Universidade Estadual de Feira de Santana

Departamento de Ciências Exatas

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado

EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES COM N VARIÁVEIS E APLICAÇÃO EM SALA DE AULA UTILIZANDO O GEOGEBRA

Adna Leile Araujo Damasceno Silva

Orientador: Prof. Dr. Maurício de Araujo Ferreira

Feira de Santana - Bahia

2019

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Departamento de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES COM N VARIÁVEIS E APLICAÇÃO EM SALA DE AULA UTILIZANDO O GEOGEBRA

Adna Leile Araujo Damasceno Silva

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre**.

Orientador: Prof. Dr. Maurício de Araujo Ferreira

Feira de Santana - Bahia

2019

Ficha catalográfica - Biblioteca Central Julieta Carteado - UEFS

Silva, Adna Leile Araujo Damasceno
S578e Equações diofantinas lineares com n variáveis e aplicações em sala de aula utilizando o GeoGebra / Adna Leile Araujo Damasceno Silva . - 2019.
61f.: il.

Orientador: Maurício de Araujo Ferreira
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Feira de Santana. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, 2019.

1. Equações diofantinas. 2. GeoGebra – Aplicativo de matemática. I. Ferreira, Maurício de Araujo, orient. II. Universidade Estadual de Feira de Santana. III. Título.

CDU: 517.9

Rejane Maria Rosa Ribeiro – Bibliotecária CRB5/695

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DA DISCENTE ADNA LEILE ARAUJO DAMASCENO SILVA DO PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Aos treze dias do mês de novembro de dois mil e dezenove às 8h30 na sala 03 - LABOFIS, UEFS, ocorreu a Sessão pública de defesa de dissertação apresentada sob o título **"Equações Diofantinas Lineares com n Variáveis e Aplicação em Sala de Aula Utilizando o Geogebra"**, da discente **Adna Leile Araujo Damasceno Silva**, do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Maurício de Araujo Ferreira (Orientador, UEFS), Edward Landi Tonucci e Flávia Cristina de Macêdo Santana (UEFS). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pela discente e das arguições dos examinadores.
Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito: aprovado.
Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT. Feira de Santana, 13 de novembro de 2019.

Prof. Dr. Maurício de Araujo Ferreira (UEFS)
Orientador

Prof. Dr. Edward Landi Tonucci

Flávia Cristina de Macêdo Santana
Profa. Dra. Flávia Cristina de Macêdo Santana (UEFS)

Visto do Coordenador:

Profª Drª Ana Carla Percontini da Paixão
Coordenadora do Profmat / UEFS

Agradecimentos

A Deus por ter me dado força, coragem e sabedoria para executar esse grande passo na minha vida pois, como está escrito em Provébios 2:6 "porque é o Senhor quem dá a sabedoria e de sua boca é que procedem a ciência e a prudência".

Ao meu esposo (Sérgio) e minha filha (Angelina) que por noites a fio foram privados de minha companhia e souberam ser pacientes e amorosos.

Ao meu orientador Maurício de Araujo Ferreira pelo suporte, paciência, dedicação, compromisso, correções e incentivos.

Aos meus colegas de turma Graziela, Cléber, João, Cezário, Liliane, Karol, William e em especial Eliene que esteve sempre presente.

À CAPES por subsidiar os meus estudos.

À Universidade Estadual de Feira de Santana por mais uma vez subsidiar mais um sonho meu.

Resumo

O trabalho descrito é uma proposta de inserção do conteúdo de equações diofantinas lineares para alunos do 9° ano do ensino fundamental e um estudo de equações diofantinas lineares para três variáveis e também o caso geral com n variáveis. Meu objetivo foi analisar o processo de transformação do conteúdo de equações diofantinas lineares para fins de ensino na educação básica a partir de tópicos da disciplina de teoria dos números. Como divisibilidade, máximo divisor comum, números primos e fatoração, aplicando problemas do cotidiano que envolve equações diofantinas lineares. Foi utilizado o software Geogebra para análise dos resultados obtidos a partir de um problema proposto. Ao serem apresentados ao conteúdo, os alunos puderam identificar ações que são praticadas por eles no dia-a-dia que refletem numa equação diofantina e puderam também verificar que as soluções das equações diofantinas correspondem a pontos do gráfico de uma função afim.

Palavras-chave: Equações diofantinas; Geogebra.

Abstract

The work described here is a proposal of inserting the content of linear diophantine equations for 9th grade students and a study of linear diophantine equations for three variables and also the general case with n variables. My objective was to analyze the process of transforming the content of linear diophantine equations for teaching purposes in basic education from topics of the theory of number theory. Such as divisibility, maximum common divisor, prime numbers and factorization, applying everyday problems involving linear diophantine equations. Geogebra software was used to analyze the results obtained from a proposed problem. By being presented to the content, students were able to identify actions that are practiced by them in everyday life that reflect a diophantine equation and could also verify that the solutions of diophantine equations correspond to points in the graph of a related function.

Keywords: Diophantine equations; Geogebra.

Sumário

Introdução

Conforme Howard Eves em *Introdução a história da matemática* e o site *biografiaecuriosidades.blogpost.com.br*, Diofanto de Alexandria, foi um matemático grego (séc III), de cuja vida pouco se conhece, teria vivido em Alexandria, na época um grande centro cultural. Teve uma importância enorme para o desenvolvimento da álgebra e uma grande influência sobre os europeus que posteriormente se dedicaram a teoria dos números. Quase tudo que conhecemos sobre a vida pessoal de Diofanto está contido no seguinte sumário de um epitáfio que aparece na *Antologia Grega*:
"Diofanto passou $\frac{1}{6}$ de sua vida como criança, $\frac{1}{12}$ como adolescente e mais $\frac{1}{7}$ na condição de solteiro. Cinco anos depois de se casar nasceu-lhe um filho que morreu 4 anos antes de seu pai, com metade da idade (final) de seu pai".

Daí podemos representar uma equação algébrica e descobrirmos com quantos anos Diofanto morreu resolvendo a equação abaixo.

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4.$$

Como x representa sua idade, resolvendo a equação obtemos que ele viveu até os 84 anos de idade.

Diofanto escreveu três trabalhos: *Aritmética*, seria constituída por 13 volumes, dos quais se conhecem 6; *Números Poligonais* do qual restou apenas um fragmento; e *Porismas*, que se perdeu.

A *Obra Aritmética* é uma abordagem analítica da teoria algébrica dos números que eleva o autor à condição de gênio em seu campo. A parte remanescente do trabalho se dedica a resolução de 130 problemas, numa variedade considerável. A *Obra Aritmética* se ocupa de equações determinadas em uma incógnita e *Números Poligonais* e *Porismas* tratam de equações indeterminadas de segundo grau, e às vezes de maior grau, em duas ou três incógnitas. É notável a falta de métodos gerais e a aplicação repetida de artifícios engenhosos ideados para as necessidades de cada problema específico. Diofanto só admitia respostas entre os números racionais positivos e, na maioria dos casos, satisfazia-se com apenas uma solução do problema. Os problemas algébricos indeterminados em que se devem achar apenas soluções racionais tornaram-se conhecidos como problemas diofantinos.

Pode ter sido ele o primeiro a dar os primeiros passos rumo a uma notação algébrica. Esses passos têm a natureza de abreviações estenográficas.

As equações diofantinas são todas as equações polinomiais (não importa o número de incógnitas) com coeficientes inteiros, sempre que seu estudo seja feito tomando como universo das variáveis o conjunto dos números inteiros. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n, c$ inteiros fixados. Uma equação diofantina linear em n variáveis é da forma

$$a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n = c.$$

O trabalho que elaborei e que se encontra no apêndice, foi aplicado numa turma do 9° ano do ensino fundamental, na cidade de Santo Amaro da Purificação, no estado da Bahia, com carga horária de 10 horas, visando a revisão de assuntos que foram dados no 6° e 7° anos do ensino fundamental e dar uma enfase a conteúdos do 9° ano proposto pela BNCC (Base Nacional Comum Curricular).

A seguir faremos um breve resumo sobre os capítulos da dissertação. No primeiro capítulo abordaremos alguns assuntos introdutórios de aritmética, que serve de base para o trabalho, com algumas simples demonstrações. No segundo capítulo estudaremos equações diofantinas lineares com duas incógnitas e alguns problemas. No terceiro capítulo estudaremos equações diofantinas lineares com três incógnitas e o caso geral com n incógnitas. No quarto capítulo veremos a aplicação das equações diofantinas lineares com o uso do *software Geogebra* e uma sequência de ensino para sua aplicação na sala de aula para uma turma de 9º ano. Todo o processo de elaboração e execução estão descritos nesse capítulo. No capítulo 5 temos a conclusão do meu trabalho.

Capítulo 1

Máximo Divisor Comum

Neste capítulo serão apresentados alguns conceitos sobre divisibilidade no conjunto dos números inteiros, bem como máximo divisor comum (mdc) e suas propriedades, essenciais para o desenvolvimento da teoria para equações diofantinas lineares. As referências [5], [10] e [12] foram importantes para o desenvolvimento do mesmo.

1.1 Conceitos Iniciais

Para falarmos de mdc precisaremos do princípio da boa ordenação e da definição de divisibilidade.

Princípio da Boa Ordenação. Todo subconjunto não vazio $A \subset \mathbb{Z}$, limitado inferiormente possui um menor elemento, isto é, existe $n_0 \in A$ tal que para todo $n \in A$, $n_0 < n$.

Uma consequência importante do Princípio da Boa Ordenação é o chamado Princípio da Indução Finita, enunciado a seguir:

Princípio da Indução Finita. Sejam S um Subconjunto de $\mathbb{Z}$ e $a \in \mathbb{Z}$ tais que

i) $a \in S$;

ii) $\forall n, n \in S \Rightarrow n + 1 \in S$.

Então $\{x \in \mathbb{Z}; x \geqslant a\} \subset S$.

A partir do Princípio da Indução Finita, obtemos um método de prova, chamado de Prova da Indução Matemática. Esse método consiste mostrar que uma propriedade é verdadeira. Para isso,primeiramente verificamos que a propriedade é válida para o primeiro caso particular. Na sequência, assumimos que a propriedade é válida para os primeiros n casos e em seguida provamos que a propriedade é válida para o caso $n+1$.

A seguir temos a definição de divisibilidade.

Definição 1.1. Se a e b são números inteiros dizemos que a divide b, denotando por $a|b$, se existir um inteiro c tal que $b = ac$. Se a não divide b escrevemos $a \nmid b$.
Sejam dados dois inteiros a e b. Um número inteiro será dito um divisor comum de a e b se $d|a$ e $d|b$.

Por exemplo, os números $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$ são os divisores comuns de 20 e 30.

1.2 MDC

A definição a seguir é essencialmente a definição dada por Euclides Nos Elementos e constitui-se em um dos pilares da sua aritmética.

Definição 1.2. Diremos que um número inteiro $d > 0$ é o máximo divisor comum, (mdc) de a e b, se possuir as seguintes propriedades:

i) d é um divisor comum de a e b.

ii) Se c é um divisor comum de a e b tal que $c|a$ e $c|b$ então $c|d$.

Notação: $d = \text{mdc}(a, b)$ e $\text{mdc}\ (a, b) = (a, b)$

A condição ii) acima, implica que, se d e d' são dois mdc de um mesmo par de números, então $d|d'$ e $d'|d$, o que juntamente com as condições $d > 0$ e $d' > 0$, implica $d = d'$. Ou seja, o mdc de dois números quando existe, é único. Da propriedade decorre diretamente que $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(b, a)$. Quanto à existência do mdc, examinaremos primeiro o caso $a = 0$ e $b > 0$ e mostraremos que então $b = \text{mdc}(0, b)$. De fato, $b|0$ e $b|b$ e se $c|0$ e $c|b$, convencionamos obviamente $c|b$. O $mdc(0, 0) = 0$. Como todo número inteiro divide 0, o mdc de a e b, onde $a = b = 0$, é 0, pois esse é um divisor comum de a e b e é o único número divisível por todos os divisores de 0. Reciprocamente, se o mdc de a e b é 0, então 0 divide a e divide b, mas o único número divisível por 0 é o próprio 0, logo $a = b = 0$.
No que veremos dois teoremas que fornecem propriedades importantes do mdc. Suponhamos $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

Teorema 1.3. *$a|b$ se e somente se $mdc(a, b) = |a|$.*

Demonstração. De fato, se $a|b$, temos que $|a|$ é um divisor comum de a e b, e se c é um divisor comum de a e b, então $c|a$ o que mostra que $|a| = \text{mdc}(a, b)$. Reciprocamente, se $\text{mdc}(a, b) = |a|$ segue que $|a|$ divide b, logo $a|b$. $\square$

Teorema 1.4. *Se $a = bq + r$ com q e r inteiros então $mdc(a, b) = mdc(b, r)$.*

Demonstração. Se $d = \text{mdc}(a, b)$ então $d|a$ e $d|b$. Desta última relação resulta que $d|bq$. Logo $d|(a-bq)$, logo, $d|r$. Por outro lado, se $c|b$ e $c|r$, então $c|(bq+r)$ devido a propriedade i). Como $bq + r = a$, então $c|a$ e $c|b$, o que implica $c|d$, já que $d = \text{mdc}(a, b)$. □

