância Relativa em função do Campo Elétrico

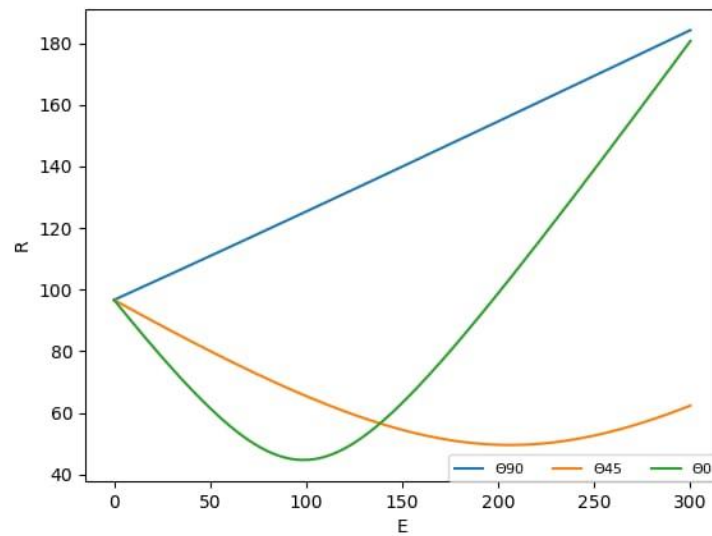


Figura 23 Distância Relativa entre os objetos colisionais vs. Tempo, Propulsão Plasma, ângulos diferentes

O gráfico mostra que o ângulo de 45° permite o escape de detritos pequenos, mesmo para campos elétricos maiores do que 100 V.m., enquanto que o ângulo de 90° não permite escape de detritos pequenos à medida em que o campo elétrico cresce. Este ângulo seria apropriado para escape de detritos cada vez maiores. Assim, percebemos que há faixas de ângulos que combinadas com a intensidade do campo elétrico, podem ser usadas para controlar o escape de um veículo espacial de uma colisão com detritos de diversos tamanhos.

6.6 Densidade atmosférica não constante - Teste de validade

Nesta seção mostramos o gráfico da Figura 24, com o resultado da nossa proposta de solução semi-analítica para a dinâmica relativa com arrasto atmosférico com densidade não constante. O gráfico mostra a densidade resultante da composição feita na Seção 5.1, através da combinação linear das densidades isoladas em cada direção do movimento.

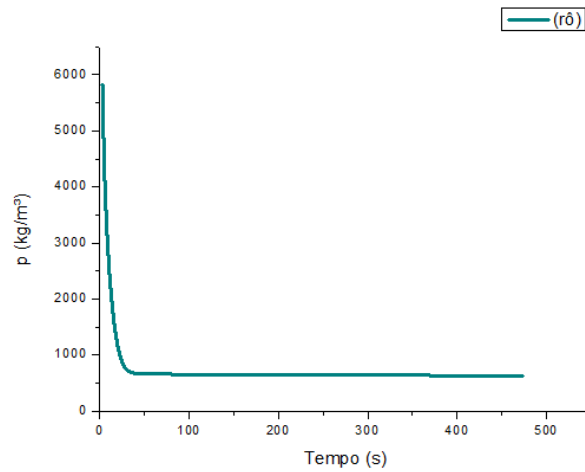


Figura 24: dinâmica relativa com arrasto atmosférico com densidade não constante ρ vs Tempo

O gráfico mostra que à medida em que o tempo passa, a densidade decresce. Este resultado confirma a nossa construção, pois consideramos que em cada direção isolada a densidade decrescia com o inverso do cubo da distância e que a distância crescia com o tempo.

Referências Bibliográficas

02, h. (BBC, 2015).

Abdalla, A., & Deo, N. (2002). Random-tree Diameter and the Diameter-constrained MST. *International Journal of Computer Mathematics*, 79(6), pp. 651-663.

Alon, U. (2009). How To Choose a Good Scientific Problem. *Molecular Cell*, 35(6), 726-728.

Broucke, R. A. (1996). Orbital planar maneuvers using two and three-four (through infinity) impulses. v. 19. N. 2,.

Carter, T. a. (2002). Clohessy-wiltshire equations modified to include quadratic drag. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 25(6):1058-1063.

Clohessy, W. (1960). A terminal guidance system for satellite rendezvous. *Aerospace Sci.*, 29:653_658.

Cordelli, A. F. ((1998)). The influence of the fragmentation threshold on the long term evolution of the orbital debris environment. *Planetary and space science*, 46(6):691_699.

David, A. V. ((2007)). *Fundamentals of astrodynamics and applications*.

Davis, D. R. ((1994).). Asteroid collisional evolution: Results from current scaling algorithms. *Planetary and Space Science*, P. 42(8):599_610.

