



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



Dissertação do Mestrado

**UMA REVISÃO SISTEMÁTICA SOBRE A
ABORDAGEM GEOMÉTRICA NO ENSINO
DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS**

CEZÁRIO SILVINO BONFIM

Orientador: Prof. Dr. Marcos Grilo Rosa

Feira de Santana - BA

2019

CEZÁRIO SILVINO BONFIM

UMA REVISÃO SISTEMÁTICA SOBRE A ABORDAGEM GEOMÉTRICA NO
ENSINO DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Dissertação apresentada ao Programa de
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT do De-
partamento de Ciências Exatas, UEFS,
como requisito parcial para a obtenção
do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. MARCOS GRILO ROSA

Feira de Santana - BA

2019

Ficha catalográfica - Biblioteca Central Julieta Carteado - UEFS

Bonfim, Cezário Silvino
B696r Uma revisão sistemática sobre a abordagem geométrica no ensino de
funções quadráticas / Cezário Silvino Bonfim. - 2019.
81f.: il.

Orientador: Marcos Grilo Rosa
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Feira de Santana.
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional –
PROFMAT, 2019.

1. Função quadrática (matemática). 2. Matemática - Ensino. 3.
Matemática – Abordagem geométrica. 4. Metodologia do ensino. I. Rosa,
Marcos Grilo, orient. III. Universidade Estadual de Feira de Santana. IV.
Título.

CDU:517.5



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DO DISCENTE CEZÁRIO SILVINO BONFIM DO PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Aos vinte dias do mês de novembro de dois mil e dezenove às 9h no MT55 - Módulo 5, UEFS, ocorreu a Sessão pública de defesa de dissertação apresentada sob o título “**Uma Revisão Sistemática sobre a Abordagem Geométrica no Ensino de Funções**”, do discente **Cezário Silvino Bonfim**, do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Marcos Grilo Rosa (Orientador, UEFS), Roberta D'Angela Menduni-Bortoloti (UESB), que participou por videoconferência, e Joilma Silva Carneiro (UEFS). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pelo discente e das arguições dos examinadores.

Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito: Aprovado.

Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT. Feira de Santana, 20 de novembro de 2019.

Prof. Dr. Marcos Grilo Rosa (UEFS)
Orientador

Prof. Dra. Roberta D'Angela Menduni-Bortoloti (UESB)

Prof. Ma. Joilma Silva Carneiro (UEFS)

Visto do Coordenador:

Prof. Dr. Ana Carla Percontini da Paixão
Coordenadora do Profmat / UEFS

CEZÁRIO SILVINO BONFIM

UMA REVISÃO SISTEMÁTICA SOBRE A ABORDAGEM GEOMÉTRICA NO
ENSINO DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Dissertação apresentada ao Programa de
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT do De-
partamento de Ciências Exatas, UEFS,
como requisito parcial para a obtenção
do título de Mestre.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Roberta D'Angela Menduni Bortoloti
UESB

Profa. MS. Joilma Silva Carneiro
UEFS

Feira de Santana - BA
2019

Agradecimentos

1. Primeiramente a Deus pela calma no momento da turbulência e por ouvir minhas petições e causas que só ele poderia resolvê-las;

2. À minha família, em especial meu filho Dan e minha esposa Rute, pela alegria dispensada e que como um bálsamo curou muitas feridas;

3. Aos colegas do Mestrado que muito colaboraram para suportarmos os dias que pareciam não ter fim;

4. À equipe gestora da minha Escola, pela compreensão das minhas falhas, porém sem faltas ao trabalho;

5. Aos irmãos na fé cristã, pelas vezes que oraram por mim;

6. Aos professores do Profmat - Uefs, que muito se humanizaram com nossa causa e limitações, em especial ao meu orientador, pela paciência e generosidade em dispensar seu tempo em responder meus questionamentos;

7. "O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001"

"This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Finance Code 001"

Lista de Figuras

3.1	Número de artigos publicados por ano. Fonte: Obtida a partir do cruzamento dos dados da pesquisa	11
3.2	Competências e Habilidades do Componente Curricular. Fonte: OCEM(2015)	17
3.3	O clássico problema da área máxima. Fonte: Pereira, Uehara e Núñez (2012, p.176)	18
3.4	Complexidade do processo de conversão de registros língua materna registro geométrico. Fonte: Meneses e Mariani (2014, p.139)	19
3.5	Abordagem geométrica antecipando o estudo algébrico de função quadrática. Fonte: Ghisleni e Battisti (2018, p.245)	20
3.6	Elementos da geometria euclidiana usados corriqueiramente na resolução de equações. Fonte: Ramos e Curi (2014, p.464)	24
3.7	Diagrama de rede em formato básico: caso $x_0 = 0, 1$ e $k = 2, 8$. Fonte: Baier(2016, p.251)	25
3.8	Diagrama de rede em formato complexo variação da população inicial e do parâmetro k . Fonte: Baier(2016, p.252)	25
3.9	Representação gráfica dos dados obtidos. Fonte: Silva e Almeida (2015, p.577)	28
3.10	Diálogos dos interpretantes. Fonte: Silva e Almeida (2015, p.585)	28
3.11	A reta de ajustamento dos dados. Fonte: CARNEIRO(2002)	29
3.12	Translações feitas a partir representação elementar da função quadrática. Gravina (1987, p.4)	30
3.13	Cartas componentes do jogo Memória usado para ensinar função quadrática. Fonte: Strapason e Bisognin (2013, p.584)	31

3.14	Caso 1: Famílias de parábolas $f(x) = ax^2 + x$ determinada pela variação de a , fixando b e tomando $c = 0$ de lugar geométrico igual à reta de equação $y = \frac{1}{2}x$. Fonte: Souza e Silva (2006, p.112)	32
3.15	Caso 2: Famílias de parábolas para $f(x) = ax^2 + 1$ determinada pela variação de a , fixando b e c cujo lugar geométrico é o ponto $(0, 1)$. Fonte: Souza e Silva (2006, p.113)	32
3.16	Caso 3: Famílias de parábolas $f(x) = x^2 + bx + 1$ Famílias determinada pela variação de b fixando a e c de lugar geométrico correspondente à parábola de equação $y = -ax^2 + c$. Fonte: Souza e Silva (2006, p.114)	33
3.17	Variações da curva $y = ax^2$. Fonte: Mendes et al. (2017, p.217)	34
3.18	caso: a e b constantes e c variável. Fonte: Souza et all (1996)	35
3.19	caso: a e c constantes e b variável. Fonte: Souza et all (1996)	35
3.20	caso: b e c constantes e a variável. Fonte: Souza et all (1996)	35
3.21	Questionário desenvolvido com ênfase na abordagem geométrica da representação do conceito de função. Fonte: ANDRADE E SARAIVA (2012, p.166)	37
3.22	Exercício de reconhecimento do objeto função a partir da comparação de registros semióticos. Fonte: Andrade e Saraiva (2012, p.167)	38
3.23	Classificação dos estudos da pesquisa pela tendência utilizada. Fonte: Figura obtida pelo cruzamento dos dados da pesquisa.	43
3.24	Diferentes registros do mesmo objeto matemático: Função Quadrática. Fonte:Thiel, Barbosa e Moretti (2018, pg.4)	48
3.25	Quadro de conteúdos abordado na questão 4	51
3.26	Diferentes registros para o mesmo objeto matemático. Fonte: Meneses e Mariani (2014, p.139)	53
3.27	Diagrama obtido pela reciproca da observação feita pelo autor. Fonte: Carvalho (1993)	57
3.28	Quadro metodológico e possíveis diálogos para contextos. Fonte: Zanlorenzi (2017, p. 222)	61

Sumário

Agradecimentos	vi
Lista de Figuras	viii
Resumo	xi
Abstract	xii
1 Introdução	1
2 Procedimentos metodológicos	5
2.1 Definição do problema	5
2.2 A importância da Pesquisa	6
2.3 Revisão sistemática de literatura	7
2.4 Coleta dos dados	9
3 Estratégias de ensino de funções quadráticas	11
3.1 A “intensidade” do uso da geometria na proposta de ensino	13
3.1.1 Uso intenso da abordagem geométrica na estratégia de ensino de função quadrática	15
3.1.2 Uso moderado da abordagem geométrica na estratégia de ensino de função quadrática	23
3.1.3 Não faz uso de geometria na estratégia de ensino	39
3.2 Fundamentação teórica: tendência utilizada na proposta	42
3.2.1 Uso da tecnologia na educação matemática	44
3.2.2 Filosofia e História da educação matemática	45
3.2.3 Resolução de Problemas	52

	x
3.2.4 Modelagem Matemática	55
3.2.5 Etnomatemática	59
3.3 Relação com livros didáticos	61
4 Considerações Finais	64
Referências Bibliográficas	67

Resumo

Desde que a disciplina Matemática foi introduzida na grade curricular do Ensino Secundário no início do Século XXI a partir da fusão da Álgebra, Geometria e Aritmética, o conteúdo Função tem desempenhado o papel de conectar os saberes oriundos desses três pilares do conhecimento matemático. No entanto, a historicidade da abordagem do ensino de função aponta para um distanciamento progressivo do papel unificador atribuído ao pensamento funcional. Dentre os vários inconvenientes cognitivos e epistemológicos, percebe-se uma exaltação da abordagem algébrica em detrimento da abordagem geométrica, a qual conjecturamos como essencial para o desenvolvimento do conhecimento matemático. Dentre os vários tipos de funções abordadas no Ensino Médio, a função quadrática é a mais estudada pelos alunos, ao lado da função polinomial do 1º grau, aparecendo nos mais diversos contextos de explanação do conhecimento matemático. Esse trabalho sintetiza as tendências metodológicas de ensino de função quadrática e faz uma análise das estratégias de ensino que usa a abordagem geométrica com o objetivo de consolidar o pensamento funcional. Para tanto, fez-se uso da revisão sistemática de literatura, a qual, aponta que a geometria tem sido recorrente nos estudos que propõem estratégias inovadoras para o ensino de funções quadráticas e que as estratégias em que se não dá relevância a uma abordagem geométrica se aproximam das propostas tradicionais de ensino.

Palavras-chave: Função quadrática. Abordagem geométrica. Metodologias de ensino.

Abstract

Since the Mathematical discipline was introduced in the curriculum of Secondary Education in the early 21st Century from the fusion of Algebra, Geometry and Arithmetic, Function content has played the role of connecting the knowledge coming from these three pillars of mathematical knowledge. However, the historicity of the function teaching approach points to a progressive distancing from the unifying role attributed to functional thinking. Among the various cognitive and epistemological drawbacks, there is an exaltation of the algebraic approach over the geometric approach, which we conjecture as essential for the development of mathematical knowledge. Among the various types of functions addressed in high school, the quadratic function is the most studied by students, along with the 1^o polynomial function, appearing in the most diverse contexts of explanation of mathematical knowledge. This paper synthesizes the methodological trends of quadratic function teaching and makes an analysis of teaching strategies that uses the geometric approach to consolidate functional thinking. For this, we used the systematic literature review, which points out that geometry has been recurrent in studies that propose innovative strategies for teaching quadratic functions and that strategies in which a geometric approach is not relevant approach the traditional teaching proposals.

Keywords: Quadratic function. Geometrical approach. Teaching methodologies.

Capítulo 1

Introdução

No início do século XXI, a disciplina Matemática foi introduzida no ensino secundário (que atualmente corresponde aos Anos Finais do Ensino Fundamental e ao Ensino Médio) a partir da fusão das disciplinas Álgebra, Geometria e Aritmética. É nesse contexto que se tem o processo de inserção do conteúdo função no corpo de conteúdos da nova disciplina Matemática (BRAGA, 2006, p. 25). Fundamentada nos princípios do movimento de modernização do ensino secundário proposto por Felix Klein, a escolha de Função para além de conduzir tais mudanças, tinha pretensão maior, o de introduzir o Cálculo Infinitesimal no ensino secundário (BRAGA, 2006, p. 26).

Com o intuito de introduzir o Cálculo Infinitesimal no ensino secundário, Felix Klein defende que, conforme BRAGA (2006), o tema função seja visto como eixo norteador que deveria entrelaçar os diversos conteúdos da Álgebra, Geometria e Aritmética. Dessa forma:

Cabe observar que *função* revelava-se imprescindível para a abordagem por ele proposta para a disciplina-rização do Cálculo, fato este denunciado pela própria nomenclatura de seus elementos constituintes: limite de uma função, derivada de uma função num ponto, função derivada, função primitiva, integral de uma função, etc. (BRAGA, 2006, p. 51).

Sobre a relevância do conceito de função para o ensino de Matemática, Braga (2006) ressalta que:

O pensamento funcional (...) deveria ser cultivado desde as séries iniciais com a atuação do aluno sobre a ideia de variação e dependência. Aos poucos, com o progressivo e constante trânsito pelas representações tabular, gráfica e analítica de função, o aluno caminharia em direção à sua formação funcional (BRAGA, 2006, p. 52).

Neste sentido, BORGES (2006, p. 46) considera mais adequado um conceito de função que explicita “o conceito de variável e concomitantemente, o de movimento”. A partir de sua experiência docente, o autor-professor dessa dissertação entende que o tema função é necessário e deve figurar em todo o Ensino Médio nas aulas de Matemática. Se por um lado, encontramos pesquisas sobre o ensino de funções que englobam variadas metodologias (e.g. jogos, sequências didáticas, construção de objetos, produção de vídeos, utilização de softwares e outros recursos tecnológicos, análise de livros didáticos, abordagens de temas transversais), por outro lado, a nossa percepção é que na sala de aula predomina uma aversão do alunado à Matemática de uma maneira ampla, como é reconhecido pelo documento da Secretaria de Educação do Estado da Bahia, Orientações curriculares para o ensino médio, área Matemática:

A melhoria do ensino da Matemática tem sido alvo de preocupações de diversos(as) pesquisadores(as) e educadores(as). Suas reflexões acerca das possibilidades de um ensino mais significativo, tem como propósito a busca para reverter a aversão dos(as) estudantes com relação à Matemática e superar processos de ensino que não atendem às expectativas de professores(as) e de estudantes no processo ensino-aprendizagem (BAHIA, 2015, pg.19).

A prática docente de Matemática desprovida de uma reflexão pedagógica, em geral, ignora os fatores históricos associados à evolução do ensino dessa disciplina, impossibilita a interdisciplinaridade e a transversalidade de temas variados, o que contradiz os princípios filosóficos da Educação Matemática, uma vez que esta, tem servido como arcabouço metodológico para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, é uma área com amplo espectro, de inúmeros e complexos saberes, na qual apenas o conhecimento da matemática e a experiência de magistério não garantem competência a qualquer profissional

que nela trabalhe (FIORENTINI E LORENZATO, 2012, P.5) Sendo assim, a percepção do professor-autor é a de que a realidade do ensino de matemática reflete um quadro avesso ao que rege às Orientações Curriculares para o Ensino Médio, uma vez que este documento traz na sua apresentação a seguinte recomendação:

Nesta perspectiva, propõe-se que o(a) professor(a) de Matemática do Ensino Médio, na sua prática pedagógica, busque uma abordagem histórico-cultural dos conteúdos matemáticos relevantes produzidos ao longo da história, indispensáveis tanto para a compreensão da realidade humana quanto para a formação humana integral e humanização dos(as) estudantes (BAHIA, 2015, p.11).

O dia à dia em sala de aula por diversas vezes nos surpreende. Durante uma aula sobre coordenadas do vértice de uma função quadrática, o professor-autor afirmou que a abscissa do vértice corresponde à média aritmética das zeros dessa função. Em outro momento, o professor-autor explicou à turma a influência do discriminante na determinação dos zeros de uma função quadrática. No caso em que o discriminante é negativo, o professor-autor mostrou que a função quadrática não tem zeros mas tem vértice e, portanto, abscissa e ordenada. Foi então que um aluno da turma fez a seguinte pergunta: como algo que não existe pode ter média aritmética? O professor-autor percebeu desde aquele momento que ensinar função quadrática, usando apenas uma abordagem algébrica, corresponde a criar labirintos cognitivos que muitas vezes nem o professor conhece o itinerário de saída.

Desde então, o professor-autor buscou usar argumentos geométricos que facilitavam a compreensão dos alunos, evitando “paradoxos desequilibrantes” propostos pelo alunado, como o descrito no parágrafo anterior. É óbvio que aqui não se trata de constrangimento de ouvir perguntas inusitadas; pelo contrário, há um encantamento com o raciocínio lógico-matemático do aluno. A preocupação do professor-autor é refletida nas seguintes questões: “Quantos equívocos epistemológicos como esse, eu criei ao longo dos meus 16 anos de sala de aula? E quantos poderia ter sido evitados se tivesse usado uma abordagem geométrica em minhas aulas de matemática?”

O autor-professor tem percebido que o ensino de funções, tem se pautado em uma pobreza de representações, uma vez que prioriza uma abordagem algébrica em detrimento

de outras (e.g. geométrica, computacional, interdisciplinar, contextualizada) a Tradição da Matemática Escolar: definição, exemplos seguido de exercícios.