Retomando a questão da existência do máximo divisor comum. Para provar a existência aplicaremos sucessivamente, a partir de a e b, o algoritmo da divisão de Euclides da seguinte maneira:

$$a = bq_1 + r_1 (r_1 < b),$$

$$b = r_1 q_2 + r_2 (r_2 < r_1),$$

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3 (r_3 < r_2).$$

É claro que, se acontecer de r_1, ser nulo, então o Teorema 1.3 nos garante que $b = mdc(a, b)$ e o processo termina na primeira etapa. Caso contrário, na sequência $b > r_1 > r_2 > r_3 > ...$ para algum índice n deverá ocorrer $r_{n+1} = 0$. De fato, se todos os r forem não nulos, então $b, r_1, r_2, ...$ não teria mínimo, o que não é possível. Assim para algum n, temos

$$r_{n-2} = r_{n+1} . q_n + r_n,$$

$$r_{n-1} = r_n . q_{n+1}.$$

Como sequência das proposições anteriores, obtem-se então o seguinte:

$$r_n = \text{mdc}(r_n, 0) = \text{ mdc } (r_{n-1}, r_n) = \text{ mdc } (r_{n-1}, r_{n-2}) = ... = \text{ mdc } (b, r_1) = \text{ mdc } (a, b),$$

ou seja, $r_n = $ mdc (a, b), isso nos garante a existência do mdc. O algoritmo acima pode ser sintetizado e realizado na prática, conforme a seguir. Iniciamos efetuando a divisão $a = bq_1 + r_1$ e preenchendo no diagrama

	q_1	
a	b	
r_1		

continuando a divisão $b = r_1 q_2 + r_2$

	q_1	q_2
a	b	r_1
r_1	r_2	

prosseguindo;

	q_1	q_2	q_2	...	q_{n-1}	q_n	q_{n+1}
a	b	r_1	r_2	...	r_{n-2}	r_{n-1}	$r_n = mdc(a,b)$
r_1	r_2	r_3	...	r_{n-1}	r_n	0	

Essa demonstração é obviamente construtiva e o dispositivo prático que se costuma empregar para aplicá-la é conhecido como Algoritmo de Euclides Estendido.

Exemplo 1.5. Achemos, por esse processo, $\text{mdc}\,(41,12)$

$$\begin{aligned} 41 &= 12\cdot 3+5,\\ 12 &= 5\cdot 2+2,\\ 5 &= 2\cdot 2+1,\\ 2 &= 1\cdot 2. \end{aligned}$$

Logo, $1 = \text{mdc}\,(41,12)$. Usualmente procede-se assim:

	3	2	2	2
41	12	5	2	1
5	2	1	0	

O algoritmo de Euclides nos fornece com relação aos restos que

$$1 = 5-2\cdot 2, \tag{1.1}$$
$$2 = 12-2\cdot 5, \tag{1.2}$$
$$5 = 41-3\cdot 12. \tag{1.3}$$

Substituindo (1.2) em (1.1) temos

$$1 = 5-2\cdot(12-2\cdot 5) \tag{1.4}$$
$$= 5-2\cdot 12+4\cdot 5 \tag{1.5}$$
$$= 5\cdot 5-2\cdot 12, \tag{1.6}$$

substituindo (1.3) em (1.6)

$$\begin{aligned} 1 &= 5\cdot(41-3\cdot 12)-2\cdot 12\\ &= 5\cdot 41-15\cdot 12-2\cdot 12\\ &= 5\cdot 41-17\cdot 12\\ &= 205-204. \end{aligned}$$

Por meio do uso do algoritmo de Euclides, de trás para frente, podemos escrever $1 = \text{mdc}(41,12)$ como múltiplo de 41 mais um múltiplo de 12.

Teorema 1.6. ***(Teorema de Bézout).*** *Seja d o máximo divisor comum entre a e b, então existem números inteiros m_0 e n_0 tais que $d = n_0 \cdot a + m_0 \cdot b$.*

Demonstração. Seja A o conjunto de todas as combinações lineares $\{n \cdot a + m \cdot b\}$ em que n e m são inteiros. Este conjunto contém números positivos, negativos e também o zero. Vamos escolher m_0 e n_0 tais que $c = n_0 \cdot a + m_0 \cdot b$, seja o menor inteiro positivo pertencente ao conjunto A. Vamos provar que $c|a$ e $c|b$. Vamos provar por contradição que $c|a$. Suponha que $c \nmid a$. Neste caso, pelo Algoritmo de Euclides existem q e r tais que $a = q \cdot c + r$ com $0 < r < c$. Portanto,

$$\begin{aligned} r &= a - q \cdot c \\ &= a - q \cdot (n_0 \cdot a + m_0 \cdot b) \\ &= (1 - q \cdot n_0) \cdot a + (-q \cdot m_0) \cdot b. \end{aligned}$$

Isso mostra que $r \in A$, pois $(1 - q \cdot n_0)$ e $(-q \cdot m_0)$ são inteiros, o que é uma contradição, uma vez que $0 < r < c$ é o menor elemento positivo de A. Logo, $c|a$, e de forma análoga se prova que $c|b$. Como d é o divisor comum de a e b, existem inteiros k_1 e k_2 tais que $a = k_1 \cdot d$ e $b = K_2 \cdot d$ e, portanto,

$$\begin{aligned} c &= n_0 \cdot a + m_0 \cdot b \\ &= n_0 \cdot k_1 \cdot d + m_0 \cdot k_2 \cdot d \\ &= d \cdot (n_0 \cdot k_1 + m_0 \cdot k_2), \end{aligned}$$

o que implica que $d|c$. Daí, temos que $d < c$ (ambos positivos) e como $d < c$ não é possível, pois d é o máximo divisor comum, concluímos que $d = c = n_0 \cdot a + m_0 \cdot b$. $\square$

Definição 1.7. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Definimos o conjunto

$$I(a, b) = \{x \in \mathbb{Z}; \text{ existem } u, v \in \mathbb{Z}, \text{ tal que } x = ua + vb\}.$$

Note que se a e b não são simultaneamente nulos, então $I(a, b) \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$.

Teorema 1.8. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ e seja $d =$ $min\ I(a, b) \cap \mathbb{N}$ tem-se que:*

i) d é o mdc(a, b)

ii) $I(a, b) = d\mathbb{Z}$

Demonstração. i) Suponhamos que c divida a e b logo, c divide todos os números naturais da forma $ua + vb$, portanto divide todos os elementos de $I(a, b)$ e consequentemente $c|d$.

Vamos mostrar que d divide todos os elementos de $I(a,b)$. Seja $x \in I(a,b)$ e suponha por absurdo que $d \nmid x$. Logo pela divisão euclidiana, $x = dq + r$, com $0 < r < d$. Como $x = ua + vb$ e $d = ma + nb$, para alguns $u, v, m, n \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$\begin{aligned} r &= x - dq \\ &= (ua + vb) - q.(ma + nb) \\ &= (u - qm)a + (v - nq)b \in I(a,b) \cap \mathbb{N} \end{aligned}$$

o que é um absurdo, pois $d = minI(a,b) \cap \mathbb{N}$ e $r < d$. Portanto $d|x$.

ii) Dado que todo elemento de $I(a,b)$ é divisível por d, temos que $I(a,b) \subset d\mathbb{Z}$. Por outro lado, para todo $xd \in d\mathbb{Z}$. Em particular $d|a$ e $d|b$. Como $d \in I(a,b)$, temos $d = ma + nb$ com $m, n \in \mathbb{Z}$. Logo, $xd = x(ma + nb) = (xm)a + (xn)b \in I(a,b)$ e, portanto, $d\mathbb{Z} \subset I(a,b)$. Assim, temos que $I(a,b) = d\mathbb{Z}$.

□

Proposição 1.9. *Quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ não nulos e $n \in \mathbb{N}$, tem-que:*

$$mdc(na, nb) = n\ mdc\ (a,b).$$

Demonstração. Note inicialmente que $I(na, nb) = nI(a,b) = \{nz \text{ tal que } z \in I(a,b)\}$. Agora o resultado segue do Teorema 1.8 e do fato de que

$$min(nI(a,b) \cap \mathbb{N}) = n\, min(I(a,b) \cap \mathbb{N}).$$

□

Proposição 1.10. *Dados $a, b \in \mathbb{N}$, tem-se que* $\left(\frac{a}{(a,b)}, \frac{b}{(a,b)}\right) = 1$.

Demonstração. Pela Proposição 1.9, temos:

$$(a,b).\left(\frac{a}{(a,b)}, \frac{b}{(a,b)}\right) = \left((a,b).\frac{a}{(a,b)}, (a,b).\frac{b}{(a,b)}\right) = (a,b),$$

o que prova o resultado. □

Proposição 1.11. *Dois números naturais a e b são primos entre si se, e somente se, existem números naturais n e m tais que $na - mb = 1$.*

Demonstração. Suponha que a e b sejam primos entre si, logo, mdc$(a,b) = 1$. Como pelo Teorema 1.8, temos que existem números naturais n e m tais que $na + mb = (a,b) = 1$. Reciprocamente, suponham que existam números inteiros n e m tais que $na + mb = 1$. Se $d = (a,b)$, temos que $d|(na + mb)$, o que mostra que $d|1$ e portanto $d = 1$. □

Proposição 1.12. *Sejam a,b e c números naturais. Se* $a|b \cdot c$ *e* $mdc\,(a,b) = 1$*, então* $a|c$.

Demonstração. Se $a|bc$, então existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $bc = ax$. Se $\text{mdc}\,(a,b) = 1$, pela Proposição 1.11, temos que existem $m, n \in \mathbb{N}$ tais que:

$$na + mb = 1,$$

multiplicando por c em ambos os membros temos,

$$nac + mbc = c,$$

como $bc = ax$, temos

$$nac + max = c,$$

assim

$$a(nc + mx) = c,$$

logo $a|c$.

$\square$

Capítulo 2

Equações Diofantinas Lineares de duas Variáveis

Neste capítulo, utilizaremos a noção de máximo divisor comum para resolver equações diofantinas lineares, especialmente com duas variáveis e alguns problemas do cotidiano envolvendo essas equações. As referências [5], [9] e [10] foram importantes para elaboração deste capítulo.

A resolução de vários problemas de aritmética recai na resolução, em números inteiros, de equação do tipo,

$$aX + bY = c, \text{ com } a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

Tais equações são chamadas equações Diofantinas lineares, em homenagem a Diofanto de Alexandria. Nem sempre elas tem solução. Por exemplo, a equação $4X + 6Y = 3$, não possui solução em números inteiros, pois $4X_0 + 6Y_0$ par, com $X_0, Y_0 \in \mathbb{Z}$ par e, portanto, nunca igual a 3. Nas duas proposições a seguir veremos em quais condições as equações diofantinas tem solução e como encontrá-las.

Proposição 2.1. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. A equação $aX + bY = c$ admite solução nos números inteiros se, e somente se, $(a, b)|c$.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.8, $I(a, b) = \{ma + nb; m, n \in \mathbb{Z}\} =$ mdc $(a, b)\mathbb{Z}$. É claro que a equação $aX + bY = c$ possui solução se, e somente se, $c \in I(a, b)$, o que equivale a $c \in (a, b)\mathbb{Z}$, que por sua vez é equivalente a $(a, b)|c$. $\square$

É fácil verificar que a equação $aX+bY = c$, com $a \neq 0, b \neq 0$ e $(a, b)|c$, é equivalente a equação: $a_1X + b_1Y = c_1$, onde:

$$a_1 = \frac{a}{(a, b)}, b_1 = \frac{b}{(a, b)} \text{ e } c_1 = \frac{c}{(a, b)}$$

Note que pela Proposição 1.12, $\text{mdc}\,(a_1, b_1) = 1$ e, portanto, podemos restringir nosso estudo a equações do tipo $aX + bY = c$, com $\text{mdc}\,(a, b) = 1$ que neste caso sempre tem soluções.

Proposição 2.2. *Seja x_0, y_0 uma solução da equação $aX + bY = c$, onde $\text{mdc}\,(a, b) = 1$. Então as soluções x, y em $\mathbb{Z}$ da equação são $x = x_0 + bt$ e $y = y_0 - at$, com $t \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Seja x, y uma solução de $aX + bY = c$, logo

$$ax + by = ax_0 + by_0 = c,$$

consequentemente,

$$ax - ax_0 = by_0 - by.$$

Logo,

$$a(x - x_0) = b(y_0 - y).$$

Como $(a, b) = 1$ pela Proposição 2.1, segue-se que $b|(x - x_0)$. Logo, se $b|(x - x_0)$ podemos dizer que

$$x - x_0 = bt, \text{ com } t \in \mathbb{Z}.$$

Substituindo $x - x_0 = bt$ na equação

$$a(x - x_0) = b(y_0 - y)$$

$$a.bt = b(y_0 - y),$$

pela lei do cancelamento,

$$at = y_0 - y$$

ou seja,

$$y_0 - y = at,$$

o que prova que as soluções são do tipo exibido.
Por outro lado, x e y, como no enunciado, é solução, pois,

$$ax + by = a(x_0 + bt) + b(y_0 - at) = ax_0 + by_0 = c.$$

□

Segue da Proposição 2.1 que a equação diofantina $aX + bY = c$, com $(a, b) = 1$, admite infinitas soluções em $\mathbb{Z}$. Então também podem ser escritas na forma

$$\begin{cases} x &= x_0 + bt \\ y &= y_0 - at \end{cases}$$

com $t \in \mathbb{Z}$.