Debris, S. ((1988)). The report of the esa space debris working group. *ESA SP*, 1109.

Doornbos, E. ., (2005). Atmospheric density calibration using satellite drag observations. *Advances in Space Research* 36, p. 515-521.

Eco, U. (2009). *Como se Faz uma Tese* (22° ed.). *Perspectiva*.

ESA. (2016). *Protecting Space Missions. The Challenge of Space Debris*. [PDF] .

Ferreira, I. S. (2003). Primeiros Resultados do Desenvolvimento de um Propulsor à Plasma por Efeito Hall. *Revista Brasileira de Aplicações de Vácuo* , vol. 22, No. 2, PP. 58-62.

Ferreira, J. L. (2009). Low Thrust Propulsion Technologies using Plasma Thrusters for Solar system small bodies exploration. *Proceedings IAU Symposium No*, 263,.

Higham, N. J. (1998). *Handbook of Writing for the Mathematical Sciences* (segunda ed.). SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics.

Imado, F. a. (1986). Fighter Evasive Maneuvs Against Proportional Navigation Missile. *Journal Aircraft*, vol. 23, n° 11.

- Jesus, A. (1999). Análise Estatística de Manobras Orbitais com Propulsão Finita Sujeita a Erros no Vetor Empuxo . Doctoral Thesis. INPE.São José dos Campos, São Paulo, Brasil. .
- Jesus, A. D. (2007). Rendezvous Maneuvers under Thrust Deviations and Mass Variation. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, vl 7. p.279 - 288.
- Jesus, A. D. (2012). Evasive maneuvers in space debris environment and technological parameters. *Mathematical Problems in Engineering*.
- Jesus, A. D. (2012). Evasive maneuvers in space debris environment and technological parameters. *Mathematical Problems in Engineering*.
- Jesus, A. D. (2015). Evasive Maneuvers in Route Collision with Space Debris Cloud. *Journal Physics: Conference Series* 641 , p.1-7.
- JN, Direto. Destroços de satélite russo ameaçaram Estação Espacial. (2015). <https://www.jn.pt/mundo/interior/destrocos-de-satelite-russo-ameacaram-estacao-espacial-4685340.html>. Acesso em 21/05/2018
- Jung B., K. K. (2003). Guidance law for Evasive Aircraft Maneuvers, AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, 11-14 August, Austin, Texas (AIAA 2003-5552) (DOI: 10.2514 6. 2003 5552) .
- Kessler, D. J. ((1991)). Collisional cascading: The limits of population growth in low earth orbit. *Advances in Space Research*, 11(12):63_66.
- Kessler, D. J.-P. ((1978)). *Journal of Geophysical Research: Space Physics*. (1978-2012), 83(A6):2637_2646.
- Knuth, D. E. (1984). *The Book* (15th ed.). Addison-Wesley.
- Knuth, D. E., Larrabee, T., & Roberts, P. M. (1996). *Mathematical Writing*. The Mathematical Association of America.
- Leonard, C. H. (1989). Orbital formationkeeping with differential drag. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 12(1):108_113.
- Leonard, C. L. (1986). Formationkeeping of spacecraft via differential drag. MS Thesis Draper (Charles Stark) Lab., Inc., Cambridge, MA., 1.
- Lima, J. D. (2017). Qual o tamanho do lixo espacial. E como lidar com o problema. *Nexo*.
- NASA. (1 de Janeiro de 2015). *Orbital Debris Quarterly News*. (National Aeronautics and Space Administration) Acesso em 13 de Junho de 2015, disponível em National Aeronautics and Space Administration: <http://orbitaldebris.jsc.nasa.gov/newsletter/pdfs/ODQNv19i1.pdf>
- Oliveira, E. M. (2016). Manobras Evasivas Subótimas em LEO sujeitas à Força de Arrasto Atmosférico e a colisão com Detritos Espaciais. Dissertação Mestrado, PGCA/UEFS.
- Pinheiro, C. E. (2016). Equações de Clohessy-Wiltshere: modelo linear para variação de massa nas manobras evasivas de veículos espaciais.