No Profmat, durante a disciplina *Números e Funções Reais*, os conteúdos Função Afim e Função Quadrática foram apresentados em uma abordagem geométrica com alto potencial de transformar a forma como o professor-autor ensinava na Educação Básica. Essencialmente, o professor-autor percebeu que o conceito de função quadrática torna-se mais clara quando é vista a partir do lugar geométrico dos pontos de uma parábola ao invés de apenas a mera análise de sua forma analítica $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Essa abordagem geométrica pode ser útil para dirimir erros cognitivos e paradoxos epistêmicos, uma vez que possibilita ao aluno uma melhor compreensão do gráfico da função quadrática, seus elementos geométricos e seu comportamento.

Esse trabalho tem como principal objetivo avaliar como a geometria é abordada nas estratégias de ensino de funções quadráticas presentes na literatura. Para tanto, faremos uma revisão sistemática de literatura. Esta dissertação de mestrado está organizada da seguinte forma: No Capítulo 2, tratamos os procedimentos metodológicos, isto é, como se processou a coleta dos estudos, qual o método utilizado e de que forma esses trabalhos estão distribuídos ao longo das 3 décadas que compreende a publicação dos estudos; no Capítulo 3, apresentamos resultados e discussões, ou seja, faremos a análise dos estudos de modo a classificá-los em Categorias: (“intensidade da abordagem geométrica na proposta de ensino, Fundamentação teórica: tendência utilizada na proposta de ensino e Relação com livros didáticos) e subcategorias, ; no Capítulo 4, tecemos as considerações finais.

Capítulo 2

Procedimentos metodológicos

2.1 Definição do problema

Não é preciso muito esforço para se deparar com a assertiva de que a Educação no Brasil carece de melhorias. Em Matemática, essa assertiva é alimentada por posturas hierárquicas na relação professor-aluno e, sobretudo, quando as constantes transformações pelas quais passam a sociedade e o próprio conhecimento matemático são ignoradas, refletindo nas escolhas dos temas a serem abordados em sala de aula. A escolha do conteúdo a ser trabalhado necessita de uma reflexão em torno das implicações na formação do sujeito associada à adequação das estratégias de ensino escolhidas pelo professor. Os PCNEM (2006), ilustram o caráter subjetivo que permeia a escolha de temas que envolvem o ensino de funções:

É importante evitar detalhamentos ou nomenclaturas excessivos. Por exemplo, se o único caso de funções inversas que os alunos verão no ensino médio forem as funções exponencial e logarítmica, não há necessidade de todo o estudo sobre funções injetoras, sobrejetoras e inversíveis, assim como se o foco do estudo estiver na análise de gráficos e nas aplicações da função logarítmica, podemos questionar por que estudar cologarítmicos, característica e mantissa. Ao selecionar um tema, a forma de trabalho deve ser pensada de modo integrado à sua escolha, evitando repetir o modelo curricular das listas de assuntos enfileirados. (PCNEM, 2006, p.120)

No caso específico de funções quadráticas, evidencia-se na prática uma prioridade por uma abordagem algébrica e analítica na Educação Básica, em detrimento de uma abordagem geométrica. Ainda que função quadrática possua um apelo geométrico, pelo fato de seu gráfico ser uma parábola, a experiência do professor-autor permite especular que quase sempre o caminho seguido na sala de aula é o de uma ênfase por uma abordagem algébrica e analítica. Esta ênfase tem como resultado um ensino mnemônico, onde o aluno apenas memoriza regras sobre o gráfico de uma função quadrática sem compreender de maneira aprofundada o seu comportamento. O aluno é conduzido a construir o gráfico por meio da escolha de pontos que nem sempre são os mais adequados devido à posição do vértice da parábola. Consequentemente, o processo de ensino de funções quadráticas é limitado a forçar o aluno a acreditar que a curva a ser desenhada é uma parábola.

Diante dessa problemática, levantamos a seguinte questão de nossa pesquisa: As propostas de ensino de funções quadráticas recorrem a abordagens geométricas? Sendo assim, buscamos avaliar como a geometria é abordada nas estratégias de ensino de funções quadráticas presentes na literatura.

2.2 A importância da Pesquisa

A diversificação da metodologia de ensino é uma característica inerente ao trabalho do professor que acredita que a Educação Matemática transcende o ato de ensinar resolver continhas e equações sem sentidos (D'AMBROSIO, 2001) e ou aplicar teoremas sem

nenhum nexos com a realidade do sujeito cidadão que se educa. O ato de ensinar deve promover no aluno estímulos para uma atuação consciente no seu espaço social, para tomada de decisões, para questionamentos e para interpretações de respostas relativas à sua atuação como agente capaz de mudar a própria realidade. A busca por estratégias de ensino integradas ao contexto no qual o aluno está mergulhado possibilita que conhecimentos sejam conectados e transformados em agentes de modificação da realidade, contribuindo para a efervescência de ideias, afloração da criatividade e mobilização de conhecimentos escolares em ferramentas cognitivas capazes de resolver problemas do dia-a-dia.

Mais que um levantamento bibliográfico, nossa pesquisa possibilita conhecer, comparar e compreender trabalhos que foram elaborados com a finalidade de propor estratégias de ensino de funções quadráticas nos mais diversos contextos, usando os mais variados recursos disponibilizados pela realidade social na qual está inserida a escola. Muitos dos estudos coletados propuseram estratégias com um certo grau de reflexão, sejam por utilizar recursos tecnológicos, sejam por questionar a Tradição da Matemática Escolar, a hierarquização e a linearidade da apresentação do conhecimento matemático na Educação Básica, dentre outros. Outros estudos apontaram estratégias que fizeram os alunos perceberem que a Matemática é uma ferramenta intelectual que muito contribui para o processo de humanização e desenvolvimento das ciências e da cultura em geral.

Ressaltamos que funções quadráticas é um tema que é um elo entre o Ensino Médio e o Ensino Fundamental, visto que nesse se estuda equações do segundo grau. Desta forma, pode-se revisitar um tópico algébrico do Ensino Fundamental - equações do segundo grau - sob o ponto de vista geométrico, reforçando a importância de se estabelecer conexões entre diferentes ramos da própria Matemática.

2.3 Revisão sistemática de literatura

Uma metodologia, segundo Prodanov e Freitas (2013, p.14) é a “aplicação de procedimentos e técnicas que devem ser observadas para a construção do conhecimento, com o propósito de comprovar sua validade e utilidade nos diversos âmbitos da sociedade”. Segundo os autores, o método científico é “um conjunto de procedimentos adotados com o propósito de atingir o conhecimento” (PRODANOV E FREITAS, 2013, p.24).

Tendo em vista a complexidade do nosso objeto de estudo - a abordagem geomé-

trica nas metodologias de ensino de funções quadráticas, bem como a subjetividade das relações estabelecidas entre estas metodologias e o aprendizado dos alunos, seguimos a concepção apresentada por Prodanov e Freitas (2013)[?], para os quais “*A interpretação dos fenômenos e a atribuição de significados são básicas no processo de pesquisa qualitativa. Esta não requer o uso de métodos e técnicas estatísticas*”(Prodanov e Freitas, 2013, p.70). Dessa forma, abordaremos nossa problemática de pesquisa, seguindo o método qualitativo.

Do ponto de vista de seus objetivos nosso estudo se classifica como uma pesquisa descritiva, a qual para Pradanov e Freitas (2013) [?] se dá "quando o pesquisador apenas registra e descreve os fatos observados sem interferir neles. Visa a descrever as características de determinada população ou fenômeno ou o estabelecimento de relações entre variáveis."(Pradanov e Freitas, 2013, p.52).

Neste trabalho, decidimos realizar uma revisão sistemática de literatura, que segundo Petticrew e Roberts (2006), é um tipo específico de revisão bibliográfica que tem se tornado uma ferramenta cada vez mais usada pela Ciência. Uma revisão sistemática de literatura deve ser empregada sempre que determinado conhecimento apresenta incerteza ou inconsistência quanto aos resultados por ele evidenciados. Para tanto, os autores delinearam sete etapas para a revisão sistemática, a saber:

1. Definir claramente a questão que a revisão está estabelecendo para resposta ou a hipótese de que a revisão irá testar;
2. Determinar os tipos de estudos que precisam ser localizados para responder sua pergunta;
3. Realizar uma pesquisa bibliográfica abrangente para localizar os estudos;
4. Filtrar os resultados dessa pesquisa, ou seja, examinar detalhadamente os estudos coletados, decidindo quais deles parecem satisfazer plenamente critérios de inclusão e quais devem ser excluídos.
5. Avaliar criticamente os estudos incluídos;
6. Sintetizar os estudos e avaliar a heterogeneidade entre os estudos selecionados;
7. Divulgar os resultados da revisão.

2.4 Coleta dos dados

Para a coleta de dados, utilizamos os descritores “função quadrática” e “função polinomial do segundo grau”. A pesquisa bibliográfica foi feita nos meses de maio e junho de 2019 em bancos de dados de periódicos de Educação Matemática, Ensino de Matemática, Ensino de Física e no Portal Periódicos da CAPES. Cada periódico selecionado possui Qualis em Ensino ou Educação. Os 39 periódicos selecionados foram os seguintes: Bolema; Revista de Ensino de Ciências e Matemática; Alexandria (UFSC); Amazônia - Revista de Educação em Ciências e Matemáticas (online); Educação Matemática em Revista; Educação Matemática em Revista-RS; Educação Matemática e Pesquisa; Investigações em Ensino de Ciências (online); Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática; Rencima - Revista de Ensino de Ciências e Matemática; Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática; Revista de Educação, Ciências e Matemática; Zetetiké; Boletim Online de Educação Matemática; Ensino de Ciências e Tecnologias em Revista; Perspectivas da Educação Matemática; Revista Paranaense de Educação Matemática; Acta Latino-americana de Matematica Educativa; Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática; Caminhos da Educação Matemática em Revista; Contrapontos; Hipátia - Revista Brasileira de História, Educação e Matemática; Rematec - Revista de Matemática, Ensino e Cultura (UFRN); Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática; RPM - Revista do Professor de Matemática; Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas; Tema - Tendências em Matemática Aplicada e Computacional; Boletim Cearense de Educação e História da Matemática; Cadernos IME (série matemática, versão online); Educação Matemática em Foco (Uepb); Remat: Revista Eletrônica da Matemática; Revista de Produção Discente em Educação Matemática; Ensino da Matemática em Debate; Professor de Matemática Online; Revista de História da Educação Matemática; Revista do Instituto Geogebra Internacional de São Paulo (IGISP); Matemática e Estatística em Foco; Recen - Revista Ciências Exatas e Naturais; e Revista Brasileira de Ensino de Física.

A nossa pesquisa retornou 50 publicações, conforme mostra a Tabela 2.1:

Foram aplicados dois filtros aos resultados obtidos. Para o primeiro filtro, estabelecemos os seguintes critérios de exclusão: indisponibilidade de publicação do material; publicações de relatórios de caso, comunicações rápidas, revisões de livro, relatórios de conferências, comentários, prefácios e tutoriais; publicações de comitês editoriais; traba-

Descritor	Total de publicações
Função Quadrática	46
Função Polinomial do Segundo Grau	4
Total Geral	50

Tabela 2.1: Número de artigos publicados por descritores.

lhos submetidos e não publicados; publicações em idioma distinto do português. Após a aplicação deste filtro, foram selecionados artigos de pesquisas originais, revisões de literatura e capítulos de livros. Para o segundo filtro, utilizamos o seguinte critério de exclusão: não apresentar ou não abordar uma estratégia de ensino que trate de funções quadráticas. Após a aplicação do segundo filtro, foram excluídos 20 estudos e o nosso corpus de análise se constituiu de 31 publicações.

Capítulo 3

Estratégias de ensino de funções quadráticas

Neste Capítulo, apresentamos e discutimos os resultados encontrados. Os 31 estudos selecionados para essa pesquisa são todos artigos publicados em periódicos de Educação Matemática, Ensino de Matemática e Ensino de Física sendo que a publicação mais antiga é datada de 1987 e a mais recente, de 2018. A Figura 3.1 mostra a distribuição da quantidade de artigos por ano. O ano de 2015 teve o maior número de artigos publicados.

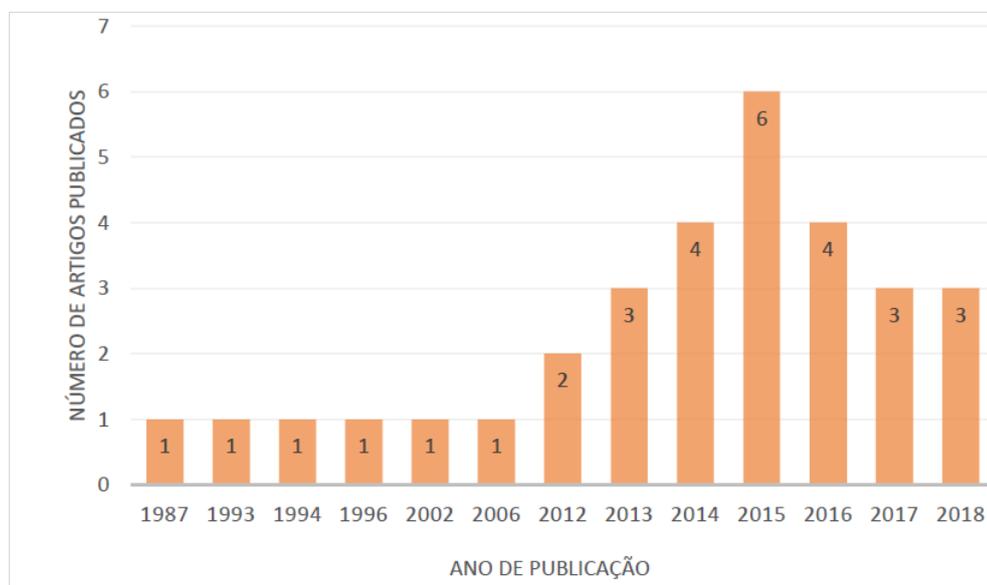


Figura 3.1: Número de artigos publicados por ano. Fonte: Obtida a partir do cruzamento dos dados da pesquisa

As estratégias de ensino de função quadrática presentes nos 31 estudos seleciona-

dos nessa pesquisa seguem basicamente duas abordagens a serem trabalhadas no Ensino Médio: a Algébrica e a Geométrica. Na abordagem algébrica, são explorados os processos de construção do gráfico da função que podem ser organizados em quatro grupos: convencional com o auxílio de régua e papel - 6 (19%) estudos; através do uso de softwares - 10 (32%); uso da definição formal de função quadrática - 11 (35%); análise dos pontos notáveis da parábola - 9 (29%). A abordagem geométrica é usada em atividades que: fazem uso da definição de parábola como lugar geométrico - 7 (23%) dos artigos analisados; fazem cálculos para se obter medidas geométricas como perímetros, áreas e lados de figuras geométricas - 10 (32%); exploram figuras geométricas (triângulos, quadriláteros e circunferências) sem necessariamente envolver cálculos - 9 (29%); envolvem a construção de materiais concretos ou objetos de aprendizagens - 4 (13%). A Tabela 3.1, sintetiza as duas abordagens analisadas:

ABORDAGEM	ATIVIDADE DESENVOLVIDA	TOTAL	(%)
ALGÉBRICA	Construção de gráficos usando softwares	10	32
	Construção de gráficos de forma convencional	6	19
	Definição formal da função quadrática	11	35
	Pontos notáveis da parábola	9	29
GEOMÉTRICA	Definição da parábola como um lugar geométrico	7	23
	Cálculos de medidas geométricas	10	32
	Utilização de figuras geométricas	9	29
	Construção de materiais concretos	4	13

Tabela 3.1: Distribuição dos estudos quanto à abordagem. Fonte: A partir do cruzamento dos dados da pesquisa.

A partir da avaliação das estratégias de ensino de funções quadráticas pesquisadas, definimos 3 categorias de análises, a saber: A “intensidade” do uso da geometria na proposta de ensino (Seção 3.1); Fundamentação teórica: tendência utilizada na proposta (Seção 3.2); e Relação com livros didáticos (Seção 3.3). Passemos agora à análise das categorias elencadas a partir do cruzamento dos dados da pesquisa.