Agora vamos encontrar uma solução particular de uma equação do tipo $aX + bY = c$, quando $(a, b) = 1$.

O algoritmo euclidiano estendido permitirá achar uma solução particular da equação. Pela Proposição 1.11 existem $m, n \in z$ tais que:

$$ma + nb = (a, b) = 1,$$

assim multiplicando ambos os membros da igualdade acima por c, obtemos

$$cma + cnb = c.$$

Logo, $x_0 = cm$ e $y_0 = cn$ é uma solução particular da equação.

Exemplo 2.3. Resolvamos a equação $2x - 7y = 1$.

A equação tem solução pois $(2, 7)|1$. Vamos encontrar uma solução particular x_0, y_0 dessa equação. Pelo Algoritmo de Euclides, temos

	3	2
7	2	1
1	0	

$$1 \;=\; 7 - 2.3$$

Arrumando a equação temos,

$$2.(-3) + 7.1 \;=\; 1.$$

Como $c = 1$, não precisamos multiplicar a equação. Logo, $x_0 = -3$ e $y_0 = 1$ é solução particular da equação e, consequentemente, as soluções são:

$$\begin{cases} x &= -3 - 7t \\ y &= 1 - 2t \end{cases}$$

com $t \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 2.4. Resolvamos a equação $9x + 7y = 5$.

A equação tem solução pois $(9, 7)|5$. Vamos achar uma solução particular x_0 e y_0, desta equação. Pelo Algoritmo de Euclides, temos:

	1	3	2
9	7	2	1
2	1	0	

$$1 = 7 - 2 \cdot 3 \tag{2.1}$$

$$2 = 9 - 7 \cdot 1, \tag{2.2}$$

Substituindo a equação (2.2) em (2.1) obtemos

$$\begin{aligned} 1 &= 7 - 2 \cdot 3 \\ &= 7 - (9 - 7 \cdot 1) \cdot 3 \\ &= 7 - (9 \cdot 3 - 3 \cdot 7) \\ &= 7 - 9 \cdot 3 + 3 \cdot 7 \\ &= -9 \cdot 3 + 4 \cdot 7 \\ &= 9 \cdot (-3) + 7 \cdot 4 = 1. \end{aligned}$$

Multiplica a equação por 5, já que c=5, temos

$$9 \cdot (-15) + 7 \cdot 20 = 5.$$

Logo, $x_0 = -15$ e $y_0 = 20$ é solução particular da equação e, consequentemente, as soluções são

$$\begin{cases} x &= -15 + 7t \\ y &= 20 - 9t \end{cases}$$

com $t \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 2.5. Um fazendeiro que dispõe de R\$1.770,00 pretende gastar essa importância na compra de cavalos e bois. Se cada cavalo custa R\$31,00 e cada boi R\$21,00, qual o maior número de animais que pode adquirir gastando todo o dinheiro? Sabendo que ele tem que comprar pelo menos um cavalo ou pelo menos um boi.

Vamos determinar x para a quantidade de cavalos e y para a quantidade de bois. Logo $31x + 21y = 1770$.

Aplicando o algoritmo de Euclides temos que

	1	2	10
31	21	10	1
10	1	0	

assim o $\text{mdc}(31, 21) = 1$ e dos restos obtemos as expressões $1 = 21 - 10 \cdot 2$ e $10 = 31 - 21 \cdot 1$. Substituindo uma na outra temos,

$$\begin{aligned} 1 &= 21 - 10 \cdot 2 \\ &= 21 - (31 - 21 \cdot 1) \cdot 2 \\ &= 21 - 31 \cdot 2 + 21 \cdot 2 \\ &= 21 \cdot (3) - 31 \cdot (2), \end{aligned}$$

arrumando a expressão,

$$31 \cdot (-2) + 21 \cdot (3) = 1.$$

como $c = 1770$, temos que multiplicar toda a expressão por 1770 assim,

$$31 \cdot (-3540) + 21 \cdot (5310) = 1770$$

logo temos uma solução particular onde $x_0 = -3540$ e $y_0 = 5310$. A solução geral dessa equação é:

$$\begin{cases} x & = -3540 + 21t \\ y & = 5310 - 31t \end{cases}$$

como $t \in \mathbb{Z}$ resolvemos então

$$-3540 + 21t \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad 21t \geqslant 3540 \quad \Rightarrow \quad t \geq 168,5.$$

$$\text{Por outro lado, } 5310 - 31t \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad 31t \leq 5310 \quad \Rightarrow \quad t \leq 171,2.$$

Assim $t = 169, 170$ ou 171, portanto:

- Para $t = 169$, temos que $x = 9$ e $y = 71$, ou seja, 9 cavalos e 71 bois.
- Para $t = 170$, temos que $x = 30$ e $y = 40$, ou seja, 30 cavalos e 40 bois.
- Para $t = 171$, temos que $x = 51$, $y = 9$, ou seja, 51 cavalos e 9 bois.

Como o problema pede o maior número de animais, a opção será 80 animais, Sendo 9 cavalos e 71 bois.

Proposição 2.6. *Sejam $a, b \in \mathbb{N}$, com mdc $(a, b) = 1$. Todo número inteiro c pode ser escrito de modo único na forma $c = ma + nb$, com $0 \leq m < b$ e $n \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. **Existência**

Sabemos que existem $u, v \in \mathbb{N}$ tais que $ua + vb =$ mdc $(a, b) = 1$, multiplicando ambos os membros por c, temos que:

$$cua + cvb = c. \tag{2.3}$$

Pela divisão euclidiana temos que existem $q, m \in \mathbb{N}$ onde $0 \leq m < b$ tais que:

$$uc = qb + m \tag{2.4}$$

Substituindo (2.3) em (2.4) temos:

$$(qb + m)a + cvb = c,$$

$$qab + ma + cvb = c,$$

$$(qa + cv)b + ma = c.$$

Pondo $n = qa + cv$, temos

$$nb + ma = c,$$

com $0 \leq m < b$ e $n = qa + cv, \in \mathbb{Z}$.

Unicidade

Suponhamos que

$$ma + nb = m'a + n'b, \text{ com } 0 \leq m, m' < b.$$

Então,

$$ma + nb - m'a - n'b = 0$$

$$ma - m'a + nb - n'b = 0$$

$$(m - m')a + (n - n')b = 0,$$

Logo, $(m - m')a = -(n' - n)b$, com $|m - m'| < b$. Como $(a, b) = 1$ e $b|(m - m')a$, devemos ter $b|(m - m')$ o que só é possível se $m - m' = 0$ e em tal caso, $n - n' = 0$.

□

Sejam $a, b \in \mathbb{N}$. Definimos o conjunto $S(a, b) = \{ma + nb; m, n \in \mathbb{N}\}$. A equação $aX + bY = c$, com mdc $(a, b) = 1$, tem solução em $\mathbb{N}$ se, e somente se, $c \in S(a, b)$. Portanto é necessário encontrar os elementos do conjunto $S(a, b)$.

Proposição 2.7. *Seja $c \in S(a, b)$ se, e somente se, existem $m, n \in \mathbb{N}$; com $m < b$, tais que $c = ma + nb$.*

Demonstração. É claro que se $c = ma + nb$, com $m, n \in \mathbb{N}$, então $c \in S(a, b)$. Por outro lado, se $c \in S(a, b)$, então $c = xa + yb$. Pelo algoritmo de Euclides $x = bq + m$, com $0 \leq m < b$. Logo substituindo o valor de x desta última igualdade na igualdade acima obtemos:

$$\begin{aligned} c &= xa + yb \\ &= (bq + m)a + yb \\ &= ma + (qa + y)b. \end{aligned}$$

Pondo $n = qa + y \in \mathbb{N}$, temos que

$$c = ma + nb.$$

□

Definimos o conjunto de lacunas de $S(a,b)$ como sendo

$$L(a,b) = \mathbb{N} \setminus S(a,b).$$

Corolário 2.8. *Temos que* $L(a,b) = \{ma - nb \in \mathbb{N} | m, n \in \mathbb{N} \text{ e } m < b\}$.

Demonstração. Das proposições 2.6 e 2.7 temos que $nb + ma = c$ com mdc $(a,b) = 1$ e que $c \in S(a,b)$. Como $c \in S(a,b)$ podemos dizer que $nb + ma \in S(a,b)$. Por definição, $L(a,b) = \mathbb{N} \setminus S(a,b)$, assim

$$\begin{aligned} L(a,b) &= \mathbb{N} \setminus S(a,b) \\ &= \mathbb{N} - \{nb \pm ma\} \\ &= \mathbb{N} - nb \pm ma. \end{aligned}$$

Logo, $(ma - nb) \in \mathbb{N}$.

□

Teorema 2.9. *A equação* $aX + bY = c$, *onde* $(a,b) = 1$, *tem solução nos números naturais se, e somente se,*

$$c \notin L(a,b) = \{ma - nb \in \mathbb{N} | m, n \in \mathbb{N} \text{ e } m < b\}$$

Demonstração. Sabemos que a equação $aX + bY = c$ tem solução se, e somente se, $c \in S(a,b)$. Assim, o resultado segue do Colorário 2.8. □

Corolário 2.10. *Sejam* $a, b \in \mathbb{N}$ *tais que mdc* $(a,b) = 1$. *Tem-se que* $(a-1).(b-1)$ *é o menor inteiro tal que* $c \in S(a,b)$ *para todo* $c > (a-1).(b-1)$.

Demonstração. Note que o conjunto $L(a,b)$ é finito e o seu maior elemento é

$$\max L(a,b) = (b-1)a - b.$$

Portanto, se $c \geqslant (b-1)a - b + 1 = (b-1)(a-1)$, a equação admite solução e se $c = (b-1)(a-1) - 1$, ela não admite solução. □

O número natural $(a-1).(b-1) = k$ é **chamado de condutor de** $S(a,b)$. Portanto,

$$\begin{aligned} ab - a - b + 1 &= k \\ (b-1)a - b + 1 &= k \\ (b-1)a - b &= k - 1 \end{aligned}$$

logo, $(b-1)a - b$ é a maior lacuna de $S(a,b)$.

Não é difícil determinar se a equação $aX + bY = c$ admite solução. Se $\text{mdc}\,(a,b) \nmid c$, a equação não tem soluções inteiras, logo não tem soluções naturais. Se $\text{mdc}\,(a,b)|c$ a equação é equivalente a uma outra com $\text{mdc}\,(a,b) = 1$. Com o algoritmo euclidiano estendido, visto no Teorema 1.4:

$$1 = \text{mdc}\,(a,b) = m'a - n'b.$$

logo, multiplicando a equação por c, tem-se:

$$c = cm'a - cn'b$$

Agora com a divisão euclidiana, escreva $cm' = qb + m$, com $m < b$, logo,

$$\begin{aligned} c &= (qb+m)a - cn'b \\ c &= qba + ma - cn'b \\ c &= ma + (qa - cn')b \in S(a,b), \end{aligned}$$

se $qa \geqslant cn'$ a equação tem solução em $\mathbb{N}$ ou seja, $c = ma - (cn' - qa)b \in L(a,b)$, se $qa < cn'$ a equação não tem solução em $\mathbb{N}$.

Caso a equação $aX + bY = c$ possua soluções com $m < b$ a única solução m, n é dita uma **solução minimal**, no sentido de que se x, y é uma solução então $x \geqslant m$, conforme a proposição 2.6.

Proposição 2.11. *Suponha que a equação $aX + bY = c$, com $(a,b) = 1$, tenha solução e seja $x_0 = m$ e $y_0 = n$ a solução minimal. As soluções x, y em $\mathbb{N}$ da equação são dadas pelas fórmulas*

$$\begin{cases} x &= m + tb \\ y &= n - ta, \end{cases}$$

com $t \in \mathbb{N}$ e $n - ta \geqslant 0$.

Demonstração. Temos que $am + bn = ax + by = c$. Logo, $a(x-m) = b(n-y)$, que,de modo totalmente análogo ao que foi feito na demonstração da Proposição 2.2 implica no resultado. $\square$

Note que esse tipo de equação tem um número finito de soluções, correspondentes aos seguintes valores de t,

$$0, 1, ..., \left[\frac{n}{a}\right],$$

onde $[\frac{n}{a}]$ representa o quociente da divisão euclidiana de n por a, ou seja, a parte inteira de $\frac{n}{a}$.