- Pôssa, G. C., & Ferreira, J. L. (2009). Desenvolvimento de um Sistema de Detecção de Instabilidades de Plasma para um Propulsor a Plasma tipo Hall. Tese de Mestrado, UNB.
- Reid, T. ((2009)). The Effect of Aerodynamic Drag Forces on the Formation Flying of Satellites.
- Rossi, A. C. ((1994)). Collisional evolution of the earth's orbital debris cloud. *Journal of Geophysical Research: Planets*. 99(E11):23195_2321. .
- Saad, A. N. (2008). Decay of orbits due to the drag of rotation oblate atmosphere. *Planetary and Space Science* 56 . pp. 537-541.
- Shinar, J. a. (1977). Analysis of Optimal Maneuvers based on linearized two-dimensional kinematic model. *Journal of Aircraft*. vol. 1, n° 8, (DOI: 10.2514 3.58855), pp. 795-802.
- Shweighthart, S. A. (2002). Cross-Track Motion of Satellite Formations. IEEE 02-428, IEEE 2002 Aerospace Conference, Big Sky, MT, March.
- Smith, A., & Jones, B. (1999). On the Complexity of Computing. Em A. B. Smith-Jones (Ed.), *Advances in Computer Science* (pp. 555-566). Publishing Press.
- Sousa, R. (2015). Estudo de Manobras evasivas nas Regiões Orbitais, LEO, MEO, e GEO Considerando Perturbações Orbitais .
- Teles, T. N. (2006). Análise Algébrica e Numérica de Manobras de Rendezvous num Ambiente com detritos em formato Flying.
- Tufte, E. (2001). *The Visual Display of Quantitative Information* (2nd ed.). Graphics Pr.
- Verhoef, T. N. (2002). Decay Computation and Impact Point Prediction. *Adv. Space*, v.30, n. 3, pp. 313-319, .
- Wazlawick, R. S. (2009). *Metodologia de Pesquisa em Ciencia da Computação* (Primeira ed.). Campus.
- Well, K. H. (1982). Optinuzation of Tactical Aircraft Maneuvers utilizing High Angles at Attack, . *Journal Guidance*, vol.5, n° 2, March-April, (AIAA 80-1596R) .
- Y. Guo, W. S. (2011). Maneuver Strategy of Evader considering Detection System, AIAA Guidance, Navigation, and Control Conferences 08-11 August.
- Zobel, J. (2004). *Writing for Computer Science: The art of effective communication* (Segunda ed.). Springer.

Apêndice A

Resolução da Equação do Modelo: Dinâmica Relativa sujeito a forças de Arrasto Atmosférico não constante

$$\ddot{x} x^3 + C\dot{x} - 2\omega y^3 \dot{x} - 2xF = 0 \quad (1)$$

Supondo as soluções para x e y :

$$x(t) = e^{m_1 t} f_1(t) \quad (2)$$

$$y(t) = e^{m_2 t} f_2(t) \quad (3)$$

Fazendo as devidas derivadas e substituindo fica:

$$e^{m_1 t} (m_1^2 f_1 + 2m_1 \dot{f}_1 + \ddot{f}_1) (e^{m_1 t} f_1)^3 + C e^{m_1 t} (m_1 f_1 + \dot{f}_1) - 2\omega (e^{m_2 t} f_2)^3 (e^{m_1 t} (m_1 f_1 + \dot{f}_1)) - 2e^{m_1 t} f_1 F = 0 \quad (4)$$

$$e^{4m_1 t} f_1^3 (m_1^2 f_1 + 2m_1 \dot{f}_1 + \ddot{f}_1) + C e^{m_1 t} (m_1 f_1 + \dot{f}_1) - 2\omega e^{(3m_2 + m_1)t} f_2^3 (m_1 f_1 + \dot{f}_1) - 2e^{m_1 t} f_1 F = 0 \quad (5)$$

Dividindo fica:

$$\frac{1}{f_1} (m_1^2 f_1 + 2m_1 \dot{f}_1 + \ddot{f}_1) + C e^{-3m_1 t} \left(\frac{m_1}{f_1^3} + \frac{\dot{f}_1}{f_1^4} \right) - 2\omega e^{-3(m_1 - m_2)t} f_2^3 \left(\frac{m_1}{f_1^3} + \frac{\dot{f}_1}{f_1^4} \right) - \frac{2e^{-3m_1 t} F}{f_1^3} = 0 \quad (6)$$

Onde:

$$m_1 - m_2 \neq 0 \quad (7)$$

$$\frac{\dot{f}_1}{f_1} = \frac{d \ln(f_1)}{dt} \quad (8)$$

$$\frac{\ddot{f}_1}{f_1} = \frac{\dot{f}_1}{f_1} \frac{d \ln(\dot{f}_1)}{dt} = \left[\frac{d \ln(f_1)}{dt} \right] \left[\frac{d \ln(\dot{f}_1)}{dt} \right] \quad (9)$$

$$\frac{d(\ln f_1)}{dt} = G(t) \quad (10)$$

Onde:

$$\frac{e^{-3m_1 t}}{f_1^3} \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow \infty \quad (11)$$

$$e^{-3m_1 t} f_2^3 \rightarrow K \text{ (muito pequeno)} \quad (12)$$

$$C e^{-3m_1 t} \rightarrow 0 \quad (13)$$

$$\left(\frac{M_1}{f_1^3} + \frac{\dot{f}_1}{f_1^4} \right) \rightarrow 0 \quad (14)$$

$$m_1^2 + 2m_1 G(t) + G(t) \frac{d(\ln \dot{f}_1)}{dt} + \left(\frac{m_1}{f_1^3} + \frac{\dot{f}_1}{f_1^4} \right) (C e^{3m_1 t} - 2\omega e^{-3(m_1 - m_2)t} f_2^3) - \frac{2e^{-3m_1 t}}{f_1^3} F = 0 \quad (15)$$