3.1 A “intensidade” do uso da geometria na proposta de ensino

Discutiremos nessa seção a intensidade da abordagem geométrica nas propostas de ensino de funções quadráticas. Para essa pesquisa, admitimos que a intensidade da abordagem geométrica na estratégia de ensino da função quadrática corresponde à importância que a geometria euclidiana desempenha na proposta metodológica desenvolvida pelo autor ou enquanto recurso cognitivo para o ensino dessa função. Sendo assim, nessa categoria de análise estabelecemos como subcategorias: uso intenso da abordagem geométrica; uso moderado da abordagem geométrica; não faz uso da abordagem geométrica. Apresentamos na Tabela 3.2 os trabalhos classificados quanto à intensidade da abordagem geométrica na proposta metodológica:

Uso Intenso	<p>Pereira, Uehara e Núñez (2012)</p> <p>Meneses e Mariani (2014)</p> <p>Ghisleni e Battisti (2018)</p> <p>Paterlini (1994)</p> <p>Castro e Silva (2015)</p> <p>Oliveira e Dorini (2013)</p> <p>Rocha, Poffal e Meneghetti (2015)</p> <p>Feltes e Puhl (2016)</p> <p>Rodrigues e Mackedanz (2017)</p> <p>Uliana (2013)</p> <p>Gitirana (2016)</p> <p>Thiel, Barbosa e Moretti(2018)</p>
Uso Moderado	<p>Ramos e Curi (2014)</p> <p>Baier(2016)</p> <p>Viseu e Menezes (2014)</p> <p>Silva e Almeida (2015)</p> <p>Carneiro (2002)</p> <p>Gravina (1987)</p> <p>Strapason e Bisognin (2013)</p> <p>Souza e Silva (2006)</p> <p>Mendes et all (2017)</p> <p>Lutz (2015)</p> <p>Melo e Rehfeldt (2016)</p> <p>Souza et all (1996)</p> <p>Andrade e Saraiva (2012)</p> <p>Dias et all (2015)</p>
Não Faz Uso	<p>Maio (2015)</p> <p>Maciel e Cardoso (2014)</p> <p>Carvalho (1993)</p> <p>Lopes (2018)</p>

Tabela 3.2: Intensidade da abordagem geométrica na estratégia de ensino

3.1.1 Uso intenso da abordagem geométrica na estratégia de ensino de função quadrática

Dos 31 estudos selecionados para nossa pesquisa, classificamos 12 trabalhos, conforme Tabela 3.2, que fazem “uso intenso da abordagem geométrica na estratégia de ensino de função quadrática”. Gitirana (2016), Oliveira e Dorini (2013), Rocha, Poffal e Meneghetti (2015), Feltes e Puhl (2016) fizeram uso de geometria dinâmica em suas propostas de ensino usando softwares que permitem a construção e o estudo do comportamento do gráfico a partir da variação de seus coeficientes. Esses estudos usam a geometria euclidiana de forma intensa nas atividades propostas. Gitirana (2016) fundamenta seu trabalho nos estudos de Duval (2011) sobre os registros de representação semiótica. A autora chama atenção para o seguinte fato:

Comumente, o estudo de como se obter o gráfico de uma função a partir de sua fórmula é feito por meio do traçado de vários pontos para identificar o tipo de curva gerada. Após essa abordagem, é comum se assumirem algumas características da curva (geométrica) para definir um procedimento rápido para traçar o gráfico, sem explicitar tal articulação (Gitirana, 2016, p.2).

Quanto ao software Geogebra usado em sua pesquisa a autora o define:

O Geogebra é um software gratuito que permite o uso de representações distintas do mesmo objeto matemático, de forma dinâmica e articulada, possibilitando ao usuário a visualização de tais representações em uma única tela. Pode-se, por exemplo, construir uma cônica que passa por cinco pontos dados e ver sua forma, algébrica, gráfica, em língua materna, tabular etc. Depois alterar um dos pontos e ver a alteração provocada na curva (Gitirana, 2016, p.3).

Gitirana (2016) classifica o Geogebra como “um recurso importante para uma abordagem do conceito de parábola que busque articular” a Geometria e a Álgebra, bem como diferentes visualizações em uma mesma tela. A autora apresenta as definições de *Construção Mole* e *Construção Robusta* e ressalta a importância de articular a geometria analítica

com a geometria elementar, favorecendo a construção do gráfico de uma função quadrática.

Percebe-se que nos trabalhos que fazem uso de geometria dinâmica analisados na nossa pesquisa, o uso da geometria é fundamental para o êxito no processo de aprendizagem de funções e que a compreensão da relação entre os coeficientes de um polinômio do segundo grau e o comportamento do gráfico de uma função quadrática pode se tornar mais eficiente com auxílio de softwares. As estratégias de ensino por meio de geometria dinâmica são, em geral, sequências didáticas desenvolvidas com o objetivo de articular o conhecimento algébrico com o geométrico utilizando softwares que constroem gráficos de funções. Dentre estes softwares, o Winplot e o Geogebra são os mais requisitados, uma vez que, juntos totalizam 66% dos estudos analisados que fazem uso de softwares nas metodologias de ensino de função quadrática. A escolha feita pelo Winplot se dá pela simplicidade do programa o que não reduz sua eficiência e potencial didático, frente ao seu concorrente mais evoluído, o Geogebra o qual teve a mesma frequência de uso que o Winplot nas abordagens metodológicas, ambos gratuitos.

As atividades com geometria dinâmica consistem basicamente em fixar um e variar os demais coeficientes da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Tais atividades têm como objetivo principal, desenvolver no aluno a noção de dependência entre as grandezas dependente y e independente x . Vale ressaltar que a Aritmética possibilita através do cálculo do valor numérico dessas funções perceber tal dependência, no entanto, isso requer um número considerado de operações elementares, o que para a concepção da maioria dos alunos (adolescentes) desvincula os objetivos da proposta. A abordagem algébrica permite através da representação gráfica e cálculos dos valores notáveis da função quadrática perceber as relações entre os coeficientes e esses valores. Mas, a vantagem de variar os coeficientes de uma função quadrática por meio de aplicativos computacionais é que as transformações do gráfico são imediatas.

Outra estratégia identificada na revisão sistemática feita nessa pesquisa é a construção de materiais concretos ou objetos de aprendizagem para o ensino de funções quadráticas, tais como construção de espelhos parabólicos: Rodrigu es e Mackedanz (2017); objetos manipuláveis: Uliana (2013); Jogos: Strapason e Bisogninv(2013) e por fim, criação de vídeos: Maciel e Cardoso (2014). Desses estudos, os dois primeiros, fazem uso intenso de geometria em suas estratégias de ensino. A elaboração desses instrumentos, em

geral, se baseiam nas propriedades geométricas das parábolas. Observa-se que durante a criação desses materiais os alunos, organizados em grupos ou individualmente, se deparam com problemas de ordem física ou técnica nos materiais utilizados cujo propósito requer algum conhecimento ou conceito geométrico (e.g. distância focal, eixo de simetria, pontos extremos, rotação ou translação de eixos, entre outros). O manuseio de materiais concretos é apontado como fundamental para o processo de abstração do objeto em estudo, em especial no ensino de funções, onde a necessidade de relacionar grandezas envolvidas no problema abordado mostra-se um campo fértil para o desenvolvimento de tais instrumentos didáticos. Como pode ser visto no quadro retirado das Orientações Curriculares para o Ensino de Matemática - OCEM(2015) [2]

Compreender padrões, relações e funções, representando e analisando situações e estruturas matemáticas algebricamente		TS	TS	C
H	Nomear, comparar, medir, e identificar regularidades.			
A	Generalizar padrões, usando função explícita e recursivamente definida.			
B	Utilizar relações e funções em diferentes representações que retratem as diversas formas de pensar e manipular objetos matemáticos.			
I	Fazer o estudo de funções de uma variável, investigando taxas de variações com base em dados gráficos e numéricos. Representar e operacionalizar estruturas algébricas em situações práticas.			
L	Identificar e comparar as propriedades de classes de funções, como as exponenciais, polinomiais, racionais, logarítmicas e periódicas.			
I	Interpretar algumas situações-problema por equações ou inequações a partir de funções afins, quadráticas, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas, utilizando as propriedades da igualdade ou desigualdade, na construção de procedimentos para resolvê-las, discutindo o significado das raízes encontradas em confronto com a situação proposta.			
D				
A				
D				
E				
S				

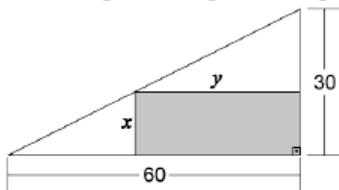
Figura 3.2: Competências e Habilidades do Componente Curricular. Fonte: OCEM(2015)

Nos trabalhos de Uliana (2013) e de Rodrigues e Mackedanz (2017) temos duas propostas de construção de material concreto para facilitar a compreensão do conceito de função quadrática e das propriedades geométricas e algébricas inerentes a essas funções. Uliana (2013) propõe a inclusão de alunos cegos nas aulas de matemática com a construção de um kit pedagógico para construção do gráfico da função quadrática no qual a utilização e representação geométrica é fundamental para o desenvolvimento do objeto de aprendizagem. O conceito algébrico e geométrico de função desenvolvido nessa atividade tendo em vista o público a que se destina é de grande relevância, uma vez que explora conceitos de simetria, representação gráfica, formato da curva, deslocamento do gráfico,

movimentos de translação e reflexão. O que para uma pessoa que enxerga pode ser trivial mas, para um aluno cego é muito gratificante. Por outro lado, a atividade desenvolvida por Rodrigues e Mackedanz (2017) faz uso de conceitos da função quadrática e de elementos da geometria euclidiana para construir um objeto que tem diversas aplicações no dia a dia - o espelho parabólico.

A geometria euclidiana tem grande relevância na proposta metodológica apresentada por Pereira, Uehara e Núñez (2012), na qual os autores fazem uma análise das questões discussivas da prova de matemática do vestibular da UFRN. Os autores selecionaram a questão 4 dessa prova a qual aborda o conteúdo de função contextualizando-o numa situação prática que envolve o cálculo da área máxima de um terreno conforme mostra a Figura 3.2.

- 4) Um lote retangular, doado a uma instituição filantrópica, deverá ser demarcado num terreno em formato de triângulo retângulo. Na figura, x e y representam as dimensões desse lote.



- a) Sabendo que a área, S , do lote é dada pela expressão $S = 60x - 2x^2$, determine o valor de x para que o lote doado tenha a maior área possível.
- b) Usando os dados da figura e a fórmula para cálculo da área de um retângulo, mostre como obter a expressão $S = 60x - 2x^2$.

Figura 3.3: O clássico problema da área máxima. Fonte: Pereira, Uehara e Núñez (2012, p.176)

Embora o estudo de Pereira, Uehara e Núñez (2012) enfatiza a problemática em torno das concepções filosóficas do erro cometido ao mobilizar o conhecimento algébrico e geométrico para resolver a questão 4, a análise apresentada por esses autores elucida a importância que a geometria desempenha para o ensino de função quadrática. Isso envolve desde a contextualização do problema até o levantamento de estratégias para a sua resolução, promovendo a abstração do pensamento algébrico. Dessa forma, a questão 4 da Figura 3.2 exige dos candidatos noções básicas de geometria euclidiana e a habilidade de aplicá-las no processo de resolução do problema de maximização de áreas.

Meneses e Mariani (2014) propõem uso intenso de geometria no estudo de funções

afim e quadrática a partir das representações mobilizadas nas atividades do livro didático “Matemática: Contexto e Aplicações”. Trata-se das representações semióticas que o livro didático explora na abordagem e contextualização do conteúdo função quadrática, bem como, nos registros utilizados para o desenvolvimento de signos e símbolos que são as unidades fundamentais para construção do conhecimento matemático do aluno. A Figura 3.3 apresenta o Quadro 02 analisado por Meneses e Mariani (2014) para ilustrar a complexidade da conversão que deve ser feita entre os registros de representação semiótica para obter a função quadrática a ser usada para maximização da área do terreno. Os autores concluem que embora o conhecimento geométrico usado na contextualização do problema facilita a compreensão do mesmo, o processo de conversão não é atingido de maneira trivial.

Quadro 02. Atividade que exemplifica conversão RLN→RGe

Registro na Língua Natural (RLN)	Registro Geométrico (RGe)
<p>Os diretores de um centro esportivo desejam cercar com tela de alambrado o espaço em volta de uma quadra de basquete retangular. Tendo recebido 200 m de tela, os diretores desejam saber quais devem ser as dimensões do terreno a cercar com a tela para que a área seja a maior possível, bem como o tamanho desta área.</p>	

Figura 3.4: Complexidade do processo de conversão de registros língua materna registro geométrico. Fonte: Meneses e Mariani (2014, p.139)

Dessa forma, ainda que a abordagem geométrica mobilizada através da representação gráfica nos estudos fundamentados pela semiótica seja apenas mais um tipo de registro para o objeto matemático função quadrática, percebe-se no estudo de Meneses e Mariani (2014) que o conhecimento geométrico é de grande relevância para a conversão dos registros e conseqüentemente para o desenvolvimento do conceito de função quadrática.

Como a conversão é aliada à mobilização de conceitos próprios a cada sistema representacional, na conversão supracitada (RLN→RGe), os termos retângulo, área, dimensões e cercar (dando ideia de perímetro) foram empregados para construir tais representações. (Meneses e Mariani, 2014, p.8)

No trabalho de Ghisleni e Battisti (2018), a geometria foi abordada durante a elaboração de atividades que buscam introduzir o conceito de função quadrática a partir do conceito de área e perímetro. Para tanto, as autoras criaram atividades que fazem uma análise da relação existente entre essas grandezas geométricas (dimensões, áreas e perímetros) com a finalidade de desenvolver no aluno o ferramental necessário para a generalização dessas relações por meio do conceito algébrico de função quadrática. Dessa forma, a estratégia de ensino proposta por essas pesquisadoras ou que podem ser elaboradas a partir das concepções decorrentes de seu estudo, tem na geometria euclidiana um arsenal epistemológico para deflagrar questionamentos, pressupostos teóricos e/ou pré-requisitos para serem explorados pelos alunos. Desta forma, tem-se como objetivo, construir o pensamento algébrico para o estudo e compreensão do conceito de função quadrática. A Figura 3.4 ilustra as atividades desenvolvidas por Ghisleni e Battisti (2018):

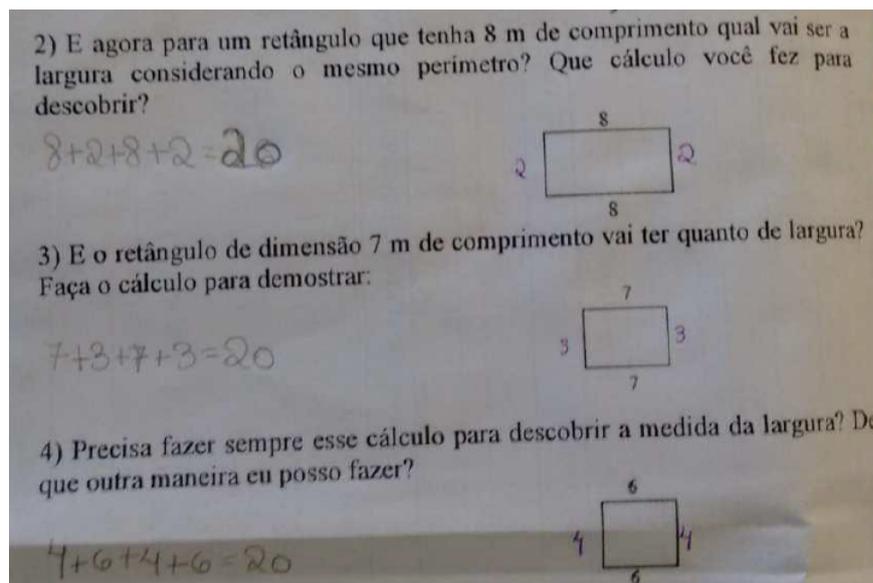


Figura 3.5: Abordagem geométrica antecipando o estudo algébrico de função quadrática. Fonte: Ghisleni e Battisti (2018, p.245)

Ghisleni e Battisti (2018) propõem exercícios geométricos para desenvolver nos alunos a ideia de dependência entre as grandezas: dimensões e áreas - dimensões e perímetros. Percebe-se nessa proposta, o uso da abordagem geométrica para facilitar o procedimento de generalizações da abordagem algébrica, que será desenvolvida posteriormente quando se iniciar o estudo de funções quadráticas. Pretende-se com essa atividade desenvolver o pensamento dedutivo que será de grande importância para a compreensão dos conceitos envolvidos no aprendizado de função quadrática. O problema da área máxima também

foi abordado por Paterlini (1994), no qual, o autor explora o conhecimento geométrico para desenvolver outros caminhos de resolução para o problema de se obter o ponto extremo de uma função quadrática. Dessa forma, Paterlini (1994) apresenta um problema que permite uma abordagem geométrica intensa no processo de resolução, seja pela forma convencional, seja pela forma proposta pelo autor:

“Um sitiante dispõe de uma tela de arame com 100 m de comprimento, com a qual deseja fazer um cercado retangular. Quais devem ser as dimensões do cercado para que sua área seja máxima?” Paterlini (1994). Paterlini (1994) reconhece que esse problema constitui uma das abordagens mais interessantes da Educação Básica, em especial no Ensino Médio, e que os alunos conseguem resolvê-lo por meio da manipulação algébrica das coordenadas do vértice. No entanto, Paterlini (1994) apresenta outros caminhos de resolução “com sabor mais geométrico”.