Exemplo 2.12. Vamos determinar para quais valores de $c \in \mathbb{N}$ a equação $11X + 7Y = c$ tem soluções em $\mathbb{N}$. O conjunto de lacunas de $S(11, 7)$ é o conjunto:

$$L(11, 7) = \{m11 - n7 \in \mathbb{N} | m, n \in \mathbb{N} \text{ e } m < 7\}.$$

Como $m < 7$, temos:

- Para $m = 6$, $11m-7n = 11\cdot6-7n = 66-7n$, como $n \in \mathbb{N}$, temos: $\{59, 52, 45, 38, 31, 24, 17, 10, 3\}$
- Para $m = 5$, $11m-7n = 11\cdot5-7n = 55-7n$ como $n \in \mathbb{N}$, temos: $\{48, 41, 34, 27, 20, 13, 6\}$
- Para $m = 4$, $11m-7n = 11\cdot4-7n = 44-7n$ como $n \in \mathbb{N}$, temos: $\{37, 30, 23, 16, 9, 2\}$
- Para $m = 3$, $11m - 7n = 11 \cdot 3 - 7n = 33 - 7n$ como $n \in \mathbb{N}$, temos: $\{26, 19, 12, 5\}$
- Para $m = 2$, $11m - 7n = 11 \cdot 2 - 7n = 22 - 7n$ como $n \in \mathbb{N}$, temos: $\{15, 8, 1\}$
- Para $m = 1$, $11m - 7n = 11 \cdot 1 - 7n = 11 - 7n$ como $n \in \mathbb{N}$, temos: $\{4\}$

logo o conjunto das lacunas é:

$L(11, 7) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 23, 24, 26, 27, 30, 31, 34, 37, 38, 41, 45,$

Portanto a equação $11X + 7Y = c$ admite solução em $\mathbb{N}$ se, e somente se, $c \notin L(11, 7)$.

Exemplo 2.13. Resolvamos a equação $11X + 7Y = 58$ em $\mathbb{N}$.

De acordo com o exemplo anterior, $58 \notin L(11, 7)$, assim a equação possui solução. Pelo Algoritmo Euclidiano Estendido temos:

	1	1	1	3
11	7	4	3	1
4	3	1	0	

Logo fazendo as substituições temos:

$$\begin{aligned}
1 &= 4 - 3 \cdot 1 \\
&= 4 - (7 - 4 \cdot 1) \cdot 1 \\
&= 4 - 7 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \\
&= 4 \cdot 2 - 7 \cdot 1 \\
&= 2 \cdot (11 - 7 \cdot 1) - 7 \cdot 1 \\
&= 2 \cdot 11 - 7 \cdot 2 - 7 \cdot 1 \\
&= 2 \cdot 11 - 7 \cdot 3,
\end{aligned}$$

arrumando,

$$11 \cdot 2 + 7 \cdot (-3) = 1.$$

Multiplicando por 58 já que $C = 58$, temos

$$\begin{aligned}
11 \cdot (2 \cdot 58) + 7 \cdot (-3 \cdot 58) &= 1 \cdot 58 \\
11 \cdot (116) + 7 \cdot (-174) &= 58 \\
11 \cdot (4 + 16 \cdot 7) + 7 \cdot (-174) &= 58 \\
11 \cdot 4 + 11 \cdot 16 \cdot 7 + 7 \cdot (-174) &= 58 \\
11 \cdot 4 + (176) \cdot 7 + 7 \cdot (-174) &= 58 \\
11 \cdot 4 + (176) \cdot 7 + 7 \cdot (-174) &= 58 \\
11 \cdot 4 + 7 \cdot 2 &= 58
\end{aligned}$$

Daí segue que $x_0 = 4$ e $y_0 = 2$ é a solução minimal da equação. Logo, as soluções são:

$$\begin{cases} x &= 4 + 7t \\ y &= 2 - 11t \end{cases}$$

que só tem soluções para $t = 0$, portanto a equação só possui solução em $\mathbb{N}$ $x_0 = 4$ e $y_0 = 2$.

No exemplo acima, poderíamos testar se algum dos valores $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ e 6, já que $m < 7$. Assim verificar se $58 - 11x$ é divisível por 7. O que fica fácil para $x_0 = 4$.

Capítulo 3

Equações Diofantinas Lineares de três e n Variáveis

Neste capítulo serão apresentados a generalização de mdc de três ou mais números inteiros, equações diofantinas lineares com três variáveis e que teremos solução para equações diofantinas com n variáveis. As referências [1], [3], [4] e [5] foram importantes para o desenvolvimento do mesmo.

3.1 Generalização para o mdc de 3 ou mais números.

A definição de máximo divisor comum pode ser estendida de maneira análoga para três ou mais números. Para o cálculo do mdc de três números, vamos precisar do seguinte resultado.

Proposição 3.1. $mdc(a, b, c) = mdc(mdc(a, b), c)$

Demonstração. Se $d = \text{mdc}(a, b, c)$, então $d|a$, $d|b$ e $d|c$. Se $d|a$ e $d|b$, segue que $d|\text{mdc}(a, b)$. Assim $d|\text{mdc}(a, b)$ e $d|c$. Concluímos que $d|\text{mdc}((a, b), c)$. Seja k um divisor de $d_1 = \text{mdc}(a, b)$ e de c. Como $d_1|a$ e $d_1|b$ temos que, $k|a$, $k|b$ e $k|c$, logo, $k|d$, pois $d = \text{mdc}(a, b, c)$. A demonstração fica completa com a unicidade do máximo divisor comum que está provado na Definição 1.2. $\square$

Exemplo: Calcule o $\text{mdc}(6, 8, 20)$.
Note que $\text{mdc}(6, 8) = 2$ e $\text{mdc}\ (2, 20) = 2$. Logo, o $\text{mdc}(6, 8, 20) = 2$.

Proposição 3.2. $mdc(a_1, a_2, a_3..., a_n) = mdc(mdc(a_1, a_2), ..., a_n)$

Demonstração. Seja $d = \text{mdc}\ (a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ então $d|a_1, d|a_2, d|a_3, ..., d|a_n$, segue que $d|\ \text{mdc}\ (a_1, a_2)$, pela Proposição 3.1 $d|\ \text{mdc}\ ((a_1, a_2), a_3)$. Logo, se formos agrupando os termos dois à dois, chegaremos a conclusão que $d|\ \text{mdc}\ ((a_1, a_2), a_n)$. $\square$

3.2 Equações Diofantinas com Três Variáveis

Dizemos que uma equação diofantina é linear de três variáveis se ela pode ser escrita na forma

$$aX + bY + cZ = m,$$

onde a, b, c e $m \in \mathbb{Z}$, e seus coeficientes a, b e c não são nulos.

Na Proposição 2.2 vimos que uma equação diofantina linear de duas variáveis $ax + by = c$ tem solução em $\mathbb{Z}$ se, e somente se $\text{mdc}(a, b)|c$. De forma análoga, as equações diofantinas lineares de três variáveis $ax + by + cz = m$ tem solução em $\mathbb{Z}$ se, e somente se $\text{mdc}(a, b, c)|m$.

Proposição 3.3. *A equação $aX + bY + cZ = m$, com a, b e c inteiros não nulos e m inteiro tem solução se, e somente se $d = mdc(a, b, c)|m$.*

Demonstração. Vamos supor que x_0, y_0 e z_0 é solução.
Seja $\text{mdc}(a, b) = d_1$ e $\text{mdc}(d_1, c) = d$, logo $d_1|a$ e $d_1|b$, assim, $d_1|ax_0$ e $d_1|by_0$. Como, $\text{mdc}(d_1, c) = d$, então $d|d_1$ e $d|c$. Podemos dizer que $\text{mdc}(d_1, c)|cz_0$ e que $\text{mdc}(a, b, c)|(ax_0 + by_0 + cz_0)$. Logo, $\text{mdc}(a, b, c)|m$.
Pela Proposição 3.1, se $\text{mdc}(a, b, c)|m$ então $\text{mdc}(d_1, c)|m$. Como $\text{mdc}(d_1, c)|m$ temos que $m \in I(d_1, c)$, logo pelo Teorema 1.8, existem k_0 e $z_0 \in \mathbb{Z}$ tais que $d_1k_0 + cz_0 = m$. Como $\text{mdc}(a, b) = d_1$, da mesma forma, existem r e $s \in \mathbb{Z}$ tais que $ar + bs = d_1$, substituindo d_1 na equação $d_1k_0 + cz_0 = m$ temos,

$$\begin{aligned} (ar + bs)k_0 + cz_0 &= m, \\ a(rk_0) + b(sk_0) + cz_0 &= m, \end{aligned}$$

tomando $rk_0 = x_0$ e $sk_0 = y_0$ obtemos,

$$ax_0 + by_0 + cz_0 = m$$

Logo, x_0, y_0 e z_0 é uma solução particular da equação $aX + bY + cZ = m$. □

Proposição 3.4. *Seja x_0, y_0 e z_0, uma solução particular da equação $aX + bY + cZ = m$, com $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$ onde $mdc(a, b, c) = 1$. A equação admite infinitas soluções e o conjunto dessas soluções é*

$$S = \{x_0 - \alpha ct + bs, y_0 - \beta ct - as, z_0 + a\alpha t + b\beta t\}.$$

Demonstração. Seja $d_1 = \text{mdc}(a, b)$. Logo, $1 = \text{mdc}(d_1, c)$.
Como x_0, y_0 e z_0 são soluções temos que $ax_0+by_0+cz_0 = m$, e como $ax_0 + by_0 \in I(a, b) = d_1\mathbb{Z}$, existem $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$ax_0 + by_0 = k_0d_1.$$

Substituindo, $ax_0 + by_0 = k_0 d_1$. em $ax_0 + by_0 + cz_0 = m$ temos,

$$d_1 k_0 + cz_0 = m,$$

tomando k_0 e z_0 como solução temos

$$cz_0 + d_1 k_0 = m, \text{ com mdc } (c, d_1) = 1.$$

que é uma equação diofantina linear com duas variáveis e mdc $(c, d_1) = 1$ assim, pelo resultado da Proposição 2.2, as soluções da equação $cZ + d_1 K = m$ são

$$\begin{cases} z &= z_0 + d_1 t \\ k &= k_0 - ct. \end{cases}$$

Tomando a equação

$$aX + bY = kd_1$$

e substituindo k po $k_0 - ct$ temos

$$\begin{aligned} ax + by = d_1(k_0 - ct) \\ \frac{a}{d_1}x + \frac{b}{d_1}y = k_0 - ct, \end{aligned}$$

onde $\frac{a}{d_1}$ e $\frac{b}{d_1}$ são números inteiro e mdc $\left(\frac{a}{d_1}, \frac{b}{d_1}\right) = 1$. Pela Proposição 1.9 existem α e $\beta \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\frac{a}{d_1}\alpha + \frac{b}{d_1}\beta = 1,$$

assim, multiplicando esta equação por ct, temos

$$\frac{a}{d_1}\alpha ct + \frac{b}{d_1}\beta ct = ct,$$

logo,

$$\begin{aligned} \frac{a}{d_1}x + \frac{b}{d_1}y &= \frac{a}{d_1}(x_0 - \alpha ct) + \frac{b}{d_1}(y_0 - \beta ct) \\ &= \frac{a}{d_1}x_0 - \frac{a}{d_1}\alpha ct + \frac{b}{d_1}y_0 - \frac{b}{d_1}\beta ct \\ \frac{a}{d_1}x - \frac{a}{d_1}x_0 + \frac{a}{d_1}\alpha ct &= \frac{b}{d_1}y_0 - \frac{b}{d_1}\beta ct - \frac{b}{d_1}y \\ \frac{a}{d_1}(x - x_0 + \alpha ct) &= \frac{b}{d_1}(y_0 - \beta ct - y). \end{aligned}$$

Como mdc $\left(\frac{a}{d_1}, \frac{b}{d_1}\right) = 1$, pela Proposição 1.9, temos que as soluções dessa equação são:

$$\begin{cases} x &= x_0 - \alpha ct + bs, \\ y &= y_0 - \beta ct - as, \\ z &= z_0 + d_1 t = z_0 + (a\alpha + b\beta)t = z_0 + a\alpha t + b\beta t. \end{cases}$$

$\square$

Logo, a solução geral da equação diofantina com três variáveis depende de dois parâmetros s e t.

Exemplo 3.5. Encontrar todas as soluções inteiras de $10X + 6Y + 5Z = 8$.
Como $\text{mdc}(10, 6) = 2$, $\text{mdc}(2, 5) = 1$, e $1|8$, logo, teremos solução para a equação $10X + 6Y + 5Z = 8$. Seja $10X + 6Y = 2K$, substituindo na equação $10X + 6Y + 5Z = 8$ temos, $2K + 5Z = 8$ que é uma equação diofantina com 2 variáveis que já sabemos resolver. Então, pelo Algoritmo de Euclides temos a seguinte expressão com o resto, $1 = 5 - 2.2$, arrumando a equação temos, $2.(-2) + 5.(1) = 1$, como nesse caso $c = 8$, temos que multiplicar a equação por 8. Assim, $2.(-16) + 5.(8) = 8$ onde $k_0 = -16$ e $z_0 = 8$ é uma solução particular logo, a solução geral é:

$$\begin{cases} k & = -16 + 5t \\ z & = 8 - 2t \end{cases}$$

com $t \in \mathbb{Z}$.
Por outro lado, substituindo $k = -16 + 5t$ na equação $10X + 6Y = 2K$ temos,

$$\begin{aligned} 10X + 6Y &= 2(-16 + 5t) \\ &= -32 + 10t \end{aligned}$$

Simplificando a equação temos,

$$5x + 3y = -16 + 5t,$$

que também é uma equação diofantina de duas variáveis. Aplicando o algoritmo de Euclides temos as seguintes expressões com os restos $1 = 3 - 2.1$ e $2 = 5 - 3.1$, substituindo uma na outra temos,

$$\begin{aligned} 1 &= 3 - (5 - 3 \cdot 1) \cdot 1 \\ &= 3 - 5 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \\ &= 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1, \end{aligned}$$

arrumando temos,

$$5 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 1.$$

Como $c = -16 + 5t$ então, $5 \cdot (16 - 5t) + 3 \cdot (-32 + 10t) = -16 + 5t$. Logo $x_0 = 16 + 5t$ e $y_0 = -32 + 10t$. Pela Proposição 2.2 a solução geral da equação $10X + 6Y = 2K$ é:

$$\begin{cases} x & = -16 + 5t + 3s \\ y & = -32 + 10t - 5s \end{cases}$$

com t e $s \in \mathbb{Z}$.
Logo, a equação geral da equação diofantina $10x + 6y + 5z = 8$ será:

$$\begin{cases} x &= 16 - 5t + 3s \\ y &= -32 + 10t - 5s \\ z &= -16 - 2t \end{cases}$$

com t e $s \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 3.6. João quer aumentar sua renda no sítio. Para isso ele quer comprar alguns animais. Sabendo que cada galinha custa R\$12, 00, cada porco custa R\$30, 00 e cada bode custa R\$35, 00. Sr. João tem R\$675, 00 reais para compra dos animais. Sabendo que João tem que comprar pelo menos uma unidade de todos os animais. Qual o maior número de animais ele pode comprar gastando exatamente R\$675, 00? Quantas galinhas? Quantos porcos? E quantos bodes?