Fazendo as considerações (11) a (15), temos:

$$m_1^2 + 2m_1 G(t) + G(t) \frac{d(\ln \dot{f}_1)}{dt} \cong 0 \quad (16)$$

$$G(t) \cong \frac{-m_1^2}{2m_1 + \frac{d(\ln \dot{f}_1)}{dt}} \quad (17)$$

Substituindo (10) e integrando:

$$\int_0^t \frac{d(\ln \dot{f}_1(t))}{dt} dt \cong m_1^2 \int_0^t \frac{dt}{2m_1 + \frac{d(\ln \dot{f}_1)}{dt}} \quad (18)$$

Considerando $f_1(t)$ um polinômio de 2º grau, temos:

$$f_1(t) = a_x + b_x t + c_x t^2 \quad (19)$$

$$\dot{f}_1(t) = b + 2ct \quad (20)$$

$$\frac{d \ln(b + 2ct)}{dt} = \frac{2c}{b + 2ct} \quad (21)$$

Substituindo em (18), e resolvendo a integral fica:

$$\ln \frac{f(t)}{f(0)} = \ln \frac{f(t)}{a} \cong -m_1^2 \left[\int_0^t \frac{b}{(2m_1 b + 2C) + 4m_1 C t} dt + \int_0^t \frac{2Ct}{(2m_1 b + 2C) + 4m_1 C t} dt \right] \quad (22)$$

Solução da primeira e segunda integral, respectivamente

$$I_1 = \frac{b}{K_2} \ln \left(1 + \frac{K_2 t}{K_1} \right) \quad (23)$$

$$I_1 = \frac{b}{K_2} \ln \left(1 + \frac{K_2 t}{K_1} \right) \quad (24)$$

Onde:

$$K_1 = 2(m_1 b + C) \quad (25)$$

$$K_2 = 4m_1 C \quad (26)$$

Por (22) teremos:

$$\ln \frac{f(t)}{a} \cong -m_1^2 [I_1 + I_2] \quad (27)$$

Aplicando a exponencial:

$$f(t) \cong a e^{-m_1^2 [I_1 + I_2]} \quad (28)$$

Assim:

$$x(t) = e^{m_1 t} \cdot a e^{-m_1^2 [I_1 + I_2]} \quad (29)$$

Substituindo os resultados das integrais e simplificando, teremos:

$$x(t) \cong a_x e^{\frac{m_1}{4} \left\{ 2t + \ln \left[1 + \left(\frac{2m_1 C_x}{m_1 b_x + C_x} \right) t \right] \right\}} \quad (30)$$

Se $m_1 = 1$:

$$x(t) \cong a_x e^{\frac{1}{4} \left\{ 2t + \ln \left[1 + 2 \left(\frac{C_x}{b_x + C_x} \right) t \right] \right\}} \quad (31)$$

Considerando:

$$\left(\frac{C_x}{b_x + C_x} \right) = 1 \quad (32)$$

$$x(t) \cong a_x e^{\frac{1}{4} \{ 2t + \ln(1+2t) \}} \quad (33)$$

$$x(t) \cong a_x e^{\frac{t}{2}} \cdot e^{\frac{1}{4} \ln(1+2t)} \quad (34)$$

Resolvendo em y:

$$\ddot{y} y^3 - 3\omega^2 y^4 + 2\dot{y}E + 2\omega x^3 \dot{y} + Dy = 0 \quad (35)$$

Derivando e fazendo as devidas substituições de (3), substituindo em (35) temos:

$$(e^{m_2 t} f_2)^3 (m_2^2 f_2 + 2m_2 \dot{f}_2 + \ddot{f}_2) e^{m_2 t} - 3\omega^2 (e^{m_2 t} f_2)^4 + 2e^{m_2 t} (m_2 f_2 + \dot{f}_2) E + 2\omega (e^{m_1 t} f_1)^3 e^{m_2 t} (m_2 f_2 + \dot{f}_2) + D (e^{m_2 t} f_2) = 0 \quad (36)$$

$$e^{4m_2 t} f_2^3 (m_2^2 f_2 + 2m_2 \dot{f}_2 + \ddot{f}_2) - 3\omega^2 e^{4m_2 t} f_2^4 + 2e^{m_2 t} (m_2 f_2 + \dot{f}_2) E + 2\omega e^{3m_1 t} f_1^3 (m_2 f_2 + \dot{f}_2) + D e^{m_2 t} f_2 = 0 \quad (37)$$