Uma das maneiras mais utilizadas para o cálculo do ponto extremo de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é a aplicação da fórmula $(x_{ext}, y_{ext}) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$, onde $\Delta = b^2 - 4.a.c$ é o discriminante da função. Percebi que a grande maioria dos estudantes egressos do ensino médio utiliza esse método. É também o método preferido dos livros-textos, nos quais a fórmula do ponto extremo aparece como uma consequência do completamento do quadrado PATERLINI (1994).

A partir da constatação desse fato, o autor apresenta duas técnicas que fazem uso da abordagem algébrica concomitantemente com a geométrica partindo do conceito de reta simétrica. Paterlini (1994) lembra que o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é simétrico ao eixo vertical que passa pelo ponto extremo dessa função. Por meio da exploração dos conceitos de deslocamento vertical de figuras, Paterlini (1994) chama atenção para o seguinte fato:

Sabemos que, dada uma função f , o gráfico da função $f - c$, onde c é uma constante, é um deslocamento vertical do gráfico de f . Em particular, as abscissas dos pontos de máximo ou de mínimo de f e de $f - c$ são as mesmas Paterlini (1994).

O outro caminho apontado por Paterlini (1994) parte do conjunto imagem da função quadrática, uma vez que tal conjunto é limitado pelo valor y_{ext} . Essa observação permite compreender que:

Um valor y está na imagem de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ quando a equação $ax^2 + bx + c = y$ tem solução para $x \in \mathbb{R}$. Isso ocorre quando o discriminante $b^2 - 4a(c - y)$ dessa equação for ≥ 0 ou quando: $y \geq \frac{\Delta}{4a}$, se $a > 0$ ou $y \leq \frac{-\Delta}{4a}$, se $a < 0$ (PATERLINI, 1994).

O uso dessas técnicas possibilita mobilizar o pensamento geométrico, transformando-o em ferramentas cognitivas para compreender os conceitos algébricos inerentes às definições dos tópicos que constituem a teoria da função quadrática. Dito de outra forma, a abordagem apresentada por Paterlini (1994) ressignifica o conceito de simetria axial da parábola, assim como os movimentos de translação do gráfico sobre esse eixo e o conceito de imagem de função quadrática.

A Revista do Professor de Matemática publicou um importante trabalho que torna tênue as barreiras que separam o pensamento algébrico do geométrico. Trata-se do estudo proposto por Castro e Silva (2015), no qual o desenvolvimento de uma atividade lúdica, isto é, construir um objeto de aprendizagem por meio de dobraduras - o porta-treco - permitiu a exploração dos conceitos algébricos e geométricos da função quadrática. Nesse estudo o autor explora o problema de se obter as dimensões de um triângulo que será a base de um objeto tridimensional, que tem como dimensões laterais uma folha de papel A4, cujas medidas são 21cm por 29,7cm. Portanto, a medida do perímetro da base é conhecida e a abordagem do conteúdo função quadrática se dá com a problemática de encontrar as dimensões do triângulo que tem área máxima. Essa abordagem faz uso constante dos elementos da geometria euclidiana e contribui com a abstração do pensamento algébrico por meio da utilização desses elementos geométricos na resolução do problema, que consiste em obter uma função quadrática $f(x)$ que permita calcular a área em função da medida x do lado do triângulo. Da maximização da função $f(x)$, obtém-se as coordenadas do vértice que satisfaz a solução do problema.

Para finalizar essa subseção que apresentou os estudos que fizeram intenso uso da geometria em sua proposta metodológica de ensino da função quadrática, passemos ao estudo desenvolvido por Thiel, Barbosa e Moretti(2018). Os autores propuseram uma

sequência didática que possibilitou uma discussão em torno da complexidade da construção do conhecimento algébrico de função quadrática desenvolvido pelos alunos à luz da teoria dos registros das representações semióticas. Tendo por fundamentação o trabalho desenvolvido por Duval (2011), o estudo apresenta uma análise minuciosa dos dados obtidos e que traduzem o aprendizado dos conceitos de função quadrática nas diversas representações desse objeto matemático. Os autores traçam um paralelo do conhecimento desenvolvido a partir da exploração dos registros de representações semióticas, por exemplo, como o conceito de raiz da função quadrática pode ser apreendido em cada um dos registros de representação semiótica, a saber: algébrico, geométrico, gráfico e tabular. Do mesmo modo, pode-se fazer o mesmo questionamento para o conceito de pontos extremos, imagem de função e eixo de simetria. Thiel, Barbosa e Moretti(2018) concluem que o conhecimento dos conceitos de função quadrática só é concretizado quando o aluno consegue representar esse objeto matemático usando diferentes registros.

3.1.2 Uso moderado da abordagem geométrica na estratégia de ensino de função quadrática

Apresentaremos nessa subseção os estudos selecionados na nossa pesquisa que fazem uso moderado da abordagem geométrica no desenvolvimento de estratégias de ensino de funções quadráticas. Nesse estudo definimos que houve uma abordagem geométrica de intensidade moderada quando o estudo tratar o conhecimento geométrico como um recurso auxiliar para a abstração do pensamento algébrico, sem no entanto, adentrar nos detalhes e propriedades da geometria euclidiana, a qual concebemos como a geometria escolar praticada nas aulas de matemática do Ensino Médio.

Começamos pelo estudo de Ramos e Curi (2014) que faz uma análise dos erros obtidos nos processos de resolução de inequações quadráticas. O uso da geometria nesses processos consiste em fornecer elementos euclidianos como retas e curvas seguidos de valores que representam os zeros das funções. Em alguns casos, são apresentados esboços que representam sinteticamente o gráfico da função que deu origem à inequação em estudo. O trabalho de Ramos e Curi (2014) [35] analisa os procedimentos adotados como estratégias para resolver inequações fazendo um levantamento estatístico e analítico dos pressupostos teóricos usados ou ignorados pelos alunos ao resolver tais inequações. Vejamos na Figura 3.5 o trecho de uma resolução correta de uma inequação feita por um aluno:

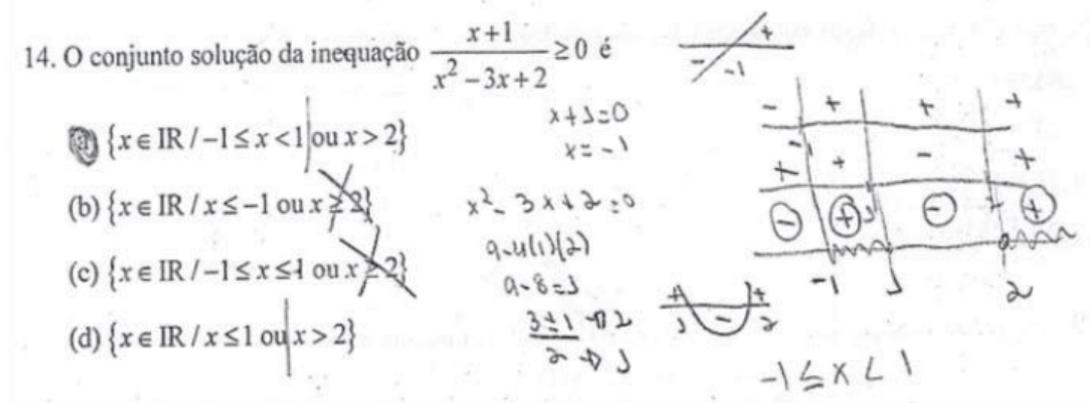


Figura 3.6: Elementos da geometria euclidiana usados corriqueiramente na resolução de equações. Fonte: Ramos e Curi (2014, p.464)

Observamos que o uso do conhecimento geométrico euclidiano nesses procedimentos não são intencionais e/ou não recebe o devido tratamento enquanto estratégia didática resolutive, constituindo-se num procedimento adotado de forma corriqueira e que, por vezes, não atribui nenhum significado geométrico. A atividade não valoriza conhecimentos geométricos ao usar uma representação de um segmento de reta para simbolizar um conjunto seguido de um resumo do esboço do gráfico da função que originou a inequação. Esse conjunto de elementos da geometria euclidiana são reunidos para formar uma estratégia que é usada a vários anos como recurso facilitador do pensamento algébrico. Esse método de resolução parece transportar o aluno para dentro do problema, permitindo que o procedimento resolutive seja caracterizado pela representação geométrica dos conjuntos envolvidos. O que parece ser banal, acaba por desenvolver no aluno a noção de densidade de conjunto, vizinhança e limite, que são conceitos topológicos e, portanto, geométricos.

Baier(2016) apresenta uma proposta complementar ao ensino tradicional de função quadrática, contextualizada em uma visão ecológica. No processo de iteração do mapa logístico de uma função que representa a dinâmica de uma população ao longo do tempo, definida no modelo logístico discreto por $x_{n+1} \rightarrow k \cdot x_n(1 - x_n)$, a função é iterada e se constitui num modelo caótico que permite estudar uma função quadrática, dentro do enfoque matemático da Teoria do Caos. A variação do parâmetro ou constante ambiental k produz modificações inusitadas no gráfico da função quadrática iterada. Dessa iteração, tem-se o diagrama de rede ou diagrama de teia de aranha, para o qual os valores de $x_0 = 0, 1$ e $k = 2, 8$ tem o formato parabólico mostrado na Figura 3.6 a seguir:

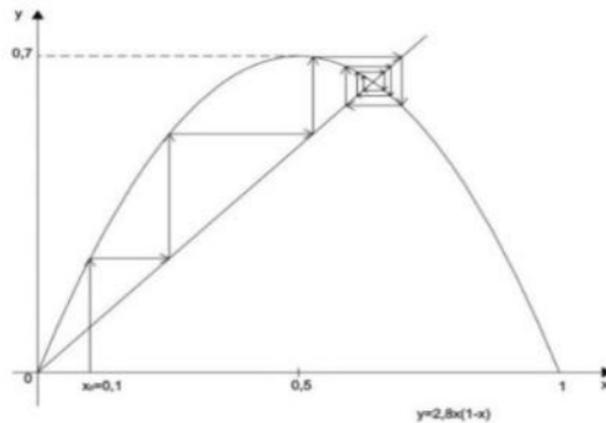


Figura 3.7: Diagrama de rede em formato básico: caso $x_0 = 0,1$ e $k = 2,8$. Fonte: Baier(2016, p.251)

Quando se varia o valor da população inicial e do parâmetro k , os diagramas obtidos tornam-se muito complexos. No entanto, o diagrama de teia persiste mantendo o aspecto parabólico, como pode ser visto na Figura 3.7, obtida para $0 < k < 4$:

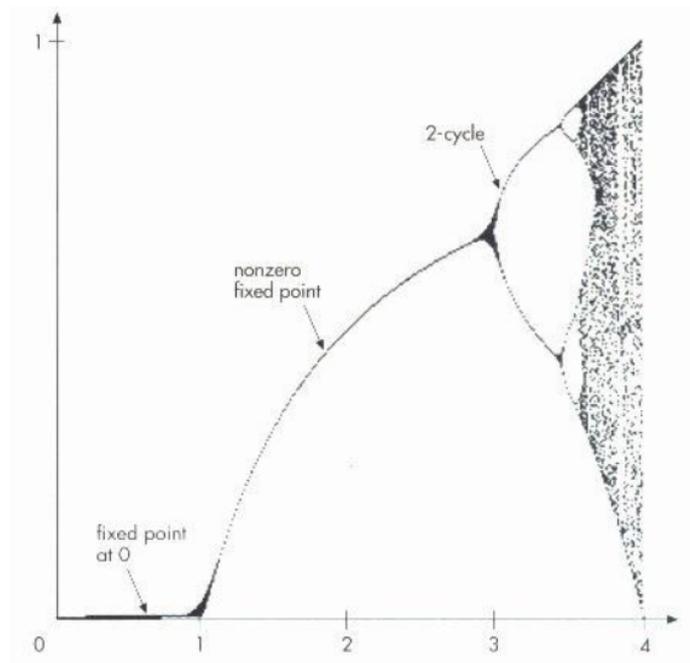


Figura 3.8: Diagrama de rede em formato complexo variação da população inicial e do parâmetro k . Fonte: Baier(2016, p.252)

Dessa forma, embora o diagrama de teia de aranha sofra modificações profundas com a variação dos valores da população inicial e da constante ambiental, as bifurcações do mapa logístico se estruturam em torno da parábola, que continua desempenhando papel

fundamental para compreensão da proposta didática. Portanto, embora a abordagem geométrica não enfatiza a importância que a geometria euclidiana tem para o estudo, essa tem seus resultados elucidados pela proposta didática.

A estratégia proposta por Baier (2016) para ensinar funções quadráticas apresenta seus resultados através da geometria euclidiana, uma vez que o diagrama é circundado por espirais e o formato parabólico é conservado durante todo processo iterativo. A abordagem geométrica nesse estudo serve apenas para executar a iteração, mas o aspecto gráfico dessa atividade é essencial para a compreensão da problemática ecológica. Essa problemática perpassa por situações de equilíbrio (k aumentando, sob condições favoráveis ao crescimento da população x_n) com a população tendendo à extinção $0 < k < 1$. Essas possíveis situações do estado ecológico da população é manifestado no comportamento caótico do diagrama de rede ou diagrama de teia de aranha.

Viseu e Menezes (2014) apresentam sua proposta de ensino de função polinomial do segundo grau a partir da análise feita de um grupo de alunos da graduação que fizeram estágio supervisionado em matemática em uma escola da Zona Norte de Portugal. Os autores selecionaram o material desenvolvido na turma por um desses graduandos, assim como os registros e diários de bordo. A atividade usada para introduzir os conceitos de função quadrática consiste em determinar um modelo matemático que permita calcular a altura h da bola em qualquer tempo t , conforme a seguir:

Tarefa 7. Bola Saltitante: A Vanda ao jogar basquetebol com os seus colegas de turma apercebeu-se que ao deixar cair a bola, a distancia entre esta e o chão vai diminuindo com o tempo. Que altura máxima atinge a bola num determinado intervalo de tempo? (VISEU E MENEZES, 2014, p.19)

O problema faz uso da abordagem geométrica ao estabelecer que os pontos que representam as diversas alturas máxima ocupadas pela bola nos instantes consecutivos formam uma hipérbole e que cada movimento descrito pela bola pode ser representado por meio de uma parábola. Dessa forma, é apresentado um conceito dinâmico para a grandeza geométrica altura, isto é, a altura é concebida como grandeza variável. Sendo assim, o procedimento desenvolvido para se encontrar uma solução inicial para o problema da modelagem encontra na geometria euclidiana a matriz geradora de suas hipóteses e por fim, o recurso cognitivo para testar suas validades. No entanto, esse leque de opções disponibilizados pelo conhecimento geométrico não tem a devida relevância no problema,

servindo apenas como forma ilustrativa das etapas seguidas para obtenção da solução inicial do problema de modelagem.

Da mesma forma, Silva e Almeida (2015) abordam o ensino de funções quadráticas a partir de uma atividade com modelagem matemática e que teve como problemática inicial prever o ano em que o consumo de cigarros por pessoa seria de 702 cigarros. Para obter o modelo matemático adequado ao problema, fez-se diversos testes com função linear, quadrática e exponencial. Percebe-se que o trabalho com modelagem permite ao professor pesquisador abordar um tópico da matemática em seus diversos aspectos, o que para a semiótica, chama-se representações ou registros. Como já foi dito anteriormente, o processo utilizado para aquisição, teste e validação do modelo matemático perpassa pelo enfoque geométrico, uma vez que a geometria potencializa o levantamento do ferramental necessário para organizar o pensamento, corroborando o processo de abstração e elucidação das lacunas abstratas que a álgebra costuma produzir no pensamento do aluno.

Os “Caminhos dos Significados desenvolvido pelos interpretantes” (os alunos), como assim se denomina a proposta de Silva e Almeida (2015), usam a geometria para fazer as diversas representações do objeto matemático com o objetivo de resolver o problema inicial da modelagem. Observemos que na primeira representação dos dados do problema, os quais foram obtidos de uma revista de circulação nacional e de natureza científica e cultural, lembra o formato de uma parábola, conforme Figura 3.8. No entanto, esse modelo foi rejeitado por evidências decorrentes das propriedades geométricas da função quadrática.

A importância que a abordagem geométrica tem para a atividade é notória na transcrição feita pelos interpretantes ao serem questionados sobre o não uso da representação gráfica para o modelo função exponencial que vem a ser o modelo adequado para resolver o problema inicial de modelagem, conforme mostra a Figura 3.10.