Vamos chamar a quantidade de galinhas de x, a quantidade de porcos de y e a quantidade de bodes de z. A equação do problema será: $12X + 30Y + 35Z = 675$. Como $\text{mdc}(12, 30) = 6$, $\text{mdc}(6, 35) = 1$ e $1|675$, teremos solução para essa equação. Tomando $12X + 30Y = p$, como $\text{mdc}(12, 30) = 6$, $6|p$ e $p = 6k$ assim $12X + 30Y = 6K$. Substituindo $12X + 30Y = 6K$ na equação $12X + 30Y + 35Z = 675$ temos, $6K + 35Z = 675$, que é uma equação diofantina de duas variáveis que sabemos resolver de acordo com a Proposição 2.2 . Aplicando o Algoritmo de Euclides temos as seguintes expressões com os restos, $1 = 6 - 5 \cdot 1$ e $5 = 35 - 6 \cdot 5$, substituindo uma na outra temos,

$$\begin{aligned} 1 &= 6 - 5 \cdot 1 \\ &= 6 - (35 - 6 \cdot 5) - 5 \cdot 1 \\ &= 6 - 35 \cdot 1 + 6 \cdot 5 \\ &= 6 \cdot 6 - 35 \cdot 1, \end{aligned}$$

arrumando temos,

$$6 \cdot (6) + 35 \cdot (-1) = 1$$

Como $c = 675$ multiplicamos a equação por 675, assim nossa equação será $6 \cdot (4050) + 35 \cdot (-675) = 675$, logo, $k_0 = 4050$ e $z_0 = -675$, e a solução geral da equação $6K + 35Z = 675$ será da forma

$$\begin{cases} k &= 4050 + 35t \\ z &= -675 - 6t \end{cases}$$

com $t \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, podemos simplificar a equação $12X + 30Y = 6K$, obtendo $2X + 5Y = K$. Agora, substituindo $K = 4050 + 35t$ na equação $2X + 5Y = K$, obtemos $2X + 5Y = 4050 + 35t$ que é uma equação diofantina de duas variáveis que sabemos resolver de acordo com a Proposição 2.2. Aplicando o Algoritmo de Euclides obtemos a expressão com o resto $1 = 5 - 2 \cdot 2$, donde arrumando a equação temos, $2 \cdot (-2) + 5 \cdot 1 = 1$. Como $c = 4050 + 35t$, multiplicando a equação por $4050 + 35t$, obtemos

$$2 \cdot (-8100 - 70t) + 5 \cdot (4050 + 35t) = 4050 + 35t,$$

assim, $x_0 = -8100 - 70t$ e $y_0 = 4050 + 35t$, e a equação geral é:

$$\begin{cases} x &= -8100 - 70t + 5s \\ y &= 4050 + 35t - 2s \end{cases}$$

com $s, t \in \mathbb{Z}$,
logo, a equação geral da equação diofantina $12X + 30Y + 35Z = 675$ será:

$$\begin{cases} x &= -8100 - 70t + 5s \\ y &= 4050 + 35t - 2s \\ z &= -675 - 6t \end{cases}$$

com t e $s \in \mathbb{Z}$.
Tomando $k > 0$ temos $t \geqslant -115,7$ e tomando $z > 0$, temos $t \leq -112,5$, donde $-115,7 \leq t \leq -112,5$ e $t \in \mathbb{Z}$, $t = -115, -114, -113$. Substituindo o valor de k na solução geral da equação $12X + 30Y + 35Z = 1290$ é:

$$\begin{cases} x &= -8100 - 70t + 5s \\ y &= 4050 + 35t - 2s \\ z &= -675 - 6t \end{cases}$$

com t e $s \in \mathbb{Z}$.
Para $t = -115$ temos $z = 15$, $x = -50 + 5s$ e $y = 25 - 2s$. Como $s \in \mathbb{Z}$ e $x, y \in \mathbb{N}$ $s = 10, 11$ ou 12.

- Para $s = 10$, $x = 0$, essa solução não serve pois João quer comprar pelo menos um de cada animal.

- Para $s = 11$, $x = 5$ e $y = 3$, o que nos dá 5 galinhas, 3 porcos e 15 bodes, num total de 23 animais.

- Para $s = 12$, $x = 10$ e $y = 1$, o que nos dá 10 galinhas, 1 porco e 15 bodes, num total de 26 animais.

Para $t = -114$ temos $z = 9$, $x = -120 + 5s$ e $y = 60 - 2s$. Como $s \in \mathbb{Z}$ e $x, y \in \mathbb{N}$ podemos concluir que $s = 24, 25, 26, 27, 28, 29$ ou 30.

- Para $s = 24$, $x = 0$, essa solução não serve pois João quer comprar pelo menos um de cada animal.

- Para $s = 25$, $x = 5$ e $y = 10$, o que nos dá 5 galinhas, 10 porcos e 9 bodes, num total de 24 animais.

- Para $s = 26$, $x = 10$ e $y = 8$, o que nos dá 10 galinhas, 8 porcos e 9 bodes, num total de 27 animais.

- Para $s = 27$, $x = 15$ e $y = 6$, o que nos dá 15 galinhas, 6 porcos e 9 bodes, num total de 30 animais.

- Para $s = 28$, $x = 20$ e $y = 4$, o que nos dá 20 galinhas, 4 porcos e 9 bodes, num total de 33 animais.

- Para $s = 29$, $x = 25$ e $y = 2$, o que nos dá 25 galinhas, 2 porcos e 9 bodes, num total de 36 animais.

- Para $s = 30$, $y = 0$, essa solução não serve pois João quer comprar de todos os animais.

Para $t = -113$ temos $z = 3$, $x = -190 + 5s$ e $y = 95 - 2s$. Como $s \in \mathbb{Z}$ e $x, y \in \mathbb{N}$ podemos concluir que $s = 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46$ ou 47.

- Para $s = 38$, $x = 0$, essa solução não serve pois João quer comprar pelo menos um de cada animal.

- Para $s = 39$, $x = 5$ e $y = 17$, o que nos dá 5 galinhas, 17 porcos e 3 bodes, num total de 25 animais.

- Para $s = 40$, $x = 10$ e $y = 15$, o que nos dá 10 galinhas, 15 porcos e 3 bodes, num total de 28 animais.

- Para $s = 41$, $x = 15$ e $y = 13$, o que nos dá 15 galinhas, 13 porcos e 3 bodes, num total de 31 animais.

- Para $s = 42$, $x = 20$ e $y = 11$, o que nos dá 20 galinhas, 11 porcos e 3 bodes, num total de 34 animais.

- Para $s = 43$, $x = 25$ e $y = 9$, o que nos dá 25 galinhas, 9 porcos e 3 bodes, num total de 37 animais.

- Para $s = 44$, $x = 30$ e $y = 7$, o que nos dá 30 galinhas, 7 porcos e 3 bodes, num total de 40 animais.

- Para $s = 45$, $x = 35$ e $y = 5$, o que nos dá 35 galinhas, 5 porcos e 3 bodes, num total de 43 animais.

- Para $s = 46$, $x = 40$ e $y = 3$, o que nos dá 40 galinhas, 3 porcos e 3 bodes, num total de 46 animais.

- Para $s = 47$, $x = 45$ e $y = 1$, o que nos dá 45 galinhas, 1 porco e 3 bodes, num total de 49 animais.

Assim, a solução para esse problema, já que João quer comprar o número máximo de animais será 45 galinhas, 1 porco e 3 bodes que resulta em 49 animais.

3.3 Equações Diofantinas com n Variáveis

Uma equação diofantina linear com n variáveis é uma equação da forma

$$a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n = m,$$

onde $a_i \in \mathbb{Z} - \{0\}, \forall i = 1, ..., n$.

Da mesma forma que a equação diofantina de duas e três variáveis, é necessária uma condição para que esta equação também admita solução.

Proposição 3.7. *Seja* $a_1X_1+a_2X_2+...+a_nX_n = m$, $a_i \neq 0$ $\forall i = 1, ..., n$ *com* $m \in \mathbb{Z}$, *uma equação diofantina de* n *variáveis terá solução se, e somente se, mdc*$(a_1, a_2, ..., a_n)|m$.

Demonstração. Vamos supor que $x_1, x_2, ..., x_n$ seja solução da equação $a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n = m$ Seja mdc$(a_1, a_2) = d_1$ e mdc$(d_1, a_3, ..., a_n) = d$ logo, $d_1|a_1$ e $d_1|a_2$, pela proposição 1.10, $d_1|a_1k_1$ e $d_2|a_1k_2$ assim, mdc$(a_1, a_2)|a_1k_1+a_2k_2$. e $d|d_1$ e $d|$mdc$(a_3, ..., a_n)$ e pela proposição 1.10 d também divide um múltiplo de cada $(a_3, ..., a_n)$, logo $d|(a_3, ..., a_n)k_n$ onde $k_{i=1,...,n}$ e mdc$(d_1, a_3, ..., a_n)|(a_3, ..., a_n)k_n$. Podemos concluir que mdc$(a_1, a_2, ..., a_n)|(a_1k_1 + a_2k_2 + ... + a_nk_n)$ então mdc$(a_1, a_2, ..., a_n)|m$. Por outro lado, supondo que $d =$ mdc$(a_1, a_2, ..., a_n)$ e $d_1 =$ mdc$(a_1, ..., a_{n-1})$ temos que $(d_1, a_n) = d$ e então $d|m$. Como $(d_1, a_n) = d$ podemos dizer que pela Proposição 1.9 existem Y_1 e $X_n \in \mathbb{Z}$ tais que $d_1Y_1 + a_nX_n = m$ pois $d|m$. Já pela Proposição 2.2, a equação $d_1Y_1 + a_nX_n = m$ nos dá uma solução y_0 e x_n tal que $d_1y_0 + a_nx_n = m$. Por hipótese de indução, temos que $a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n = m$, substituindo m por $d_1y_0 + a_nx_n = m$. temos

$$a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n = d_1y_0 + a_nx_n,$$

Como mdc$(d_1, a_n) = d$ temos

$$a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_{n-1}X_{n-1} = d_1y_0$$

Daí podemos concluir que $(x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_{n-1})$ é uma solução particular da equação $a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n = m$.

□

3.4 Solução Geral

Para encontrarmos a solução geral de uma equação diofantina de n variáveis, devemos reduzi-la a uma equação diofantina linear de duas variáveis, que já sabemos resolver. Com esse procedimento determinaremos o valor da enésima incógnita. Depois disso, devemos solucionar uma equação de $n-1$ incógnitas, e procedendo de forma análoga, obteremos o valor da incógnita de índice $n-1$. Aplicando esse processo repetidas vezes, paramos no momento em que nos deparamos com uma equação de duas variáveis do formato $ax_1 + ax_2 = m$, cuja solução é conhecida.

Capítulo 4

Aplicações em sala de Aula

4.1 Introdução

A aplicação do assunto equações diofantinas no 9° ano do ensino fundamental II é viável já que se fundamenta em conteúdos que já foram estudados em séries anteriores. Os conteúdos prévios são: divisibilidade, números primos e fatoração que estão na grade curricular do 6°ano do ensino fundamental II com as respectivas habilidades (EF06MA05), (EF06MA06) e (EF06MA06), mdc(máximo divisor comum) e equações do 1° grau fazem parte da grade curricular do 7° ano do ensino fundamental II com as respectivas habilidades (EF07MA01) e (EF07MA18) segundo consta na BNCC (Brasil, 2018). O assunto equações diofantinas também está relacionado com um conteúdo do 9° ano que é função afim, que tem habilidade (EF09MA06). Ao abordar esse tema e com o uso do *software Geogebra* dar-se uma maior visualização da função afim e segundo a Base Comum Curricular Nacional (BNCC), os alunos do 9° ano tem que

> compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e sua representações numéricas, algébricas e gráficas e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis. (BNCC, Brasil, 2017 página 319, EF09MA06).