Dividindo por $e^{4m_2 t} f_2^4$, fica:

$$m_2^2 + 2m_2 \frac{\dot{f}_2}{f_2} + \frac{\ddot{f}_2}{f_2} - 3\omega^2 + 2E e^{-3m_2 t} \left(\frac{m_2}{f_2^3} + \frac{\dot{f}_2}{f_2^4} \right) + 2\omega e^{-3m_2 t} f_1^3 \left(\frac{m_2}{f_2^3} + \frac{\dot{f}_2}{f_2^4} \right) + \quad (38)$$

$$D \frac{e^{-3m_2 t}}{f_2^3} = 0$$

Tomando:

$$m_2 - m_1 = m \quad (39)$$

$$\frac{\dot{f}_2}{f_2} = \frac{d}{dt} \ln(f_2) = G(t) \quad (40)$$

$$\frac{\dot{f}_2}{f_2} \frac{d}{dt} \ln(\dot{f}_2) = G(t) \frac{d}{dt} \ln(f_2) = \frac{\ddot{f}_2}{f_2} \quad (41)$$

Substituindo:

$$m_2^2 + 2m_2 G(t) \frac{d}{dt} \ln(\dot{f}_2) - 3\omega^2 + \left(\frac{m_2}{f_2^3} + \frac{\dot{f}_2}{f_2^4} \right) [2E e^{-3m_2 t} + 2\omega e^{-3m_2 t} f_1^3] \left(\frac{m_2}{f_2^3} + \frac{\dot{f}_2}{f_2^4} \right) + \quad (42)$$

$$D \frac{e^{-3m_2 t}}{f_2^3} = 0$$

Onde,

Quando $t \rightarrow \infty$:

$$\left(\frac{m_2}{f_2^3} + \frac{\dot{f}_2}{f_2^4} \right) \rightarrow 0 \quad (43)$$

$$e^{-3m_2 t} \rightarrow 0 \quad (44)$$

$$f_1^3 e^{-3m_2 t} \rightarrow K'(\text{pequeno}) \quad (45)$$

$$\frac{e^{-3m_2 t}}{f_2^3} \rightarrow 0 \quad (46)$$

Substituindo de (43) a (46) em (42):

$$m_2^2 + 2m_2 G(t) \frac{d}{dt} \ln(\dot{f}_2) - 3\omega^2 \cong 0 \quad (47)$$

$$G(t) \cong \frac{(3\omega^2 - m_2^2)}{2m_2 + \frac{d}{dt} \ln(\dot{f}_2)} \quad (48)$$

Substituindo (41) em (48) e aplicando a integral definida:

$$\int_0^t \frac{d}{dt} \ln(f_2) dt \cong (3\omega^2 - m_2^2) \int_0^t \frac{dt}{2m_2 + \frac{d}{dt} \ln(\dot{f}_2)} \quad (49)$$

$$\ln \frac{f_2(t)}{f(0)} \cong (3\omega^2 - m_2^2) \int_0^t \frac{dt}{2m_2 + \frac{d}{dt} \ln(\dot{f}_2)} \quad (50)$$

Considerando $f_2(t)$ um polinômio de 2º grau, temos

$$f_2(t) = a_y + b_y t + c_y t^2 \quad (51)$$

Derivando:

$$\dot{f}_2(t) = b_y + 2c_y t \quad (52)$$

Substituindo o \ln em (52), temos:

$$\frac{d}{dt} \ln(b + 2ct) = \frac{2c}{b + 2ct} \quad (53)$$

Voltando a integral (50) e substituindo temos:

$$\ln \frac{f_2(t)}{f(0)} \cong (3\omega^2 - m_2^2) \int_0^t \frac{dt(b + 2ct)}{2m_2(b + 2ct) + 2c} \quad (54)$$

Onde:

$$K_1 = (3\omega^2 - m_2^2) \quad (55)$$

$$K_2 = 2(m_2 b + 2ct) \quad (56)$$

$$K_3 = 4cm_2 \quad (57)$$

Substituindo

$$\ln \frac{f_2(t)}{f(0)} \cong K_1 \left[\int_0^t \frac{b dt}{K_2 + K_3} + \int_0^t \frac{2ct dt}{K_2 + K_3} \right] \quad (58)$$