Na proposta metodológica apresentada por Carneiro (2002), o uso da geometria está presente na elaboração do problema que consiste em obter a reta que melhor se adequa a um conjunto de dados que representam uma situação de investigação, isto é, pretende-se obter uma reta com a seguinte propriedade:

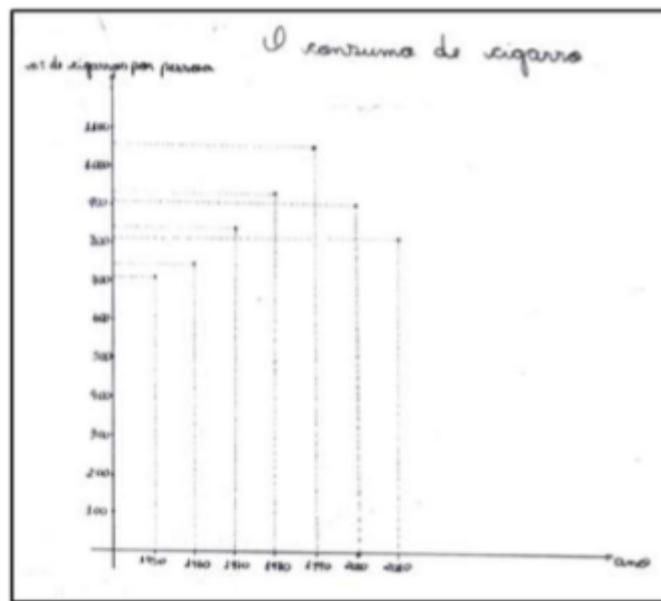


Figura 3.9: Representação gráfica dos dados obtidos. Fonte: Silva e Almeida (2015, p.577)

[...]

P: Vocês traçaram a tendência dos dados no plano [referindo-se à Figura 3], mas vocês não fizeram a representação gráfica do modelo!

E2: Não... fizemos só num rascunho, né, assim bem por cima.

E1: É não consigo!

E2: [risos] é mas nós não colocamos no trabalho, foi só para visualizar assim meio por cima, daí foi bem um esboço mesmo.

P: Isso é uma coisa que a gente percebe que as pessoas não fazem, mas por que vocês acham que a representação gráfica... assim de vocês, por que vocês acabam não fazendo?

E2: Ai... porque eu acho assim.. para ser bem sincera... algo para fazer manualmente exige cuidado, porque senão a análise que era para ser feita acaba dando errado, mas eu acho super importante... eu acho fundamental o gráfico para visualização, que às vezes tá aquele monte... não sei se é porque eu sou meio lerdinha sabe... [risos] então para eu visualizar, eu preciso de uma coisa mais concreta. Às vezes, somente com os dados eu não consigo visualizar o que está se falando, o comportamento que tá tendo. Então eu acho super importante.

P: Mas aqui dava para visualizar o comportamento dessas curvas?

E2: Aham

P: ... desses dois modelos e fazer uma análise!

E2: Mas acabou que a gente não fez!

E1: A gente não fez. Uma pelo tempo e outra assim pelos valores dos dados, aí a gente ia ter um gráfico assim... sei lá... eu não sou muito caprichoso para fazer um gráfico com valores altos e compactar os intervalos, também achei que isso iria prejudicar...

P: A escala?

E1: A escala... daí eu pensei assim e optei por não e só analisar mesmo a validação.

E2: Mas se pudesse usar...

E1: ... o curve...

E2: ... o curve... já ia [risos] ser a primeira opção... já ia olhar o gráfico.

P: Já ia influenciar um monte.

E1: Ia influenciar um monte [risos] (E1; E2, entrevista gravada em áudio, 2011).

Figura 3.10: Diálogos dos interpretantes. Fonte: Silva e Almeida (2015, p.585)

Suponhamos que tenham sido feitas n observações do fenômeno, medindo-se os valores de x e os correspondentes valores de y , obtendo-se os pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$. Queremos determinar uma reta, de equação $y = mx + p$, que de uma certa maneira seja a reta “mais próxima possível de todos os n pontos. (CARNEIRO, 2002).

Para resolver o problema, o autor faz uso do método dos mínimos quadrados, a partir da soma individual dos quadrados das diferenças entre o valor observado y_i e o valor esperado $mx_i + p$, isto é, $\sum_{i=1}^n (mx_i + p - y_i)^2$, que reescrito na notação de função, temos $f(m, p) = (mx_1 + p - y_1)^2 + \dots + (mx_n + p - y_n)^2$. Após atribuir valores para x_i e y_i , obtemos uma função de duas variáveis. Tal função representa a soma de duas funções quadráticas independentes nas variáveis m e p se o coeficiente do termo mp for nulo. O problema consiste em determinar os valores das variáveis m e p que dá o valor mínimo para função $f(m, p)$. Carneiro (2002) resolve o problema do coeficiente nulo do termo mp fazendo uso do conceito geométrico de translação de reta, isto é:

Basta fazer uma translação horizontal do eixo Y de modo que a nova origem seja o ponto $(\bar{x}, 0)$. Então cada abscissa x_i mudará para $X_i = x_i - \bar{x}$ mantendo-se as ordenadas y_i (CARNEIRO, 2002).

A mudança de coordenadas permite abordar a função quadrática dentro de um enfoque geométrico. Lançando mão do ferramental estatístico de cálculos de desvios quadrados, chega-se à solução geométrica da reta que melhor representa o conjunto de dados, como pode ser visto na Figura 3.10.

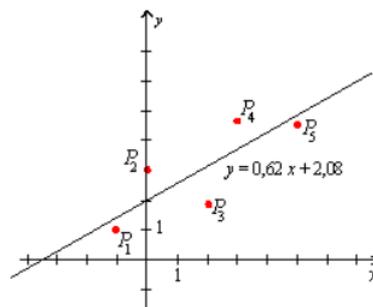


Figura 3.11: A reta de ajustamento dos dados. Fonte: CARNEIRO(2002)

O estudo desenvolvido por Gravina (1987) pode ser entendido como um algoritmo que permite esboçar o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ a partir da representação mais simples dessa função, isto é, $f(x) = x^2$. Atualmente, esse trabalho pode ser desenvolvido com o uso da geometria dinâmica, através dos softwares Winplot e Geogebra. No entanto, tomando por base o contexto e o período em que esse estudo foi desenvolvido, o mesmo torna-se de extrema relevância para aquela realidade. Através de

translações do gráfico, de propriedades de simetria e do desenho de curvas pontilhadas para esboço do gráfico, essa estratégia de ensino de função quadrática facilita manipulações algébricas que trabalham a visão geométrica dos alunos, uma vez que eles começam a enxergar o gráfico antes de seu desenho.

A Figura 3.11 mostra uma estratégia apresentada por Gravina (1987) para esboçar o gráfico da função $f(x) = (x+k)^2$ a partir do gráfico da função $f(x) = x^2$. A abordagem geométrica se entrelaça à algébrica no procedimento utilizado para a construção do gráfico.



Figura 3.12: Translações feitas a partir representação elementar da função quadrática. Gravina (1987, p.4)

Strapason e Bisognin (2013) fazem uso da geometria euclidiana no desenvolvimento de jogos pedagógicos para ensinar função quadrática. Os jogos foram confeccionados em recortes envolvendo as propriedades e definições de função. Fundamentando-se em Smole (2008), Ortiz (2005) e Lara (2005), as autoras propõem uma metodologia de ensino de função quadrática que tem caráter lúdico e socioeducativo. A abordagem geométrica se dá pela seleção feita do material no qual se explora os aspectos gráficos e propriedades geométricas dessas funções. Dessa forma, são dadas definições de um tópico específico de função e o aluno precisa fazer relação com alguma carta que contém a propriedade mencionada. O material didático consta de três jogos, a saber: Jogo 1 - Trilha do Conceito de Função; Jogo 2 - Dominó com situações-problema sobre função polinomial do 1º grau; e Jogo 3 - Jogo de memória sobre a função polinomial do 2º grau. A confecção dos jogos pode ser vista na Figura 3.16.

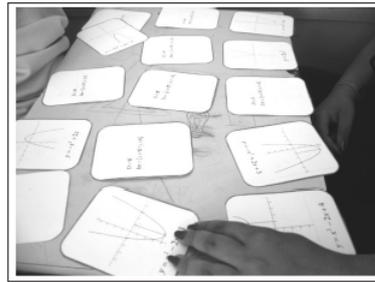


Figura 3 - Cartas do jogo de memória 1

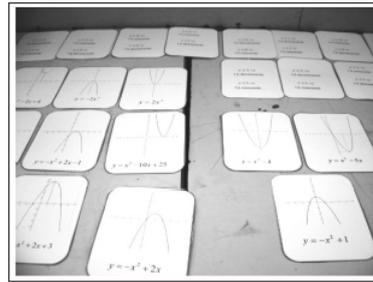


Figura 4 - Cartas do jogo de memória 2

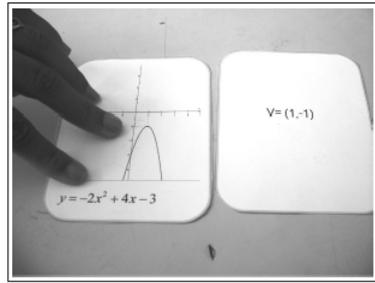


Figura 5 - Cartas do jogo de memória 3

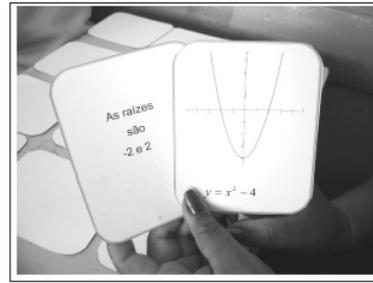


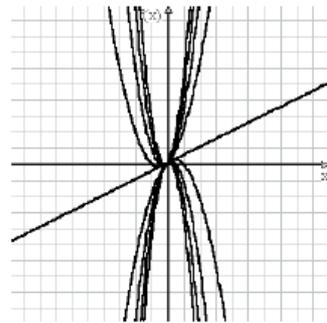
Figura 6 - Cartas do jogo de memória 4

Figura 3.13: Cartas componentes do jogo Memória usado para ensinar função quadrática.
 Fonte: Strapason e Bisognin (2013, p.584)

Na Figura 3.16, é possível ver gráficos de funções quadráticas em algumas das 24 cartas que compõem o jogo da memória. Neste jogo, é possível abordar todos os tópicos de estudo da função quadrática. Sendo assim, a abordagem geométrica foi usada apenas para compor o repertório de questões a serem exploradas no jogo. Tais questões incluem desde problemas de área máxima até simetria do eixo vertical que passa pelo vértice da parábola. Souza e Silva (2006) apresentam uma abordagem para ensinar função quadrática fazendo uso de informática, através dos softwares Parábola e Oficina de Funções. Os autores propõem um estudo dos vértices de famílias de parábolas, fazendo uso das coordenadas do vértice da parábola. De $x_v = \frac{-b}{2a}$ e $y_v = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$, se deduz que a reta $y = \frac{b}{2}x + c$ é a equação da reta que passa pelos vértices da família de parábolas das funções quadráticas escritas na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.

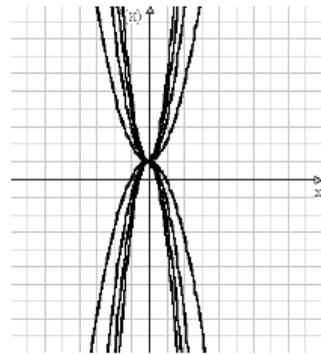
Embora a compreensão das propriedades e conceitos das coordenadas dos pontos extremos é obtida de forma trivial pela abordagem algébrica de função quadrática, a referência feita aos vértices de famílias de parábolas emerge de uma explicação visual para ser compreendida pelos alunos. Nesse contexto, Souza e Silva (2006) defendem o uso da informática em sala de aula. O estudo trata do ganho significativo que se tem quando se aborda o estudo do gráfico das funções quadráticas por meio de software. A

abordagem geométrica dessa metodologia permeia a resolução de exercícios de construção de gráficos e percepção dos lugares geométricos determinados pela representação da família de parábolas obtidas quando se fixa um e faz-se variar os demais coeficientes da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, conforme mostram as Figuras 3.13, 3.14 e 3.15.



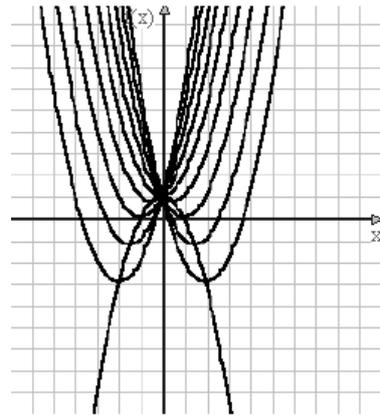
· Família de Parábolas $f(x) = ax^2 + x$.

Figura 3.14: Caso 1: Famílias de parábolas $f(x) = ax^2 + x$ determinada pela variação de a , fixando b e tomando $c = 0$ de lugar geométrico igual à reta de equação $y = \frac{1}{2}x$. Fonte: Souza e Silva (2006, p.112)



- Família de Parábolas $f(x) = ax^2 + 1$.

Figura 3.15: Caso 2: Famílias de parábolas para $f(x) = ax^2 + 1$ determinada pela variação de a , fixando b e c cujo lugar geométrico é o ponto $(0, 1)$. Fonte: Souza e Silva (2006, p.113)



! - Família de Parábolas $f(x) = x^2 + bx + 1$.

Figura 3.16: Caso 3: Famílias de parábolas $f(x) = x^2 + bx + 1$ Famílias determinada pela variação de b fixando a e c de lugar geométrico correspondente à parábola de equação $y = -ax^2 + c$. Fonte: Souza e Silva (2006, p.114)

Souza e Silva (2006) afirmam que o trabalho com software maximiza o tempo da aula e permite percepções que o ensino convencional através de papel e régua não possibilita, seja pela imperfeição do gráfico traçado, seja pela perda inevitável da motivação pelo resultado a ser obtido, seja pela facilidade oferecida pela geometria dinâmica. Nesse sentido, a metodologia proposta pelos pesquisadores é muito rica e possibilita discussões e achados geométricos interessantes. Vale lembrar que este artigo é uma revisão do estudo desenvolvido por Souza et al (1996) e que fez uso do Winplot como ferramenta de geometria dinâmica.

Mendes et al. (2017) fizeram uso de geometria dinâmica em sua proposta de ensino de função quadrática. Tendo por objetivo desenvolver no aluno a compreensão de que o lugar geométrico determinado pela função quadrática sempre terá o aspecto de uma parábola, os autores apresentaram uma sequência didática para representar em um mesmo plano cartesiano as funções: $f(x) = x^2$; $g(x) = 2x^2$; $h(x) = 5x^2$; $j(x) = 8x^2$; $k(x) = 10x^2$. Para tanto, fizeram uso do Winplot, desenvolvendo um estudo semelhante ao de Souza e Silva (2006), sendo que, enquanto este se preocupou em mostrar os lugares geométricos determinados pelos vértices das famílias de parábolas plotadas no Winplot, Mendes et al. (2017) [25] desenvolveram uma sequência didática que explora a representação gráfica das funções quadráticas, ressaltando a facilidade que se tem quando esse procedimento é feito por meio da geometria dinâmica.

Numa referência à Gravina (1987), Mendes et al. (2017) salienta que: “A noção

de construção e visualização gráfica a partir de alongamentos, compressões, reflexões e translações de uma curva básica, como $y = x^2$, permite identificar e comparar todos os elementos que definem uma parábola".

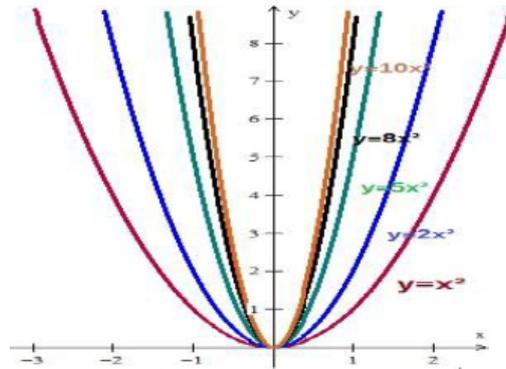


Figura 3.17: Variações da curva $y = ax^2$. Fonte: Mendes et al. (2017, p.217)

O estudo apresentado por Mendes et al. (2017) corresponde a uma releitura do trabalho desenvolvido por Gravina (1987), reescrito sob a ótica da Geometria Dinâmica. De modo análogo ao estudo apresentado por Mendes et al. (2017), Lutz (2015) [22] também fez uso de softwares matemáticos na metodologia proposta para o ensino da função polinomial do 2º grau. O autor propôs uma sequência didática para explorar conceitos algébricos e geométricos da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, se apoiando na ideia de que a construção de gráficos fazendo uso apenas de lápis e papel tira o dinamismo e inibe a observação de padrões que se abstrai dessas funções a partir da representação gráfica. O estudo propõe exercícios para observar o comportamento do gráfico mediante a variação dos coeficientes a, b e c da função quadrática.