O assunto equações polinomiais do primeiro grau com uma incógnita faz parte dos conteúdos estudados no ensino fundamental. Em que uma variável pode ser representada por qualquer número real. Já as equações diofantinas lineares, nos voltamos para resultados inteiros. Para os alunos do 9° ano do ensino fundamental II, o assunto equações diofantinas lineares contribui para a exploração de outros conteúdos vistos no ensino fundamental. Já que eles terão que encontrar pares ordenados que sejam solução da equação. Segundo a BNCC, nos anos finais,

> precisa ser destacada a importância da linguagem matemática como uso da linguagem simbólica, da representação e argumentação. Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e *softwares* de geometria dinâmica, é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos.(BNCC, Brasil, 2017 página 300).

A utilização do *software Geogebra* para representar graficamente um problema, aprimora a percepção do entendimento do problema em questão. Ao mostrar aos alunos o gráfico numa malha quadriculada, a visualização dos pontos ficam mais perceptíveis. Possibilitando ao aluno a encontrar pares ordenados inteiros.

4.2 Sequência de Ensino

Conteúdos

Números primos, Noções de divisibilidade, Máximo divisor comum (mdc), Algoritmo de Euclides, Equações Diofantinas e utlização do software Geogebra.

Objetivo

Realizar um projeto de intervenção com uma sequência de atividades envolvendo equações diofantinas lineares e apresentar aos alunos problemas do cotidiano que envolve o assunto equações diofantinas lineares e mostrar contextualizando com quantias monetárias (dinheiro) as várias possibilidades de resolução propiciando a eles uma vivência real do uso das equações diofantinas no dia-a-dia.

Objetivo específico

Espera-se que o aluno seja capaz de:

(I) Compreender que uma só equação com duas variáveis tem infinitas soluções.

(II) Identificar a formação de pares ordenados como solução.

(III) Representar graficamente por meio do software Geogebra os pares ordenados que são soluções.

Tempo Destinado

Serão necessárias uma carga horária de 10 horas divididas em 12 aulas.

Recursos didáticos

Serão utilizados material impresso com aula expositiva, uso do celular com o aplicativo do Geogebra e o computador.

Procedimentos

Serão trabalhadas as atividades que estão no apêndice.

1º Momento A aula terá inicio com a atividade que está no Apêndice A, lembrando os conteúdos trabalhados no 6° ano do ensino fundamental II.

2º Momento Com a atividade do Apêndice B, irei abordar o Algoritmo de Euclides ensinando-os passo a passo como fazer.

3º Momento Nessa aula fazendo o acompanhamento da atividade no Apêndice C, os aluno terão que identificar quando uma equação diofantina tem ou não solução e encontrar por tentativa uma solução para o problema em questão.

4º Momento Fazendo uso da atividade no Apêndice D, os alunos serão orientados a encontrar soluções das equações diofantinas usando a fórmula da solução geral.

5º Momento A aula será no laboratório de informática. Usando o software Geogebra, os alunos farão a atividade do Apêndice F.

6º Momento Os alunos responderão a um questionário sobre o meu trabalho desenvolvido durante as aulas de equações diofantinas, que está no Apêndice E.

Avaliação

A avaliação será contínua, baseada na participação e interação dos alunos nas atividades propostas a serem observadas em cada aula.

4.3 Implementação da Atividade

Participantes

O trabalho foi ministrado para uma turma de 9º ano do ensino fundamental, na cidade de Santo Amaro da Purificação na escola Centro Educacional Municipal Governador Luiz Viana Filho.

Etapas das primeiras aulas

O trabalho foi iniciado com a atividade do apêndice A, lembrando os conteúdos trabalhados no 6° ano do ensino fundamental II. Todos estavam atentos e participando da aula. Nos Exemplos 1 e 2 não houve dificuldade, mas no Exemplo 3 ao serem questionados se os números eram divisíveis, tive que junto com eles, em cada alternativa do Exemplo 3 relembrar aplicar a regra de divisibilidade. Percebi que as regras que eles mais sabem é a de 2, 5 e 10. Na tabela de números de 1 até 100, fomos riscando os múltiplos dos números pedidos e eles puderam observar todos os números primos de 1 até 100. No segundo dia de aplicação, usamos a atividade do Apêndice B. A dificuldade encontrada pelos alunos nesse dia foi o algoritmo de Euclides. Pois uma parte da turma ainda tem dificuldade na divisão de números naturais, por esse motivo demoraram um pouco pra entender. Mas uma vez explicado como as expressões são formadas pelos restos, a grande maioria entendeu o assunto. Os alunos ao acompanharem a atividade do apêndice C, no terceiro dia, não sentiram dificuldade ao verificarem se a equação diofantina tinha ou não solução fazendo a verificação se o mdc dos coeficiente a e b dividiam c, ou seja, se $\text{mdc}(a, b)|c$ logo a equação tem solução. A dificuldade foi de encontrar, por tentativas, uma solução para equação. Os alunos ao se depararem com uma equação eles demoraram de visualizar valores que substituam as incógnitas. Uma vez encontrada uma possível solução, a maioria conseguiu visualizar novas soluções. Depois de encontradas algumas soluções, eles concluíram que as soluções obedeciam um parâmetro e que eram infinitas. No quatro dia de aplicação usando a atividade do apêndice D, eles desenvolveram uma equação diofantina achando uma solução particular e sua solução geral. Foi apresentado dois problemas do cotidiano que envolve equação diofantina. Nos problemas eles descobriram a equação e a partir dela encontraram por tentativa uma solução para o problema e pode verificar que essa não era a única solução. Além de que, pelo problema apresentado, eles puderam perceber que as soluções negativas não serviam como solução para o problema proposto. Aqui eles aplicaram o Algoritmo de Euclides e a partir da fórmula dada, ele puderam encontrar a solução geral para os problemas.

Problemas no laboratório

A aplicação da aula no laboratório de informática teve que ser adiada, pois estava tendo uma organização para avaliar os computadores que estariam aptos para o uso. Descobri que dos 20 computadores só haviam 7 em bom estado, sendo que dos 7 , só 6 tinham o *software Geogebra* e como no laboratório não tem acesso a *internet*, acabou dificultando a instalação do *software Geogebra* para que fizesse uso dos 7 computadores. Ao encontrar tamanha dificuldade, visto que minha turma tem 35 alunos e dos 35, 30 tinham celular. Foi necessário pedir para que eles instalassem o aplicativo *Calculadora Gráfica GeoGebra* nos seus celulares para que eles pudessem acompanhar a aula com mais facilidade.

Avaliação do Questionário

Foi apresentado para eles um questionário que se encontra no Apêndice E, com seis perguntas sobre a avaliação do projeto. Com o questionário, eu queria que os alunos me respondessem se era ou não importante aprender um conteúdo que não compõe sua grade curricular eo que isso traria de benefício para os seus estudos. Queria também que eles entendessem que o estudo é primordial na vida deles. Na primeira pergunta a maioria da turma achou o assunto chato, mas interessante. Na segunda, ao serem perguntados o que o assunto ajudaria na vida acadêmica, tive algumas reposta interessantes, como ilustra a figura 4.1.

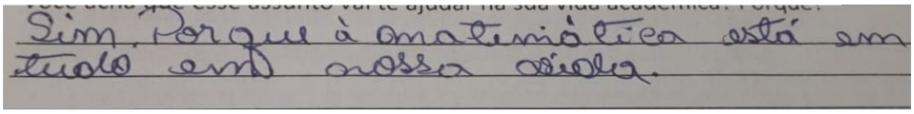

Figura 4.1: Resposta de aluno

Essa resposta só mostra que eles percebem a matemática no seu dia-a-dia.
Na terceira pergunta a maioria dos alunos não se achava capazes de aprender o conteúdo. Algumas respostas me surpreenderam, dentre ela temos, o que se acha capaz e o que não se acha capaz. Como podemos ver nas figuras 4.2 e 4.3.

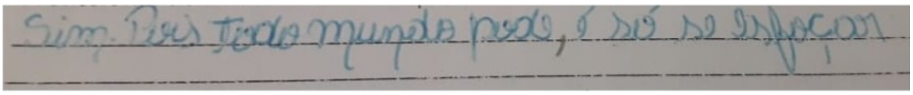

Figura 4.2: Resposta de aluno

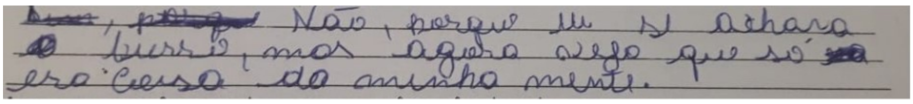

Figura 4.3: Resposta de aluno

Na quarta pergunta a maior parte da turma estava se achando inteligentes por ter compreendido o conteúdo e estavam se sentindo orgulhosos de si mesmos. Segue a figura 4.4 para visualização.

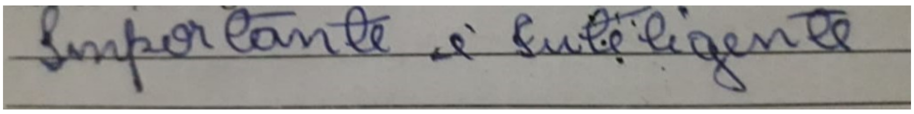

Figura 4.4: Resposta de aluno

A quinta pergunta só 2 alunos não achava importante ser filósofo, os outros tanto achavam importantes como sabiam da contribuição para evolução da humanidade. A figura 4.5 mostra uma das respostas.

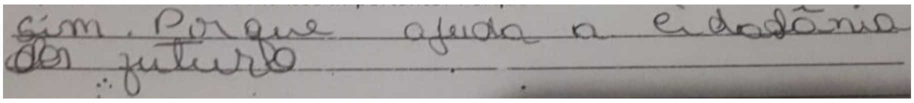

Figura 4.5: Resposta de aluno

O que me surpreendeu na sexta pergunta é que mesmo minha escola residindo num bairro periférico, os meus alunos tem uma boa perspectiva de futuro, eles já tem em mente uma profissão que quer seguir. Fiquei orgulhosa ao saber que todos pensam num futuro promissor. Estou lecionando numa turma em que muitos querem ser médicos, advogados, psicólogos, engenheiros, professores,...etc. Segue as respostas abaixo representadas nas figuras 4.6, 4.7 e 4.8.

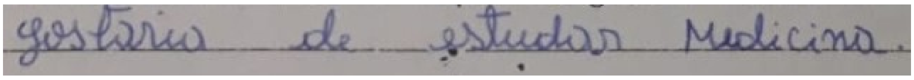

Figura 4.6: Resposta de aluno

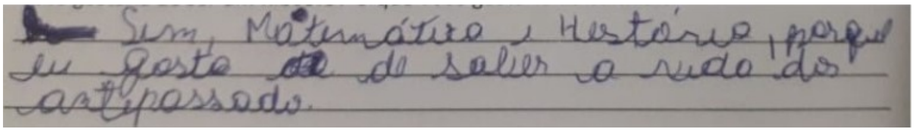

Figura 4.7: Resposta de aluno

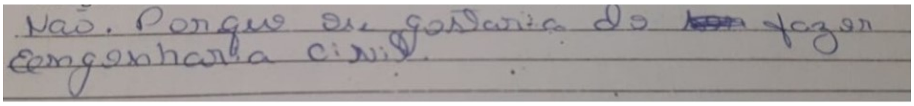

Figura 4.8: Resposta de aluno

6° Momento

Essa aula foi dividida em dois dias, pois numa turma de 35 alunos, o primeiro dia (19/09/2019) teve a participação de 21 alunos. Como faltaram 14 alunos por motivo de doença ou por morarem longe e não ter transporte no horário estabelecido, houve a necessidade de contemplar o restante da turma. No dia remarcado (30/09/2019) compareceram 5 alunos. O curso da aula ocorreu com um pouco de dificuldade já que no dia 19/09/2019 compareceram 21 alunos enquanto 8 estavam se revezando no computador, 13 estavam acompanhando pelo aplicativo no celular. Os alunos que estavam acompanhando pelo aplicativo, tiveram dificuldade de enxergar os pontos já que a tela do celular é pequena e precisava a todo momento ficar ampliando a tela para uma melhor visualização dos pontos. Mas, a medida que um aluno encontrava eles iam ajudando uns aos outros. A conversa entre eles dispersou um pouco o grupo. A dificuldade maior foi na letra g. Pois, eles tinham visto conteúdo em abril. Muito tempo havia passado mas, a medida que eu ia conduzindo,eles conseguiram entender e resolver a questão. Na segunda reaplicação da aula, no dia 30/09/2019, como todos estavam utilizando o computador e tinham pucos alunos, eles tiveram mais habilidades nas respostas, responderam com mais rapidez e puderam observar pontos na reta com mais facilidade. Eles também tiveram dificuldade em responder a letra g, mas da mesma forma que o grupo do dia 19/09/2019, eles também entenderam e responderam a questão. Utilizamos nessa etapa a atividade do apêndice F. Segue abaixo todas as etapas feitas durante a aula.

Durante a aula no *software* os alunos tiveram que seguir os seguintes passos. Ao ligarem o computador e abrirem o programa, eles foram auxiliados a colocar na caixa de entrada a equação feita na letra b do exercício, conforme figura 4.7.

Figura 4.9: Equação

Depois de inserirem a equação, os alunos puderam visualizar o gráfico formado. Foram também auxiliados a colocar a malha clicando com o botão direito do mouse, abre uma janela de preferências e na opção malha escolhe o tipo de malha que é a principal, para uma melhor visualização dos pontos, como segue na figura 4.8.