Resolvendo as integrais, substituindo, fazendo algumas simplificações, e tomando $f(0) = a_y$, temos que:

$$y(t) \cong a_y e^{\frac{m_2}{4} \left\{ \frac{m_2^2 - 3\omega^2}{m_2^3} \ln \left(1 + \frac{2c_y m_2 t}{m_2 b_y c_y} \right) + \frac{(3\omega^2 - m_2^2)t}{m_2^2} \right\}} \quad (59)$$

Se $m_2 = 1$,

$$y(t) \cong a_y e^{\frac{1}{4} \{ 1 - 3\omega^2 \ln \left(1 + \frac{2c_y t}{b_y c_y} \right) + (3\omega^2 - 1)t \}} \quad (60)$$

Considerando: (61)

$$\left(\frac{C_y}{b_y + C_y} \right) = 1$$

$$y(t) \cong a_y e^{\frac{1}{4} \{ 1 - 3\omega^2 \ln(1+2t) + (3\omega^2 - 1)t \}} \quad (62)$$

Agora supomos a solução em z :

$$\ddot{z} z^3 + \omega^2 Z^4 + H\dot{z} = 0 \quad (63)$$

$$z(t) = e^{m_3 t} f_3(t) \quad (64)$$

Fazendo a primeira e segunda derivada e substituindo na equação (63), temos:

$$(e^{m_3 t} f_3)^3 e^{m_3 t} (m_3^2 f_3 + \ddot{f}_3 + 2m_3 \dot{f}_3) + K e^{m_3 t} (m_3 f_3 + \dot{f}_3) + \omega (e^{m_3 t} f_3)^4 = 0 \quad (65)$$

Ficando:

$$e^{4m_3 t} f_3^3 (m_3^2 f_3 + 2m_3 \dot{f}_3 + \ddot{f}_3) + K e^{m_3 t} (m_3 f_3 + \dot{f}_3) + \omega e^{4m_3 t} f_3^4 = 0 \quad (66)$$

Simplificando, fica:

$$\left(m_3^2 f_3 + 2m_3 \frac{\dot{f}_3}{f_3} + \frac{\ddot{f}_3}{f_3} \right) + K e^{-3m_3 t} \left(\frac{m_3}{f_3^3} + \frac{\dot{f}_3}{f_3^4} \right) + \omega = 0 \quad (67)$$

Tomando:

$$G(t) = \frac{d(\ln(f_3))}{dt} \quad (68)$$

$$\frac{\ddot{f}_3}{f_3} = G(t) \frac{d(\ln(\dot{f}_3))}{dt} \quad (69)$$

Substituindo (5.82) e (5.83) em (5.81), temos que:

$$m_3^2 + 2m_3 G(t) + G(t) \frac{d(\ln(\dot{f}_3))}{dt} + K e^{-3m_3 t} \left(\frac{m_3}{f_3^3} + \frac{\dot{f}_3}{f_3^4} \right) + \omega = 0 \quad (70)$$

Onde:

Quando $t \rightarrow \infty$

$$\left(\frac{m_3}{f_3^3} + \frac{\dot{f}_3}{f_3^4} \right) \rightarrow 0 \quad (71)$$

$$e^{-3m_3 t} \rightarrow 0 \quad (72)$$

Ficando:

$$m_3^2 + G(t) \left(2m_3 + \frac{d(\ln(\dot{f}_3))}{dt} \right) + 0 + \omega^2 \cong 0 \quad (73)$$

$$G(t) \cong \frac{-\omega^2 - m_3^2}{2m_3 + \frac{d(\ln(\dot{f}_3))}{dt}} \quad (74)$$

Por (74), substituindo e aplicando a integral definida, fica:

$$\frac{d}{dt}(\ln(f_3)) \cong \frac{-(\omega^2 + m_3^2)}{2m_3 + \frac{d(\ln(\dot{f}_3))}{dt}} \quad (75)$$

$$\int_0^t \frac{d}{dt}(\ln(f_3)) \cong -(\omega^2 + m_3^2) \int_0^t \frac{dt}{2m_3 + \frac{d(\ln(\dot{f}_3))}{dt}} \quad (76)$$

$$\frac{\ln f(t)}{f(0)} \cong -(\omega^2 + m_3^2) \int_0^t \frac{dt}{2m_3 + \frac{d(\ln(\dot{f}_3))}{dt}} \quad (77)$$

Tomamos $f(t)$ como um polinômio do 2º grau, teremos:

$$f_3(t) = a_z + b_z t + c_z t^2 \quad (78)$$

$$\dot{f}_3(t) = b + 2ct \quad (79)$$

Substituindo em (77) e arrumando fica:

$$\frac{\ln f(t)}{f(0)} \cong -(\omega^2 + m_3^2) \left[\int_0^t \frac{b_z dt}{(2m_3 b_z + 2c_z) + 4m_3 c_z t} + \int_0^t \frac{2c_z t dt}{(2m_3 b_z + 2c_z) + 4m_3 c_z t} \right] \quad (80)$$