Melo e Rehfeldt (2016) usaram o software KmPlot para desenvolver uma sequência didática com o objetivo de explorar os aspectos algébricos e geométricos da função quadrática. Souza et al (1996) fizeram um trabalho pioneiro no estudo comportamental do vértice de uma família de parábolas quando dois dos coeficientes são fixados e varia-se o outro coeficiente da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, utilizando o Winplot para representar as famílias de parábolas. Embora seja um estudo de cunho algébrico, a representação gráfica das famílias de parábolas é essencial para compreensão dos achados geométricos que o estudo apresenta. Segundo Souza et al (1996), “variando o termo c , mantendo a e b constantes, os vértices das parábolas sugerem uma reta paralela ao eixo Oy ”, conforme mostra a Figura 3.17. A Figura 3.18 mostra a variação do coeficiente b ,

com a e c fixos e a Figura 3.19 mostra a variação do coeficiente a , com b e c fixos

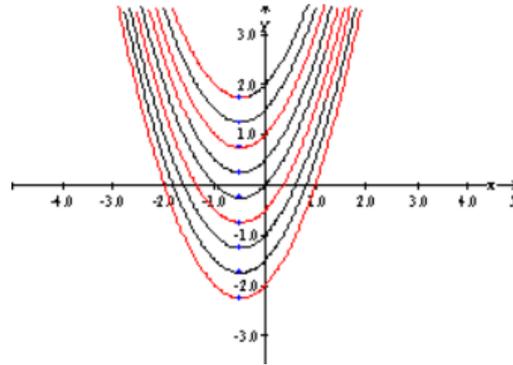


Figura 3.18: caso: a e b constantes e c variável. Fonte: Souza et all (1996)

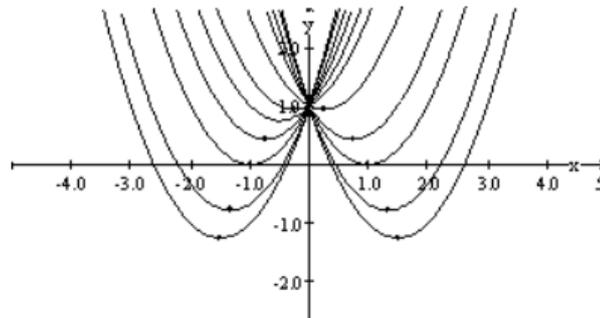


Figura 3.19: caso: a e c constantes e b variável. Fonte: Souza et all (1996)

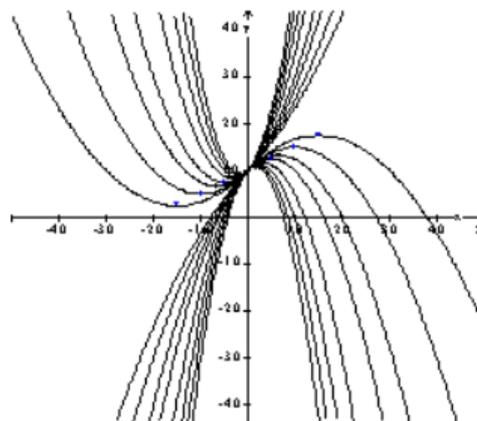


Figura 3.20: caso: b e c constantes e a variável. Fonte: Souza et all (1996)

A relevância da abordagem geométrica no estudo da função quadrática torna-se notória pela riqueza de detalhes fornecida pela representação gráfica da função quadrática, além de potencializar a abstração do pensamento algébrico. O aspecto visual dessa

proposta por meio do Winplot (recentemente criado na época), nos dá uma ideia dos horizontes que se abriram a partir da publicação desse estudo em meados da década de 90 para utilização do computador no ensino de matemática. Andrade e Saraiva (2012) usou a teoria das representações semióticas de Duval para fundamentar a sua abordagem metodológica para o ensino de função quadrática.

Embora o estudo tenha sido aplicado a 30 alunos de uma turma de uma escola no Sul de Portugal, o trabalho se concentra no material recolhido do caderno de duas alunas a respeito das respostas dadas ao questionário elaborado pelas pesquisadoras e no relatório desenvolvido pelos alunos e aplicados para a turma em estudo. Segundo Andrade e Saraiva (2012, p.13), o “ensino deve, assim, articular de uma maneira equilibrada as três formas mais importantes de representação de uma função: a tabelar, a gráfica e a algébrica”. Dessa forma, para se cumprir a proposta de diversificação das representações dos registros referente ao objeto matemático estudado, no que se refere ao estudo das múltiplas representações de funções, a abordagem geométrica foi descrita por Andrade e Saraiva (2012) como segue:

Especificamente, são abordados os seguintes tópicos: 1) Gráfico cartesiano de uma função em referencial ortogonal e representação gráfica, recorrendo a situações problemáticas e de modelação matemática; 2) Estudo intuitivo de propriedades das funções, tanto a partir de um gráfico particular como usando calculadora gráfica, para as funções quadráticas e função módulo, e recorrendo a: a) análise dos efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos das famílias de funções dessas classes ... b) transformações simples de funções definidas por $y = f(x) + a$, $y = f(x + a)$, $y = af(x)$, $y = f(ax)$, $y = |f(x)|$ com a positivo ou negativo; 3) Resolução de problemas envolvendo funções polinomiais (com particular incidência nos graus 2, 3 e 4)... (ANDRADE E SARAIVA, 2012, p.13).

As autoras propõem atividades que visam desenvolver nos alunos a percepção da importância atribuída às diversas representações para função, ressaltando o valor que os

aspectos visuais presentes na representação gráfica desempenham no processo de construção de significados e, conseqüentemente, na elaboração dos conceitos e apreensão das propriedades de funções. Tal fato, pode ser confirmado pela Figura 3.20 constante no anexo do presente estudo.

7. ANEXOS

7.1. Questionário

1. Explique, por palavras suas, o que entende por função.
2. Das seguintes representações gráficas, indique quais representam funções e quais não representam funções. Justifique as que considera não se tratarem de uma função.

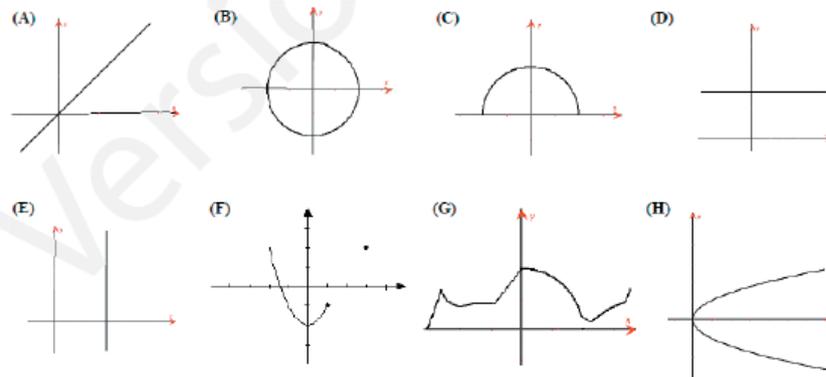


Figura 3.21: Questionário desenvolvido com ênfase na abordagem geométrica da representação do conceito de função. Fonte: ANDRADE E SARAIVA (2012, p.166)

A atividade de comparação de representações do objeto matemático função permite estabelecer relações entre a representação algébrica e a gráfica, ao passo que promovem a interação entre o conjunto imagem e a definição decorrentes das propriedades gráficas determinantes do lugar geométrico definido pela parábola. Essas atividades são propostas conforme mostram a Figura 3.21.

4. Em seguida, encontram-se algumas expressões algébricas e representações gráficas. Estabeleça, justificando, a correspondência entre as que considera que representam a mesma função.

(A) $y = \frac{x^2}{2}$

(B) $y = 4x - 1$

(C) $x = 3$

(D) $y = 3$

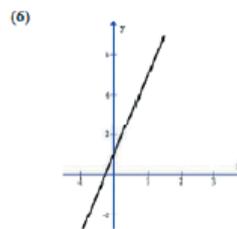
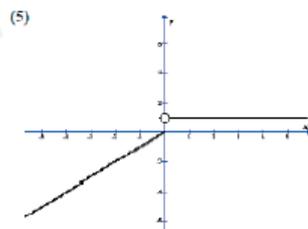
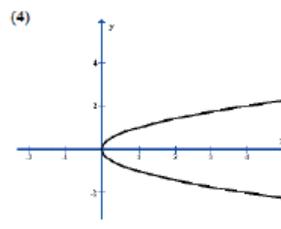
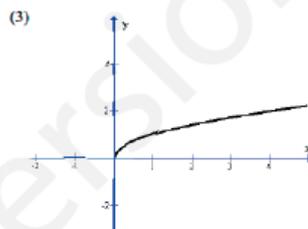
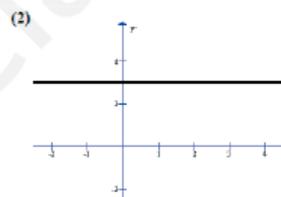
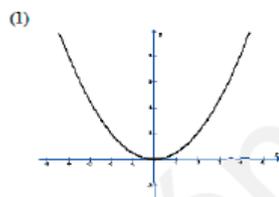


Figura 3.22: Exercício de reconhecimento do objeto função a partir da comparação de registros semióticos. Fonte: Andrade e Saraiva (2012, p.167)

3.1.3 Não faz uso de geometria na estratégia de ensino

Nessa seção apresentaremos os estudos que não fizeram uso de geometria na estratégia usada para ensinar função. Identificamos 4 (Quatro) estudos, a saber, Maio (2015), Maciel e Cardoso (2014), Carvalho (1993) e Lopes (2018). Em seu estudo, Maio (2015) detalha com base em dados da Neurociência Cognitiva quão grande é a complexidade do processo que engloba o ensino e aprendizado de Matemática. O autor aponta para o problema da contemporaneidade e sua influência histórica sobre as metodologias de ensino em cada época. Lançando um olhar sobre o século XXI, Maio (2015) afirma que:

A visão holística, monista, ecológica, sistêmica atual do nosso Universo substituiu a visão Cartesiana e pela sua própria estrutura, passa a incluir o Homem como elemento do Universo. Ele, o Homem, não é mais considerado como algo distinto do Universo, mas sim parte integrante do mesmo e sujeito a todas as suas leis. (MAIO, 2015, p.2).

Tais considerações leva-nos a pensar num pós-paradigma emergente e repensar as bases que sustentaram o desenvolvimento das estratégias de ensino, bem como da nossa visão no que tange à construção do conhecimento matemático. Dentro da visão apresentada por Maio (2015), a geometria euclidiana é concebida como apenas mais um enfoque dentre tantas outras geometrias que constituem o universo pictórico que cerca o sujeito. Daí o caráter limitador da proposta metodológica que centra o desenvolvimento do aprendizado geométrico tendo por base a geometria plana de Euclides. Dessa forma, o paradigma levantado pela teoria das representações semióticas nos estudos de Duval (2003), (2006) e (2011) quanto à necessidade da diversificação dos registros de representação do mesmo objeto matemático é ampliado no estudo feito por Maio (2015), fazendo-o emergir de um outro paradigma que propõe a substituição da utilização da geometria euclidiana como introdutória ao estudo do mundo iconográfico por experiências com outras geometrias. O autor também chama atenção para o seguinte fato:

“Os signos, símbolos sociais, incluindo os da linguagem matemática são responsáveis por grande parte dos obstáculos para a aprendizagem do cálculo e de outras disciplinas. Ninguém vê o número dois passeando pela praça, mas o representamos de diversas maneiras”(MAIO, 2015, p.14).

Dessa forma, Maio (2015) defende que a simbologia ou os símbolos desenvolvidos por cada ciência são representações da mesma estrutura do cérebro. Daí, a necessidade do cuidado que devemos ter com a simbologia empregada nas estratégias de ensino, o que leva Maio (2015) citar como exemplo o uso que se faz da expressão $f(x) = ax^2 + bx + c$ tanto para a Matemática como para a Física, que em um contexto mais específico, é revestida de outra notação, a saber $s = s_o + v_o.t + \frac{1}{2}.a.t^2$ Maio (2015, p.111).

Sendo assim, Maio (2015) não apresenta uma abordagem geométrica para o ensino de função quadrática, muito menos faz menção de como a geometria de Euclides poderia contribuir cognitivamente para o desenvolvimento da proposta. Pelo contrário, critica a abordagem geométrica focada no pensamento euclidiano, uma vez que, para Maio (2015) o Universo pictórico representativo da criança é composto por elementos de geometrias não euclidiana e atenta para os cuidados que se deve ter no desenvolvimento de uma proposta didática que enfatiza os elementos da geometria de Euclides. Dentro da visão sistêmica descrita por esse autor, é preciso ter consciência da complexidade dos paradigmas representativos da contemporaneidade e da sua influência histórica sobre tais metodologias.

Maciel e Cardoso (2014) propõem trabalhar função quadrática a partir da História e Filosofia da Matemática. Para tanto, esses autores usaram como metodologia o desenvolvimento de vídeos em forma de documentário no qual o conceito de função é apresentado ao longo da história. A partir do contexto histórico, o conceito de função apresentado traduz as expectativas e a visão de Ciências e de Matemática de cada época. Todavia, na apresentação da função quadrática, esta é tratada como mais uma tipologia de função, não sendo feita nenhuma menção às suas especificidades e ou suas propriedades, muito menos, relações dessa com o saber geométrico.

Carvalho (1993), ao resolver um problema real que o atormentava na sua labuta diária de jovem pai, usou modelagem matemática para converter o problema de determinar o tempo restante de gravação de uma fita de vídeo cassete em um função quadrática.

A forma como Carvalho (1993)[10] tratou o problema, possibilitou articular o funções quadráticas com progressões:

Esse problema ilustra fatos simples, mas freqüentemente esquecidos por alunos (e professores) do 2º grau: O termo de ordem n de uma PA é dado por uma função do 1º grau de n . Reciprocamente, os valores de uma função do 1º grau, calculados a intervalos regulares, formam uma PA. CARVALHO (1993) [10].

De maneira análoga, o autor apresenta a relação estabelecida entre a função quadrática e o conhecimento de Progressões a partir da seguinte propriedade:

A expressão do termo de ordem n da seqüência obtida somando-se os n primeiros termos de uma PA é dada por uma função do 2º grau, cujo termo independente é nulo. Reciprocamente, as diferenças entre os valores sucessivos de uma função do 2º grau, calculados a intervalos regulares, formam uma PA. CARVALHO (1993).

Dessa forma, CARVALHO (1993) resolve o problema usando modelagem matemática, sem no entanto, fazer uso de uma abordagem geométrica, vale ressaltar que a metodologia proposta pelo autor, usa duas estratégias distintas, isto é, a teoria das progressões e função quadrática, porém em ambas, faz se uso da abordagem algébrica. LOPES (2018) fez uma análise dos trabalhos apresentados no EBRAPEM (2014 até 2016) que fizeram uso de Engenharia Didática como metodologia de pesquisa. O autor aponta a importância que a comunicação do conhecimento produzido tem para a Ciência e de modo geral para a própria pesquisa. Para maiores detalhes sobre Engenharia Didática, recomendamos Artigue (1996) apud LOPES (2018). Dessa forma, LOPES (2018) faz uma explanação sobre os Grupos de Discussão (GD) que apresentaram suas propostas de pesquisa entre os anos de 2014 a 2016 "*classificando-os em Dificuldades de aprendizagem ou Propostas didáticas, este último em com utilização de instrumento auxiliar ou sem a utilização de instrumento auxiliar*" LOPES (2018, p. 11). Sendo apresentado na edição do XIX EBRAPEM (2015), a proposta didática com instrumento auxiliar do GD 6 de TEIXEIRA, Igor Roberto Gonçalves, intitulada: "*O uso do software GeoGebra nas construções gráficas de Funções Quadráticas*", cujo objetivo é: *Investigar as contribuições do software GeoGebra*

enquanto ferramenta necessária no estudo das relações possíveis entre o comportamento de uma função quadrática a partir de seus elementos, com os alunos do 1º ano do Ensino Médio, nos registros numérico, algébrico e gráfico". Embora a proposta didática faz uso dos registros de representações semióticas e de geometria dinâmica no ensino de função quadrática, LOPES (2018) resume-se a quantificar os trabalhos apresentados no EBRAPEM no período compreendido entre (2014 até 2016).

Sendo assim, a análise dos estudos que compõe essa subcategoria nos mostrou que de modo geral, a proposta metodológica de ensino de função quadrática que não faz uso da abordagem geométrica tende a não se constituir em estratégia de ensino, mas sim, uma proposta de análise do conteúdo função quadrática, com características e peculiaridades que dificulta sua aplicabilidade em sala de aula, sobretudo no Ensino Médio.

3.2 Fundamentação teórica: tendência utilizada na proposta

Nessa categoria, elencamos as tendências identificadas nas propostas de ensino de função quadrática constantes no material de estudo coletado para essa pesquisa. Desde o final dos anos 70, com as críticas atribuídas ao Movimento da Matemática Moderna, vários questionamentos em torno dos princípios filosóficos desse movimento, assim como a sua incompatibilidade com a realidade tecnológica em curso, levou ao surgimento do movimento da Educação Matemática ou das tendências em Educação Matemática: a Etnomatemática, a Modelagem Matemática, a Resolução de Problemas, o uso da Tecnologia na Educação Matemática, e a Filosofia e História da Matemática (ZORZAN, 2007).