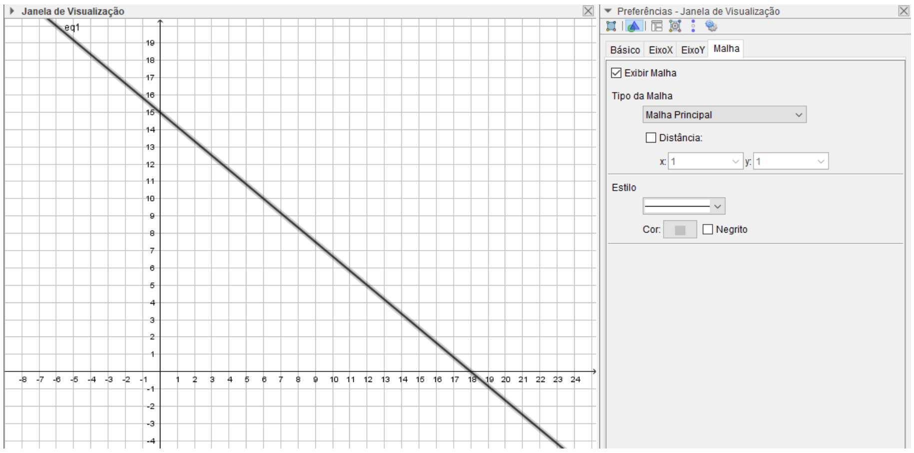

Figura 4.10: Malha Principal

Foi pedido aos alunos que encontrassem 8 pontos. A partir daí foram procurando pontos que pertencessem a reta. Alguns encontraram pontos fora da reta, eles foram auxiliados que tais pontos não eram solução da equação. Para isso, pedi para que eles substituíssem esses pontos na equação. Ao substituírem eles puderam observar que não era possível ser solução da equação do problema. Com isso, eles conseguiram visualizar que somente os pontos que pertencessem a reta eram as soluções do problema. Alguns alunos foram dizendo os pontos encontrados e aqueles que estavam com dificuldades, os próprios colegas começaram a auxiliar uns aos outros. Os alunos que estavam com o aplicativo no celular tiveram mais dificuldade pois a tela é muito pequena para que se tenha uma boa visualização. Os pontos encontrados por eles estão representados na figura 4.9 e 4.10.

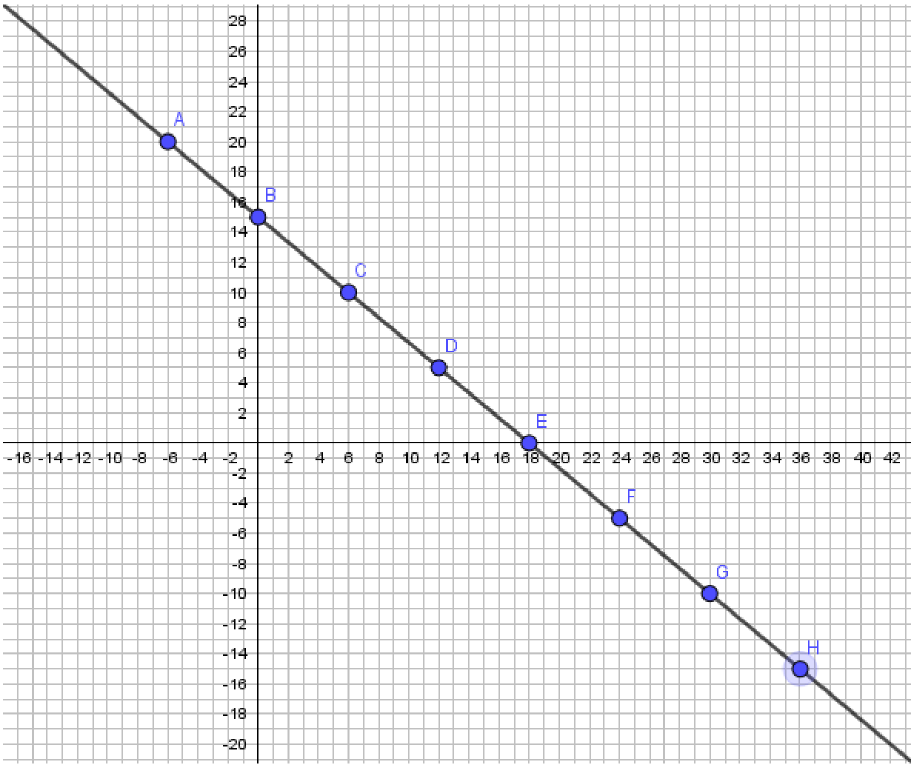

Figura 4.11: Pontos Obtidos

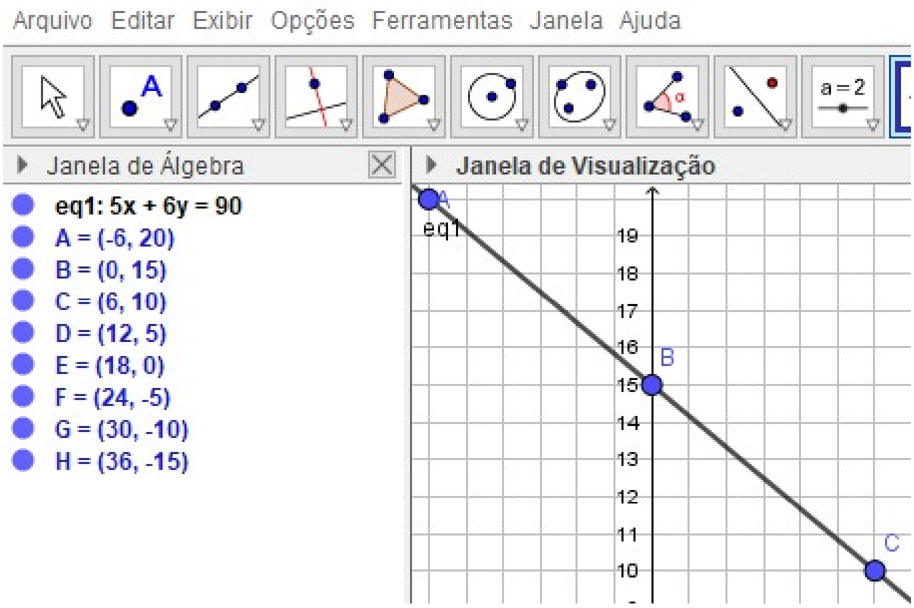

Figura 4.12: 8 pontos

Ao marcarem os pontos, os alunos foram orientados a perceber se todos os pontos marcados serviriam para a solução do nosso problema. Eles perceberam que os pontos negativos não serviriam. Pois não tinham como construir um número negativo de quadras. Assim, eles observaram que somente havia quatro soluções para o problema que está na figura 4.11.

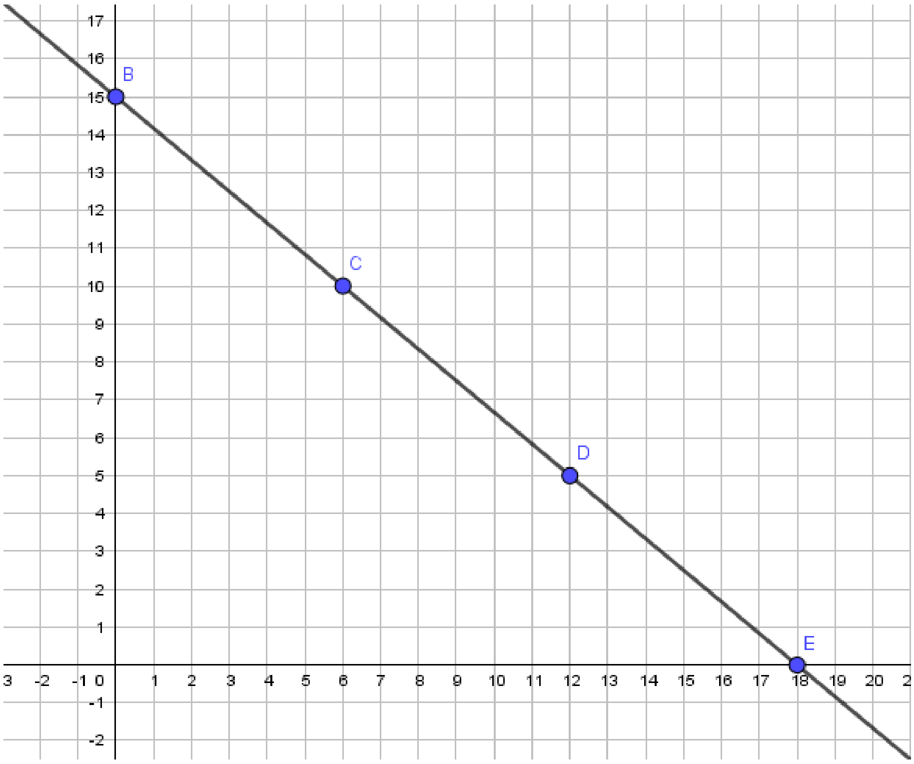

Figura 4.13: Pontos Positivos

Reflexão

Esse trabalho propicia relembrar assuntos de teoria dos números que são fundamentais para a base matemática de cada individuo, fazendo com que eles tenham mais maturidade na resolução das equações, trabalhem o raciocínio lógico, o que melhora a percepção; busca pelo esforço de tentativas, a capacidade de fazer testes memoriais e a visualização por meio do *Geogebra*. Mostrando para os alunos que é na tentativa do erro que chegamos a solução da equação.

Capítulo 5

Conclusão

Esse trabalho foi realizado numa turma com 35 alunos. Mas sei que a maioria conseguiu um bom aproveitamento para o conteúdo estudado. Falo isso pelo empenho deles em responder as questões, pela participação nos debates para encontrar as soluções das equações estudadas e o resultado da avaliação do questionário foi satisfatório. Apesar das dificuldades enfrentadas, pude executar todo o trabalho que desenvolvi. O importante é que com esse trabalho, eu pude aproximar a matemática para aqueles que ainda tem uma certa resistência pela matéria. Foi de grande importância a percepção dos alunos ao compararem o conteúdo que faz parte da grade curricular com um assunto mais avançado, normalmente visto num curso de graduação. Ao final do trabalho executado, os alunos se sentiram privilegiados por ver e entender um conteúdo que não é da sua série escolar o que contribuiu para elevar a a outo estima deles em relação a matemática. A maioria dos alunos não gostam de matemática. Mas quando ela é apresentada de forma lúdica e com problemas que tenham relação com o cotidiano do aluno, eles conseguem perceber essa relação e dessa forma melhora o entendimento da matéria.

Referências Bibliográficas

[1] Curiosidades, Biografia e. 2016. Disponível em:<https://biografiaecuriosidades.blogspot.com.br>
<Acesso 11/02/2019> .

[2] Disponível em: http://www.biblioteca.pucminas.br/teses/EnCiMat_OliveiraSA_1.pdf

[3] Disponível em: http://seer.pucgoias.edu.br/files/journals/3/articles/3881/submission/review/3
11224-1-RV.pdf

[4] Disponível em: https://www.ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/comat/tcc_Ricardo.pdf

[5] Domingues, Hygino H. *Fundamentos da aritmética*. São Paulo: Atual, 1991.

[6] Educação, Ministério da. Ed. 3ª, dezembro, 2017. Disponível em: <http:basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC-EI-EF-110518-versaofinal-site.pdf>Base Comum Curricular Nacional (BNCC).< Acesso em 03/10/2019>.

[7] Eves, Howard. *Introdução à história da matemática*/Howard Eves; tradução: Hygino H. Domingues. Ed.2ª, Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 1997.

[8] Fernandes, Angela Maria Vidigal. *Fundamentos da Álgebra*. Belo Horizonte:Editora UFMG, 2005.

[9] Hefez, Abramo. *Aritmética*. Ed. 1ª, Rio de Janeiro; SBM, 2014.

[10] Hefez, Abramo. *Elementos da Aritmética*. Ed.2ª, Rio de Janeiro, SBM, (2004).

[11] Infopedia, Dicionários Porto Editora. Artigos de apoio Infopédia [em linha]. Porto: Porto Editora, 2003-2019. [consult. 2019-02-11 02:45:39]. Disponível na Internet: https://www.infopedia.pt/apoio/artigos/$diofanto - de - alexandria$.

[12] Santos, José Plinio de Oliveira. *Introdução à Teoria dos Números*. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada,CNPq, (1998).

[13] SCRIBD. Disponível em: https://pt.scribd.com/doc/95338226/Diofanto-de-Alexandria-Biografia. <Acesso 11/02/2019> .

APÊNDICE

APÊNDICE A

CENTRO EDUCACIONAL MUNICIPAL GOVERNADOR LUIZ VIANA FILHO		
ALUNO (A):		**TURNO: Matutino**
PROFESSOR (A): Adna Leile Silva		**TURMA: A**
DATA: ____/____/2019	**ANO: 9° ano**	**NOTA:**

Atividade do primeiro dia: Noção de Divisibilidade

Um número natural é divisível por outro quando na divisão o resto é zero.