Resolvendo as integrais, tomando $f(0) = a_z$, e fazendo algumas arrumações, temos que:

$$z(t) \cong a_z e^{\frac{1}{4m_3} \left\{ -2(\omega - m_3^2)t + \frac{(m_3^2 + \omega)}{m_3} \ln \left(1 + \frac{2m_3 c_z t}{m_3 b_z + c_z} \right) \right\}} \quad (81)$$

Se $m_3 = 1$,

$$z(t) \cong a_z e^{\frac{1}{4} \left\{ -2(\omega - 1)t + (1 + \omega) \ln \left(1 + \frac{2c_z t}{b_z + c_z} \right) \right\}} \quad (82)$$

$$\left(\frac{C_z}{b_z + C_z} \right) = 1 \quad (83)$$

Encontrando a_x , a_y , e a_z

Tomando:

$$(1 + 2t) = a(t) \quad (84)$$

$$(1 - 3\omega^2) = b \quad (85)$$

$$(1 + 3\omega^2) = c \quad (86)$$

$$(1 - \omega) = d \quad (87)$$

$$(1 + \omega) = f \quad (88)$$

Substituindo fica:

$$x(t) \cong a_x e^{\frac{t}{2}} \cdot a(t)^{\frac{1}{4}} \quad (89)$$

Aplicando primeira e segunda derivada, e fazendo algumas simplificações, temos:

$$\dot{x}(t) \cong a_x e^{\frac{t}{2}} \cdot \left\{ a(t)^{\frac{1}{4}} + a(t)^{\frac{-3}{4}} \right\} \quad (90)$$

$$\ddot{x}(t) \cong \frac{a_x}{4} e^{\frac{t}{2}} \left\{ a(t)^{\frac{1}{4}} + 2a(t)^{\frac{-3}{4}} - 3a(t)^{\frac{-7}{4}} \right\} \quad (91)$$

$$y(t) \cong a_y a(t)^{\frac{b}{4}} e^{\frac{c}{4}t} \quad (92)$$

$$\dot{y}(t) \cong \frac{a_y}{4} e^{\frac{c}{4}t} \left\{ ca(t)^{\frac{b}{4}} + 2ba(t)^{\frac{b-4}{4}} \right\} \quad (93)$$

$$\ddot{y}(t) \cong \frac{a_y}{16} e^{\frac{c}{4}t} \left\{ c^2 a^{\frac{b}{4}}(t) + 4bc e^{\frac{b-4}{4}} + (2b^2 - 8b)e^{\frac{b-8}{4}} \right\} \quad (94)$$

Substituindo de (89) a (94) em (1), temos:

$$\frac{a_x^4}{4} e^{\frac{t}{4} + \frac{3t}{2}} \left\{ a^{\frac{1}{4}} + 2a^{\frac{-3}{4}} - 3a^{\frac{-7}{4}} \right\} a^{\frac{3}{4}} - \frac{ca_x}{2} e^{\frac{t}{2}} \left\{ a^{\frac{1}{4}} + a^{\frac{-3}{4}} \right\} - 2\omega a_y^3 a^{\frac{3b}{4}} e^{\left(\frac{3ct}{4} + \frac{t}{2}\right)} \frac{a_x}{2} \left\{ a^{\frac{1}{4}} + a^{\frac{-3}{4}} \right\} - \quad (95)$$

$$2a_x e^{\frac{t}{2}} a^{\frac{1}{4}} F = 0$$

Organizando, teremos que:

$$a_x = \sqrt[3]{\frac{4e^{-\frac{3}{2}t} \left\{ 2F(1+2t)^{\frac{1}{4}} + \left[(1+2t)^{\frac{1}{4}} + (1+2t)^{\frac{-3}{4}} \right] \left[\frac{(1+3\omega^2)}{2} + a_y^3(1+2t)^{\frac{3(1+3\omega^2)}{4}} e^{\frac{3(1+3\omega^2)t}{4}} \right] \right\}}{\{(1+2t) + 2 - 3(1+2t)^{-1}\}}} \quad (96)$$

Com restrição de $t \neq 0$.