A compreensão dessas tendências assim como suas abordagens dentro das metodologias de ensino de função quadrática é fundamental para compreendermos a evolução que estas tem causado nas propostas didáticas para o ensino e aprendizagem de matemática no Educação Básica. Vale ressaltar que nos estudos analisados, no que se refere ao ensino de funções quadráticas, é possível perceber que a Educação Matemática, de um modo geral, tem servido de apoio aos estudos que propõem inovação e rompimento com a Tradição da Matemática Escolar. Alguns dos estudos analisados podem ser enquadrados em mais de uma tendência, como os trabalhos de Silvia e Almeida (2015) e Viseu e Meneses (2014). Sobre a tendência Uso da Tecnologia na Educação Matemática, identificamos 12

dos 31 estudos analisados, dos quais, 10 tratam do uso de softwares no ensino de função quadrática, 1 trabalho propõe o ensino de função por meio da História da matemática através da produção de vídeo, e 1 estudo analisa os trabalhos apresentados no EBRAPEM no período compreendido de 2014 até 2016 e que fizeram uso de Engenharia Didática; 6 trabalhos fizeram uso da Resolução de Problemas; 11 trabalhos, se enquadram na tendência, a Filosofia da Educação Matemática; a Etnomatemática aparece em 1 trabalho e a Modelagem Matemática foi identificada em 3 trabalhos. A Figura 3.22 mostra a distribuição das tendências utilizadas em função do número de estudos pesquisados.

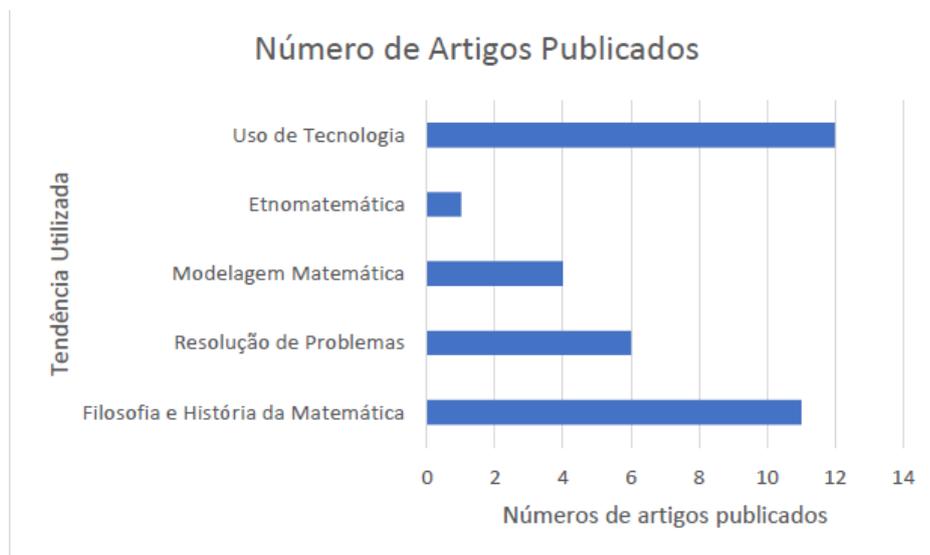


Figura 3.23: Classificação dos estudos da pesquisa pela tendência utilizada. Fonte: Figura obtida pelo cruzamento dos dados da pesquisa.

3.2.1 Uso da tecnologia na educação matemática

A primeira tendência analisada trata-se do uso da tecnologia no desenvolvimento de propostas de ensino de matemática. Essa tecnologia não se resume apenas ao uso de informática, mas sim, todo ferramental que ofereça ao aluno no ambiente escolar ou fora dele o domínio de técnicas ou de ferramentas modernas que o coloque em sintonia com o desenvolvimento tecnológico de sua realidade.

Assim, Oliveira e Dorini (2013), Souza e Silva (2006), Mendes, Camargo, Fortes, e Santarosa (2017), Lutz (2015), Gitirana (2016), Melo, e Rehfeldt (2016), Rocha, Poffal e Meneghetti (2015), Feltes e Puhl (2016), Souza et al. (1996) e Dias et all (2015) fizeram uso de geometria dinâmica em suas propostas de ensino de funções quadráticas, rompendo com o paradigma do exercício. Esses estudos, em geral, são sequências didáticas que têm como objetivo mostrar aos alunos o comportamento do gráfico da função quadrática quando se varia os coeficientes da representação algébrica dessa função. Graças ao dinamismo dos softwares, o que seria apenas uma atividade de construção de gráfico, pode tornar-se uma atividade investigativa, uma vez que a resposta instantânea das modificações sofridas pelo gráfico permitem analisar e provar conjecturas matemáticas.

Maciel e Cardoso (2014) fazem uso de recursos tecnológicos para a produção de vídeo que apresenta a construção histórica do conceito de funções, dentre as quais, a função quadrática. O estudo de Lopes (2018)[21] sintetiza os trabalhos apresentados no EBRAPEM no período compreendido entre 2014 e 2016 e que fizeram uso da Engenharia Didática como metodologia de pesquisa. Para além do uso do computador na sala de aula, esses trabalhos consolidam a tendência de uso da informática na Educação Matemática, que é antes de tudo uma proposta de democratização do acesso à tecnologia da informática e sobretudo dos recursos de multimídia produzidos com a finalidade de promover o aprendizado da Matemática.

As propostas de ensino apresentadas pelos autores supracitados nessa subcategoria, vão de encontro aos anseios de uma sociedade que tem se tornado cada vez mais dependente dos recursos tecnológicos e, portanto, precisa de cidadãos aptos ao manuseio e utilização das ferramentas tecnológicas. As metodologias de ensino que fazem uso da informática corroboram a potencialização das capacidades de aprender dos alunos, ampliando os horizontes para a construção do conhecimento, favorecendo a interpretação e tomada de decisões para soluções de problemas do cotidiano. Didaticamente, o uso

do computador nas aulas de Matemática possibilita maximizar o tempo na execução de cálculos e observações de padrões estabelecidos a partir da manipulação de dados. Esses resultados observados no campo prático das funções, permitem obter elementos matemáticos para solução de problemas de modelagem.

Com relação aos aspectos algébrico e geométrico, o uso do computador possibilita estudar o comportamento gráfico dessas funções quando se varia seus coeficientes. No que se refere às funções quadráticas, o uso de geometria dinâmica, permite ao aluno inferir sobre as diferentes representações dessas funções e compreender a conexão da álgebra com a geometria, através do estudo do gráfico da função. Na exploração da representação tabular é possível perceber a relação estabelecida entre as grandezas, permitindo a distinção e classificação das mesmas. Graças ao seu poder de cálculo e facilidade de processamento da informação, o computador pode ser utilizado em atividades que promovam a interdisciplinaridade, além de facilitar a compreensão das conexões entre os demais ramos da Matemática, permitindo que um mesmo tema possa ser discutido e analisado sobre diferentes enfoques. No que tange ao estudo da função quadrática, o uso de softwares permite visualizar a representação geométrica dessa função simultaneamente às modificações de seus valores algébricos.

3.2.2 Filosofia e História da educação matemática

A Educação Matemática sob o enfoque da filosofia enquanto tendência, transcende a reflexão em torno da prática, uma vez que, a docência requer o exercício reflexivo cotidiano. A concepção filosófica da Educação Matemática deve oferecer a essa disciplina os parâmetros reflexivos que se aproximem daquela proposta por Bicudo e Garnica (2002), onde “a Filosofia da Educação Matemática caracteriza-se por um pensar reflexivo, sistemático e crítico sobre a prática pedagógica da matemática e sobre o contexto sociocultural onde ocorrem situações de ensino e de aprendizagem de Matemática”. Os estudos analisados nessa seção se aproximam da definição apresentada por Bicudo e Garnica (2002). Dessa forma, a tendência Filosofia da Educação Matemática abrange os trabalhos de Silva e Almeida (2015), Ramos e Curi (2014), Thiel, Barbosa e Moretti (2018), Baier (2016), Maio (2015), Ghisleni e Battisti (2018), Andrade e Saraiva(2012), Viseu e Menezes (2014), Pereira, Uehara e Núñez (2012), Maciel e Cardoso (2014) e Meneses e Mariani (2014).

O trabalho apresentado por Silva e Almeida (2015), fundamenta-se na semiótica

peirceana, focando na teoria dos interpretantes e da Modelagem Matemática para evidenciar os caminhos trilhados na construção de significados em uma atividade na qual se propõe a criação de um modelo para estudar o comportamento do consumo de cigarros por ano por pessoa. Valendo-se das teorias supracitadas, o estudo transcende o proposto na atividade de modelagem e lança um olhar nos procedimentos alavancados na busca pela construção de significados para a investigação, isto é, a criação de um modelo matemático que permita, estimar ou descrever padrões para um vício que permanece em crescimento em todo o mundo, apesar de suas consequências comprovadas para a saúde de uma pessoa.

Dessa forma, o estudo de Silva e Almeida (2015) constitui-se num repensar do processo de ensino e aprendizagem em matemática, uma vez que se vale de teorias que alavancam pressupostos e ampliam os objetivos da construção do conhecimento matemático. Além de inferir sobre as estratégias e signos atribuídos e desenvolvidos na interpretação do objeto em estudo, durante o desenvolvimento das atividades são mobilizadas diversas representações matemáticas para o objeto função. Dentre as estratégias utilizadas, o uso da geometria torna-se indispensável para testar e representar o pensamento, tornando-se assim uma ferramenta cognitiva eficiente para gerar signos e símbolos, que são as unidades geradoras do conhecimento na perspectiva da semiótica.

O estudo de Ramos e Curi (2014) faz uso de análise de conteúdo para inferir sobre a problemática do erro no processo de resolução de inequações quocientes quadráticas. O enfoque filosófico da metodologia se dá a partir das concepções em torno do erro no processo de construção do conhecimento matemático. O erro é concebido como um elemento norteador da busca pela certeza e não como atestado de incompreensão e incapacidade de avançar. Tal postura assumida diante do erro evidencia um avanço no pensamento doutrinário das certezas inquestionáveis do conhecimento matemático, como frisou Bicudo e Garnica (2002).

A mobilização do conhecimento geométrico presente na proposta de Ramos e Curi (2014) é evidenciado a partir da forma prática usada para resolver inequações, isto é, usando retas paralelas que representam o eixo real que contém o conjunto domínio da função em estudo, acrescido de um esboço de seu gráfico, tomando os pontos comuns aos dois subconjuntos para obter a solução para a inequação. A delimitação do conjunto numérico que contém a solução é representado e visualizado através de uma reta, embora

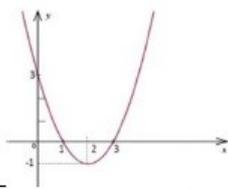
seja apresentada dentro de uma abordagem algébrica. O uso da geometria nesse processo de resolução é uma estratégia didática para facilitar a compreensão do procedimento resolutivo, o que nos permite reconhecer a geometria euclidiana como uma teoria auxiliar ao ensino de álgebra, atuando eficazmente nos entraves do pensamento abstrato. Isto possibilita transpor as barreiras apresentadas pela imaturidade matemática do aluno. Posteriormente, a evolução desse processo de maturação do pensamento abstrato, não mais tem a função de lançar luz sobre o pensamento, mas, sobretudo para confirmar que o conhecimento erguido sobre o fundamento geométrico tende a ser completo e portanto, usado continuamente. Carloman Carlos Borges, em uma de suas aulas de Evolução e História da Matemática, das quais tive a sorte de assistir no 1º Semestre de 2003, afirmou: “O encontro do homem com a geometria é inexorável”

Para Thiel, Barbosa e Moretti (2018), o processo de ensino e aprendizado perpassa pela constante reflexão do professor diante de sua prática. Apoiados na teoria das representações semióticas de Durval, estes autores apresentam uma sequência didática que explora os registros de representação das funções quadráticas elaborando questões que contemplam tópicos algébricos, aritméticos e geométricos através da representação gráfica. Thiel, Barbosa e Moretti (2018) ressaltam que todos os aspectos ligados ao processo de ensino deve ser considerado relevante para a construção do conhecimento. Isto inclui desde os aspectos pedagógicos da organização do trabalho do professor, como os teóricos, a exemplo, da compreensão dos objetivos do conteúdo a ser ensinado, de tal forma que a ignorância desses pormenores na sala de aula constituem prejuízo ao processo de ensino e aprendizagem ou no mínimo pode propiciar uma aquisição fragmentada do conhecimento matemático que não permite diferenciar o objeto matemático em estudo de suas representações.

Dessa forma, Thiel, Barbosa e Moretti (2018) propõem uma metodologia para estudo de função que explore ao máximo os registros de representações semióticas sem enfatizar ou supervalorizar nenhum destes, pois somente com a diversificação dos registros de representação de um objeto, seria possível a aquisição dos conceitos de funções quadráticas. Os autores traçam um paralelo entre o conhecimento algébrico adquirido e o geométrico mobilizado. Para tanto, é feita uma análise das representações possíveis para o objeto matemático função quadrática, chegando-se à conclusão de que as diversificações das formas de representação são essenciais para a construção do pensamento integral,

pois cada representação contempla determinado aspecto do objeto em estudo. Vejamos a análise apresentada por Thiel, Barbosa e Moretti (2018) na Figura 3.24.

Representação	Segundo Moretti (2002), cada uma dessas representações possui, em sua integridade, as mesmas informações do objeto matemático em referência. Todavia, do ponto de vista cognitivo, um determinado tipo de informação sobressai mais em uma do que em outra forma. Observe:
(a) $y = x^2 - 4x + 3$	(a) a ideia mental da curva aberta (parábola) com concavidade para cima.
(b) $y + 1 = (x - 2)^2$	(b) as coordenadas do vértice da parábola.
(c) $y = (x - 3)(x - 1)$	(c) com clareza as raízes.
(d) esboço da parábola no plano cartesiano.	(d) uma representação de um sistema semiótico diferente dos anteriores e que muitas vezes é bastante adequado à interpretação, se for o caso, do fenômeno representado. Nesta mesma forma, no entanto, não temos com precisão, por exemplo, o valor de $y(\sqrt{2})$.



Quadro 1 – Representação de signos diferentes do objeto matemático ‘parábola’
Fonte: Adaptado de Moretti (2002, p. 347).

Figura 3.24: Diferentes registros do mesmo objeto matemático: Função Quadrática.
Fonte: Thiel, Barbosa e Moretti (2018, pg.4)

Semelhante ao que foi feito por Ramos e Curi (2014), os autores Thiel, Barbosa e Moretti (2018) concebem a geometria euclidiana usada na representação gráfica da função quadrática como indispensável para a integralização da construção do conceito de função. No entanto, tratam essa representação, e por conseguinte, a própria geometria, como mais um tópico a ser abordado e explorado, dando consistência ao conhecimento matemático construído mediante o uso de uma metodologia que tem como pressuposto teórico os registros de representações semióticas.

De acordo com Baier (2016), o ensino de matemática deve se consolidar a partir da multiplicidade de teorias, uma vez que o conhecimento dessa ciência resulta da criatividade e inferências feitas a partir de diferentes enfoques. Os elementos da geometria euclidiana representativos dos fractais permeiam o trabalho de Baier (2016), servindo como suporte para os diagramas utilizados para representar os resultados obtidos da iteração da função $x_{n+1} \rightarrow kx_n(1 - x_n)$ utilizada para descrever uma população, quando se varia os valores de k . Tomando $k = 2,8$ e $x_0 = 0,1$, obtém-se o diagrama denominado teia de aranha, que já havíamos mencionado anteriormente, conforme páginas 18 e 19.

Em contrapartida, Maio (2015) alerta para a decepção do aprendizado proposto

sem o profundo conhecimento das limitações psíquicas dos educandos, uma vez que estes não tenham amadurecido a sua concepção espacial indispensável para abstração dos elementos da geometria euclidiana. Ressalte-se que o universo geométrico não euclidiano é o que constitui a realidade na qual está inserido o educando. O estudo feito por Ghisleni e Battisti (2018) elucidou o processo de elaboração e representação da realidade e de seus sistemas de signos, pelos quais os sistemas complexos de elaboração do pensamento se constituem. Como exemplos de tais sistemas, tem-se a linguagem materna e em grau mais elevado, a escrita e a matemática. Estas por sua vez, fazem uso da linguagem materna para intermediar, elaborar, desenvolver e coordenar seus signos e símbolos. No caso restrito da matemática, a apreensão dos conceitos relacionados aos elementos constitutivos de suas realidades perpassam pelo desenvolvimento dos signos e símbolos pelos quais tais conceitos são contextualizados e/ou resignificados dentro dessa realidade, configurando assim, um sistema de generalizações.

A construção do conceito de função desenvolvido pelos alunos do primeiro ano descrito na pesquisa de Ghisleni e Battisti (2018) faz uso de questões retiradas do livro didático usado nas aulas de matemática, partindo de questionamentos e de utilização de conceitos de geometria como área, perímetros e medidas dimensionais. A proposta de estudo desenvolvida por Andrade e Saraiva(2012) também se apoia na teoria das representações semióticas de Duval mas explora aspectos mais avançados dessa teoria, a saber o tipo de representação semiótica denominado de Conversão que consiste na mudança de um registro para o outro sem alterar os objetos matemáticos que estão em jogo. Dessa forma, são propostos trabalhos com funções que contemplam desde o reconhecimento do conceito geral de funções, até o reconhecimento de suas tipologias, tais como função afim, quadrática, modular e exponencial. Dessa forma, são abordados para o mesmo elemento matemático diferentes representações. No entanto o estudo de Andrade e Saraiva(2012) aprofunda nas discussões que envolvem aspectos associados às representações algébrica e da língua materna, sendo a representação geométrica usada apenas para compor um quadro teórico.