Exemplo 1: 523 é divisível por 3?

$$\begin{array}{r|l} 523 & 3 \\ \cline{2-2} -3 & 174 \\ \cline{1-1} 22 & \\ -21 & \\ \cline{1-1} 13 & \\ -12 & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

Como o resto é 1 e $1 \neq 0$, logo $3 \nmid 523$.

Exemplo 2: 414 é divisível por 3?

$$\begin{array}{r|l} 414 & 3 \\ \cline{2-2} -3 & 138 \\ \cline{1-1} 11 & \\ -9 & \\ \cline{1-1} 24 & \\ -24 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Como o resto é igual a zero, logo $3|414$.

Critérios de divisibilidade. Um número é divisível:

- Por 2, quando ele for par.
- Por 3, quando a soma de seus algarismos for divisível por 3.
- Por 4, quando seus dois últimos algarismos formam um número divisível por 4.
- Por 5, quando o número terminar em 0 ou 5.
- Por 6, quando for divisível por 2 e por 3 ao mesmo tempo.
- Por 8, quando seus três últimos algarismos formam um número divisível por 8.
- Por 9, quando a soma de seus algarismos for divisível por 9.
- Por 10, quando o número terminar em 0.

Exercício 1: Agora responda:

a) O número 324 é divisível por 2?

b) O número 425 é divisível por 2?

c) O número 124 é divisível por 3?

d) O número 567 é divisível por 3?

e) O número 1824 é divisível por 4?

f) O número 531 é divisível por 4?

g) O número 80 é divisível por 5?

h) O número 432 é divisível por 5?

i) O número 432 é divisível por 6?

j) O número 68 é divisível por 6?

k) O número 4324 é divisível por 8?

l) O número4328 é divisível por 8?

m) O número 5429 é divisível por 9?

n) O número 43146 é divisível por 9?

o) O número 40 é divisível por 10?

p) O número 12 é divisível por 10?

Números Primos

Um número natural e maior do que 1 é primo quando só é divisível por 1 e por ele mesmo.

Como saber se um número é primo?

Podemos aplicar os critérios de divisibilidade para verificarmos. Dividimos o número pedido por primos até encontrarmos um quociente menor ou igual ao divisor. Se não encontrarmos uma divisão exata, o número será primo.

Por exemplo, 97 é primo?

- 97 não é divisível por 2 porque ele não é par.
- 97 não é divisível por 3 pois 9 + 7 = 16 e 16 não divide por 3.
- 97 não é divisível por 5 pois não termina em 0 ou 5.
- 97 não é divisível por 7 pois tem resto igual a 6.

$$\begin{array}{r|l} 97 & 7 \\ \cline{2-2} -7 & 13 \\ \cline{1-1} 27 & \\ -21 & \\ \cline{1-1} 6 & \end{array}$$

- 97 não é divisível por 11 pois tem resto igual a 9.

$$\begin{array}{r|l} 97 & 11 \\ \cline{2-2} -88 & 8 \\ \cline{1-1} 9 & \end{array}$$

Como encontramos na divisão o quociente menor que o divisor, podemos concluir que 97 é um número primo.

O crivo de Eratóstenes (nome de um matemático grego que viveu entre 285 - 194 a.C.) é um esquema para encontrar primos. Por exemplo, podemos encontrar os números primos entre 1 e 100. Vamos riscar todos os números pares com exceção do número 2. Depois os múltiplos de 3, de 5 e de 7.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Como o próximo primo depois do 7 é o 11, percebamos que todos os múltiplos de 11 já foram riscados. Portanto, na nossa tabela só não estão riscados os números primos de 1 até 100. O que sobrou? Escreva-os na linha abaixo.

APÊNDICE B

CENTRO EDUCACIONAL MUNICIPAL GOVERNADOR LUIZ VIANA FILHO		
ALUNO (A):		TURNO: Matutino
PROFESSOR (A): Adna Leile Silva		TURMA: A
DATA: ____/____/2019	ANO: 9º ano	NOTA:

Atividade do segundo dia: Fatoração

Decomposição de um número em produto de fatores primos.

Exemplos 1: Fatore os números abaixo.

a) $\begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$

c) $\begin{array}{r|l} 50 & \\ & \\ & \\ & \\ & \end{array}$

b) $\begin{array}{r|l} 21 & \\ & \\ & \\ & \\ & \end{array}$

d) $\begin{array}{r|l} 64 & \\ & \\ & \\ & \\ & \end{array}$

MDC (Máximo Divisor Comum)

Em algumas situações precisamos encontrar o maior dos divisores naturais comuns de dois ou mais números. Veremos a situação a seguir.

Exemplo 2: Haverá uma gincana da qual participarão 18 meninos e 30 meninas. A ideia é de formar equipes somente de meninas ou somente de meninos. Além disso, as equipes deverão ter o mesmo número de participantes e com o maior número possível. Vamos organizar separadamente:

- Os 18 meninos podem formar equipes de $1, 2, 3, 6, 9$ e 18 participantes.

- As 30 meninas podem formar equipes de $1, 2, 3, 5, 6, 10, 15$ e 30 participantes.

Comparando os dois resultados acima, percebemos que as equipes com o mesmo número de participantes são os que tem: $1, 2, 3$ ou 6 participantes. Como queremos o maior número de alunos nas equipes, concluímos que cada equipe será de 6 participantes. Logo, o $\text{mdc}(18, 30) = 6$.

Exemplo 3: Vamos calcular o mdc de:

a) $\text{mdc}(12, 28) =$

c) $\text{mdc}(36, 49) =$

b) $\text{mdc}(10, 12, 20) =$

d) $\text{mdc}(11, 18, 25) =$

Algoritmo de Euclides

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} r_1 & q_1 \end{array}$$

Temos, $a = b.q_1 + r_1$

	q_1	q_2	q_3
a	b	r_1	r_2
r_1	r_2	r_3	

Exemplo 4: Calcular o $\text{mdc}(30, 18)$:

	1	1	2
30	18	12	6
12	6	0	

O que o algoritmo nos fornece:

(I) $6 = 18 - 1.12$

(II) $12 = 30 - 1.18$

De onde podemos dizer que:

$$6 = 18 - 1.12,$$

substituindo (II)

$$6 = 18 - 1.(30 - 1.18)$$

$$6 = 18 - 1.30 + 1.18$$

$$6 = 2.18 - 1.30$$

Observamos que pelo algoritmo de Euclides, de trás pra frente podemos escrever $6 = \text{mdc}(18, 30)$ como múltiplo de 18 menos um múltiplo de 30.

Exemplo 5: Pelo algoritmo de Euclides, calcule o mdc de:

a) $\text{mdc}(12, 28) =$

b) $\text{mdc}(36, 49) =$

APÊNDICE C

CENTRO EDUCACIONAL MUNICIPAL GOVERNADOR LUIZ VIANA FILHO		
ALUNO (A):		TURNO: Matutino
PROFESSOR (A): Adna Leile Silva		TURMA: A
DATA: ____/____/2019	ANO: 9° ano	NOTA:

Atividade do terceiro dia: Equações Diofantinas

Uma equação diofantina é expressa da forma $aX + bY = c$ ou $aX - bY = c$, com $a, b, c \in N$.

São chamadas assim em homenagem a Diofanto de Alexandria (300 D.C).

Para sabermos se uma Equação Diofantina tem solução, temos que verificar se o mdc dos coeficientes a e b , dividem o coeficiente c, ou seja, mdc $(a, b)|c$.

Exemplo 1: A equação $24x - 14y = 18$ tem solução?

$a = 24$, $b = -14$ e $c = 18$

$\text{mdc}(24, 14) = 2$ e $2|18$

Logo, existe solução para esta equação.

Exemplo 2: A equação $4x - 6y = 3$ tem solução?

$a = 4$, $b = -6$ e $c = 3$

$\text{mdc}(4, 6) = 2$ e $2 \nmid 3$

Logo, não temos solução para essa equação.

Exemplo 3: Vamos verificar se as equações abaixo tem solução e vamos encontrar suas possíveis soluções.

a) $2x + 3y = 4$

O $\text{mdc}(2, 3) = 1$ e como $1|4$ logo, temos solução. Uma possível solução é:

$x = 8$ e $y = -4$ pois, $2.8 + 3.(-4) = 16 - 12 = 4$

Outras soluções:

____

____

b) $12x - 7y = 9$

Como $\text{omdc}(12, 7) = 1$ e $1|9$ temos solução.

Uma possível solução é

$x = 6$ e $y = 9$ pois, $2.6 - 7.9 = 72 - 63 = 9$.

Outras soluções:

c) $x + y = 2$

APÊNDICE D

<table>
<tr><td colspan="3">CENTRO EDUCACIONAL MUNICIPAL GOVERNADOR LUIZ VIANA FILHO</td></tr>
<tr><td colspan="2">ALUNO (A):</td><td>TURNO: Matutino</td></tr>
<tr><td colspan="2">PROFESSOR (A): Adna Leile Silva</td><td>TURMA: A</td></tr>
<tr><td>DATA: ____/____/2019</td><td>ANO: 9º ano</td><td>NOTA:</td></tr>
</table>

Atividade do quarto dia: Como resolver Equações Diofantinas?

1º) Verificar se o $\text{mdc}(a, b)|c$.

2º) Achar a solução pelo algoritmo de Euclides que chamaremos de x_0 e y_0.

3º) Achar uma solução geral.

Exemplo 1) Encontre a solução geral das equações abaixo.

a) $5x + 6y = 1$

	1	5
6	5	1
1	0	

Como $\text{mdc}(5, 6) = 1$ e $1|6$, temos solução:

$1 = 6 - 1.5$, trocando os termos de membro

$6 - 1.5 = 1$, arrumando conforme a equação dada

$5.(-1) + 6 = 1$

Depois da equação arrumada, obtemos uma equação que tem a forma de

$$ax_0 + by_0 = c.$$

Agora , comparando com a equação dada podemos visualizar que $x_0 = -1$ e $y_0 = 1$.

A solução geral será dada por:

$$\begin{cases} x & = x_0 + bt \\ y & = y_0 - at, \end{cases}$$

assim

$$\begin{cases} x & = 1 + 6t \\ y & = -1 + 5t, \end{cases}$$

é solução qualquer que seja o $t \in \mathbb{Z}$, assim teremos infinitos pares de soluções.

b) $2x + 3y = 4$

c) $15x + 16y = 17$

Resolva os problemas a seguir que envolvem equações diofantinas lineares de duas variáveis.

1) Quantas moedas de 5 e de 10 centavos são necessárias para obtermos 50 centavos?

2) Sabe-seque um time de basquete jogam 5 pessoas e que um time de vôlei jogam 6 pessoas. 80 estudantes visitarão um grande ginásio de esportes para praticar uma dessas modalidades. Quantas quadras de basquete e de vôlei serão necessárias para que todos os alunos joguem simultaneamente?

APÊNDICE E

CENTRO EDUCACIONAL MUNICIPAL GOVERNADOR LUIZ VIANA FILHO		
ALUNO (A):		**TURNO: Matutino**
PROFESSOR (A): Adna Leile Silva		**TURMA: A**
DATA: ____/____/2019	**ANO: 9° ano**	**NOTA:**

Avaliação do Projeto: Equações Diofantinas.

1) O que você achou do assunto?

   a) Chato. b) Chato, mas interessante. c) Interessante.

2) Você acha que esse assunto vai te ajudar na sua vida acadêmica? Porque?

   ____

   ____

3) Você achava que era capaz de aprender um assunto que é dado no Mestrado Profissional de Matemática? Porque?

   ____

   ____

4) Agora que você aprendeu, como você se vê sabendo que aprendeu um assunto que não compõe a grade curricular da sua série escolar?

   ____

   ____

5) Antigamente muitos filósofos, como Diofanto, deram sua contribuição nos estudos de várias ciências. Você acha isso importante? Porque?

   ____

   ____

6) Você gostaria de ser um filósofo? O que você gostaria de estudar?

   ____

   ____

APÊNDICE F

CENTRO EDUCACIONAL MUNICIPAL GOVERNADOR LUIZ VIANA FILHO		
ALUNO (A):		TURNO: Matutino
PROFESSOR (A): Adna Leile Silva		TURMA: A
DATA: ____/____/2019	ANO: 9° ano	NOTA:

Atividade: Estudo de problemas envolvendo equações diofantinas utilizando o software Geogebra

1) Sabe-se que em um time basquete jogam 5 pessoas e que em um time de vôlei jogam 6 pessoas. 180 estudantes visitarão um grande ginásio de esportes para praticar uma dessas modalidades. Quantas quadras de basquete e de vôlei serão necessárias para que todos joguem simultaneamente.

a) Encontre uma solução para o Problema 1. A solução que você encontrou é a única solução possível?

____

b) Escreva a equação diofantina que descreve o problema.

____

Após a inserção da equação no Geogebra com orientação do professor, responda:

c) Marque 8 pontos em que a reta encontrada intercepta os vértices da malha. O que estes pontos representam?

____

____

d) Alguns pontos obtidos têm coordenadas negativas. Estas soluções são válidas para o problema? Justifique.

____

____

____

e) Quais são as soluções encontradas que são válidas para o problema?

____

f) De um ponto para outro adjacente, o quanto o valor das coordenadas x e y aumentam ou diminuem? Este valor é sempre o mesmo para quaisquer dois pontos adjacentes.

____

____

____

g) Utilize a informação obtida no item f) para encontrar a solução geral da equação diofantina.

____

____