Substituindo de (89) a (94) em (35), temos:

$$\frac{a_y}{16} e^{\frac{c}{4}t} \left\{ c^2 a^{\frac{b}{4}} + 4bc e^{\frac{b-4}{4}} + (2b^2 - 8b)e^{\frac{b-8}{4}} \right\} \left\{ a_y^3 a^{\frac{3b}{4}} e^{\frac{3c}{4}t} \right\} - 3\omega^2 \{ a_y^4 a^b e^{ct} \} + \quad (97)$$

$$2 \frac{a_y}{4} e^{\frac{c}{4}t} \left\{ ca^{\frac{b}{4}} + 2be^{\frac{b-4}{4}} \right\} E + 2\omega \left\{ a_x e^{\frac{t}{2}} (1+2t)^{\frac{1}{4}} \right\}^3 \left\{ \frac{a_y}{4} e^{\frac{c}{4}t} \left\{ ca^{\frac{b}{4}} + 2be^{\frac{b-4}{4}} \right\} \right\} +$$

$$Da_y a^{\frac{b}{4}} e^{\frac{c}{4}t} = 0$$

Fazendo algumas operações, simplificações e arrumando fica:

$$a_y = \sqrt[3]{\frac{16e^{-\frac{3}{4}(1+3\omega^2)} \left\{ D(1+2t)^{\frac{(1+3\omega^2)}{4}} + e^{-\frac{(1+3\omega^2)}{4}} \left[(1+3\omega^2)(1+2t)^{\frac{(1+3\omega^2)}{4}} + 2(1-3\omega^2)e^{-\frac{3}{4}(1+\omega^2)} \right] I \right\}}{48\omega^2(1+2t)^{(1-3\omega^2)} + \left[(1+3\omega^2)^2(1+2t)^{(1-3\omega^2)} + 4(1-3\omega^2)(1+3\omega^2)(1+2t)^{\frac{3}{4}(1-3\omega^2)} e^{-\frac{3}{4}(1+3\omega^2)} + I_1 \right] I_3}} \quad (98)$$

$$I = \left[\frac{E}{2} + \omega \frac{a_x^3}{2} (1+2t)^{\frac{3}{4}} e^{\frac{3}{2}t} \right] \quad (99)$$

$$I_2 = 6(1+\omega^2)(3\omega^2-1)e^{-\frac{3(1+\omega^2)}{4}} \quad (100)$$

$$I_3 = (1+2t)^{\frac{3(1-3\omega^2)}{4}} \quad (101)$$

Como temos um denominador, fizemos o cálculo da restrição, isto é:

$$t \neq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt[4]{\left(\frac{e^{\frac{3}{4}(1+\omega^2)(45-\frac{1}{\omega^2})}}{2\left(-\frac{1}{\omega^2}+3\right)(1-3\omega^2)} \right)^{(1-3\omega^2)}}} - 1 \right] \quad (102)$$

Se $(1-3\omega^2) = 0$, viola o denominador, então precisamos considerar duas coisas

$$\omega^2 \neq \frac{1}{3} \quad (103)$$

$$\ddot{z} z^3 + \omega^2 Z^4 + H\dot{z} = 0 \quad (104)$$

$$z(t) \cong a_z e^{\frac{d}{2}t} a^{\frac{f}{4}} \quad (105)$$

$$\dot{z}(t) \cong \frac{a_z}{2} e^{\frac{d}{2}t} \left\{ da^{\frac{f}{4}} + fa^{\frac{f-4}{4}} \right\} \quad (106)$$

$$\ddot{z}(t) \cong \frac{a_z}{4} e^{\frac{d}{2}t} \left\{ d^2 a^{\frac{f}{4}} + 2fda^{\frac{f-4}{4}} + f(f-4)a^{\frac{f-8}{4}} \right\} \quad (107)$$

Substituindo na equação (105) a (107) em (104), temos:

$$\frac{a_z}{4} e^{\frac{d}{2}t} \left\{ d^2 a^{\frac{f}{4}} + 2fda^{\frac{f-4}{4}} + f(f-4)a^{\frac{f-8}{4}} \right\} \left\{ a_z e^{\frac{d}{2}t} a^{\frac{f}{4}} \right\}^3 + K \frac{a_z}{2} e^{\frac{d}{2}t} \left\{ da^{\frac{f}{4}} + fa^{\frac{f-4}{4}} \right\} + \quad (108)$$

$$\omega \left\{ a_z e^{\frac{d}{2}t} a^4 \right\}$$

Fazendo algumas operações, arrumando fica:

$$a_z = \sqrt[3]{\frac{-2K e^{\frac{-3}{2}(1-\omega)t} (1+2t)^{\frac{-(11+3\omega)}{4}} \left[(1-\omega) + (1+\omega)(1+2t)^{\left(-1+\frac{\omega}{2}\right)} \right]}{[(1-\omega)^2 + 4\omega](1+2t)^{-2} + (1+\omega)[(\omega-3) + 2(1+2t)]}} \quad (109)$$