O estudo apresentado por Viseu e Menezes (2014) fornece uma série de problemas de modelagem matemática para serem desenvolvidos com os alunos no 3.º ciclo do Ensino Básico de uma escola da Zona Norte de Portugal. Dentre essas atividades, a escolhida para ensinar função quadrática é denominada Bola Saltitante:

Tarefa 7. Bola Saltitante: A Vanda ao jogar basquetebol com os seus colegas de turma apercebeu-se que ao deixar cair a bola, a distancia entre esta e o chão vai diminuindo com o tempo. Que altura máxima atinge a bola num determinado intervalo de tempo? VISEU E MENEZES (2014).

O procedimento adotado para compreensão do problema e sua resolução é feito por meio de recurso tecnológico, a saber uma CBR (Calculator-Based Ranger™), por meio da qual é feita a descrição da trajetória da bola, a partir da análise dos dados obtidos. Dessa forma, o problema consiste em determinar a altura h para um determinado tempo t . Trata-se então de um problema de generalização que é feito a partir dos conceitos de ponto máximo, isto é, coordenadas do vértice. O conhecimento geométrico mobilizado no processo resolutivo se resume à representação gráfica e esboço da trajetória da bola durante o período observado.

Todavia, a análise dos dados faz uso concomitante da abordagem algébrica e geométrica, o que permite ao aluno perceber que o mesmo problema está sendo tratado sobre dois enfoques - algébrico e geométrico - que são fundamentais para o desenvolvimento do pensamento matemático. A análise dos dados obtidos permite ainda compreender o conceito de altura adotado no problema da Tarefa 7, isto é, a altura como grandeza que sofre variação (variável dependente) e não uma grandeza estática como aquela predominante nos problemas geométricos. **A atividade mostra que a abordagem metodológica usada para o ensino da função quadrática considera a importância da geometria euclidiana, contextualizando os elementos euclidianos, para que possam ser analisados sobre o prisma da álgebra. Essa vertente tem se fortalecido à medida que analisamos os estudos selecionados para nossa pesquisa.**

Pereira, Uehara e Núñez (2012) fazem uma análise da resolução das questões discursivas da prova de Matemática do vestibular da UFRN, fundamentando-se na concepção vigotskiana do erro. Os autores apresentam uma análise dos procedimentos usados pelos candidatos ao vestibular da UFRN, a partir das estratégias usadas na resolução de uma questão discursiva de matemática, a qual aborda temas de álgebra e geometria. A mobilização das estratégias e do conhecimento matemático usados pelos candidatos para resolver as questões promovem debates interessantes no que se refere ao equívoco cometido diante dos temas abordados na questão. A discussão desses resultados é feita a partir

da análise do tópico de matemática utilizado. No tocante ao conteúdo função quadrática, os pré-requisitos conceituais que a questão exige para resolução, tal como descrevem os autores:

Habilidades exigidas: Para responder à questão o candidato necessitaria: a) Calcular o ponto de máximo de uma função quadrática, numa aplicação do cotidiano. b) Aplicar as relações de semelhança de triângulos para obter a expressão com que se calcula a área de um retângulo, dadas as dimensões deste. (Pereira, Uehara e Núñez, 2012, p.5).

Com relação aos conteúdos envolvidos nessa questão, os autores apresentam o quadro de conteúdos na Figura 3.25:

Áreas	Temas
Funções	Funções quadráticas
Geometria Plana	Semelhança de triângulos
	Área de quadriláteros

Figura 3.25: Quadro de conteúdos abordado na questão 4

Os autores Pereira, Uehara e Núñez (2012) deixam claro o papel crucial que a geometria desempenha no ensino de álgebra. O problema clássico da obtenção da área máxima de um retângulo é historicamente apresentado nos compêndios de ensino de função quadrática. Os elementos e tópicos geométricos presentes nesse tipo de questão tornam tênue as barreiras epistemológicas que separam esses dois tópicos da matemática. Percebe-se a clareza do papel desempenhado por ambas como ferramenta cognitiva de auxílio à compreensão das propriedades e particularidades que cada uma possui.

No entanto, a utilização de conhecimento geométrico como auxiliar ao conhecimento algébrico nessa atividade mostrou que “perigos epistemológicos” podem aparecer, como é o caso da utilização de ferramentas geométricas que não servem para o problema, como é o caso do Teorema de Pitágoras. Dessa forma, o uso da geometria como ferramenta cognitiva para compreensão dos aspectos abstratos da álgebra precisa estar em consonância com os objetivos da proposta metodológica. Dito de outra forma, o uso da geometria com esse propósito precisa ocorrer de forma intencional e portanto contextualizada com o objeto matemático em estudo sob pena de tornar o problema ainda mais incompreensível e distante da resolução.

Maciel e Cardoso (2014) apresentam um estudo que aborda a variação do conceito de função assumido ao longo do tempo. Para esses autores, o conceito adotado para esse tópico da matemática em cada época traduz as concepções e aspirações que definem também a própria ciência. Dessa forma, Maciel e Cardoso (2014) propõem trabalhar o conceito de função a partir do desenvolvimento de um vídeo produzido por alunos do primeiro ano do Ensino Médio. Para tanto, faz uso de História das Ciências e da Matemática e Tecnologia da Informação, abrindo debate para discussão do conceito de ciências assim como a sua função no processo de geração de metodologias de ensino.

O estudo apresentado por Meneses e Mariani (2014) analisa uma pesquisa desenvolvida numa escola pública sergipana. Fundamentado nos estudos de representação semiótica de Duval, essa pesquisa subsidia dados relevantes para a compreensão da atividade matemática e para o desenvolvimento de estratégias que visam romper com o modelo tradicional de ensino, uma vez que considera a complexidade da construção dos signos e símbolos, unidades fundamentais da construção do conhecimento. Sendo assim, Meneses e Mariani (2014) colocam o conhecimento geométrico como fundamental para auxiliar o processo de abstração do pensamento algébrico, uma vez que a representação geométrica é tão importante quanto as demais representações. O uso diversificado de representações para um mesmo objeto matemático é fundamental para o desenvolvimento de seus conceitos. O livro didático analisado nos estudos de Meneses e Mariani (2014), a saber Dante (2010), faz uma abordagem equilibrada dessas representações segundo Meneses e Mariani (2014). Mas, saber registrar o objeto matemático função quadrática em cada uma das representações não é garantia de que o conceito de função foi compreendido (Meneses e Mariani, 2014, p.5). Os autores apresentam na Figura 3.26 representações semióticas de um mesmo objeto matemático:

3.2.3 Resolução de Problemas

A tendência Resolução de Problemas em educação matemática foi identificada na nossa pesquisa nos trabalhos de Castro e Silva (2015), Gravina (1987), Paterlini (1994), Carvalho (1993), Carneiro (2002) e Strapason e Bisognin (2013). Todos esses artigos foram publicados pela Revista do Professor de Matemática, exceto Strapason e Bisognin (2013), publicado pelo Bolema, e tratam de problemas do dia a dia que podem ser usados como atividades de investigação em sala de aula.

Quadro 01: Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no ensino de função.

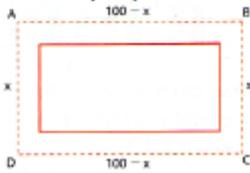
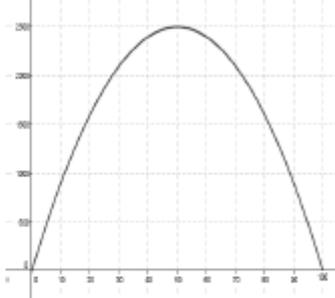
Registros de Representação Semiótica e a função												
	Representações Discursivas	Representações Não Discursivas										
<p>Registros Multifuncionais: Os tratamentos não são algoritmizáveis.</p>	<p style="text-align: center;">Registro na Língua Natural (RLN)</p> <p>Os diretores de um centro esportivo desejam cercar com tela de alambrado o espaço em volta de uma quadra de basquete retangular. Tendo recebido 200 m de tela, os diretores desejam saber quais devem ser as dimensões do terreno a cercar com a tela para que a área seja a maior possível.</p>	<p style="text-align: center;">Registro Figural (RAI)</p>  <p style="text-align: center;">Registro Geométrico: (RGe)</p> 										
<p>Registros Monofuncionais: Os tratamentos são principalmente algoritmos.</p>	<p style="text-align: center;">Registro Algébrico (RAI)</p> $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ $f(x) = (100 - x) \cdot x$ $f(x) = 100x - x^2$ $f(x) = -x^2 + 100x$ <p style="text-align: center;">Registro Numérico (RNm)</p> <p>Dimensão do terreno (abscissa do vértice):</p> $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2 \cdot (-1)} = \frac{-100}{-2} = 50$ <p>Área máxima (ordenada do vértice):</p> $f(50) = -50^2 + 100 \cdot 50 = -2500 + 5000 = 2500$ <p style="text-align: center;">Registro Simbólico (RSb)</p> <p>$\{(0, 0), (1, 99), (2, 196) \dots\}$</p> <p>$f(0) = 0$ $f(1) = 99$ $f(2) = 196$ \dots</p> <p>$\{x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 100\}$</p> <p style="text-align: center;">Registro Tabular (RTb)</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>X</th> <th>f(x)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>99</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>196</td> </tr> <tr> <td>...</td> <td>...</td> </tr> </tbody> </table>	X	f(x)	0	0	1	99	2	196	<p style="text-align: center;">Registro Gráfico: (RGr)</p> 
X	f(x)											
0	0											
1	99											
2	196											
...	...											

Figura 3.26: Diferentes registros para o mesmo objeto matemático. Fonte: Meneses e Mariani (2014, p.139)

Em Castro e Silva (2015), a resolução de problemas foi explorada a partir de uma atividade que engloba a desigualdade do triângulo, médias aritméticas e geométricas e otimização com cálculo de volume a partir da construção de um objeto por meio de dobraduras - o porta-treco. Gravina (1987) propõe uma atividade que permite desenhar gráficos da função quadrática a partir do gráfico da função $y = x^2$ e de suas translações em torno dos eixos Ox e Oy . A proposta metodológica para o ensino de função quadrática usada por Paterlini (1994) aborda o clássico problema da maximização de áreas. Nesse estudo, o autor apresenta diversos caminhos para obter o ponto extremo da função quadrática, isto é, as coordenadas do vértice desta função. Carvalho (1993) relata uma

situação real, vivenciada pelo próprio autor, ao exercer o ofício paternal cuja complexidade resultou na elaboração de um problema envolvendo funções quadráticas a partir de sequências aritméticas e geométricas. Um problema doméstico, cuja solução parte da modelação para obter um objeto matemático que corresponde às características do problema. É salutar compreendermos o dilema do autor e paciente jovem pai, como ele mesmo se descreve:

Alguns anos atrás, quando meus filhos eram pequenos, eu tinha o hábito de gravar filmes e desenhos animados para eles. Meu videocassete possuía um contador de voltas mecânico, que registrava o número de voltas efetuadas pelo carretel da direita e que eu utilizava para marcar o início de cada filme ou programa...Meu problema era o de saber quanto tempo ainda restava para o final da fita (para decidir se havia espaço para gravar um programa de, digamos, 30 minutos de duração) Carvalho (1993).

Carneiro (2002) fez uso do conteúdo função quadrática como recurso de resolução do problema da reta dos mínimos quadrados. Para Strapason e Bisognin (2013) o conteúdo função quadrática foi abordado usando como metodologia a produção de jogos para explorar as propriedades e conceitos dessas funções. Seguindo uma abordagem que se aproxima do paradigma do exercício, as autoras escolheram como elemento diferenciador o aspecto lúdico que esse recurso didático oferece.

Para além de uma reflexão sobre a prática, as atividades analisadas nessa subseção demonstram uma variabilidade de aplicações e situações nas quais o objeto matemático função quadrática pode ser abordado. Dessa forma, a tendência em educação matemática Resolução de Problemas possibilita o desenvolvimento de atividades que substituem a resolução de exercícios repetitivos cuja finalidade é apenas mnemônica, desprovidos de criticidade e propõe atividades contextualizadas que lancem mão de diversas estratégias em torno do problema matemático a ser resolvido. No tocante ao ensino de funções quadráticas essa tendência encontra nos trabalhos supracitados um forte potencial para serem explorados em sala de aula. Os problemas propostos quase sempre exigem auxílio teórico de outros pilares da Matemática, sendo a geometria euclidiana o conhecimento

matemático mais procurado para essa finalidade o que a torna essencial para os processos de estruturação e abstração do pensamento algébrico.

3.2.4 Modelagem Matemática

A modelagem matemática foi a tendência em Educação Matemática identificada nos trabalhos de Silva e Almeida (2015), Viseu e Menezes (2014)[45], Rodrigues e Mackedanz (2017) e Carvalho (1993) em seus estudos com funções quadráticas. O estudo feito por Silva e Almeida (2015), seguindo as orientações dadas por (DINIZ; BORBA, 2012, p. 937) foi realizado usando dados de uma revista de circulação nacional que tem caráter cultural e científica para gerar a situação inicial do problema de modelagem.

A partir dos dados de uma pesquisa sobre o consumo anual de cigarros por pessoa no período de 1950 até 2007 deu início a execução das etapas da modelagem. A atividade consiste em prever o consumo para o ano de 2010. Alguns modelos matemáticos foram propostos e hipóteses foram testadas, usando o procedimento próprio da modelagem para testar modelos. Dentre estes modelos, temos as funções lineares, exponencial e quadrática. No presente estudo o modelo função quadrática foi rejeitado porque os dados do problema apresentava valor mínimo muito elevado o que tornaria o modelo complexo para o problema: “Uma abordagem por meio de uma função quadrática também foi ensaiada pelos alunos, no entanto, perceberam que um modelo deste tipo não seria adequado uma vez que com os dados que tinham o ponto de mínimo era superior a 702 cigarros” (SILVA E ALMEIDA, 2015, p.12)

O estudo desenvolvido por Viseu e Menezes (2014) a partir da tendência Modelagem Matemática, “discute a forma como uma futura professora de Matemática mobiliza e desenvolve o seu conhecimento didático, ao nível do conhecimento do conteúdo matemático e do conhecimento da prática letiva, na preparação e análise de tarefas de modelação matemática, recorrendo à tecnologia”. No presente artigo, a "possível", (explicitamos, em seguida o porquê das aspas) proposta desenvolvida para ensinar o conteúdo funções quadráticas surge do trabalho com modelagem matemática - trata-se da Tarefa Bola Saltitante, que já enunciamos anteriormente.

Os recursos cognitivos mobilizados por Viseu e Menezes (2014) para obter o modelo matemático que se adequa ao problema pouco se difere daqueles usados por Silva e Almeida (2015) exceto pelo uso de recursos tecnológicos como a calculadora e planilhas

eletrônica. Dessa forma, todos os aspectos envolvidos no problema são relevantes, desde a sua concepção e hipóteses até a sua disposição espacial, o que sugere uso de geometria. Ambos estudos, embora façam uso da tendência Modelagem Matemática, não constituem uma metodologia para o ensino de função quadrática, nem mesmo relata uma experiência desenvolvida com alunos do Ensino Médio.

Os trabalhos fazem uma análise de como futuros professores poderiam usar essa tendência em sua atuação em sala de aula. O trabalho elaborado por Viseu e Menezes (2014) foi desenvolvido com graduandos do curso de licenciatura em Matemática assim como o estudo de Silva e Almeida (2015), o qual foi desenvolvido no estágio supervisionado de uma estudante "futura professora de matemática". Isso nos permite entender que o trabalho desenvolvido com alunos do ensino médio, certamente traria outros entraves além dos detectados nesses dois artigos, a exemplo de como alunos da educação básica direcionam seu conhecimento matemático para tentar resolver um problema real. A forma como eles constroem suas hipóteses e as testam e como eles obtêm os modelos matemáticos que é a solução dos problemas constituem os obstáculos a serem enfrentados numa atividade com modelagem em qualquer nível de ensino. No estudo desenvolvido por Viseu e Menezes (2014), a abordagem da geometria euclidiana está presente no processo usado para deduzir, representar, testar, aceitar ou rejeitar os modelos matemático:

Da análise dos dados, a estagiária apercebe-se que “os pontos máximos de cada uma das parábolas descritas pelo movimento da bola descrevem uma função exponencial” (Rel). Para averiguar a altura máxima que a bola atinge num determinado intervalo de tempo ... Restringi o domínio da experiência de modo a analisar uma das curvas que traduz o movimento da bola nesse intervalo. Fisicamente, a curva é uma parábola porque se trata do movimento de um corpo sujeito apenas à aceleração da gravidade. (Viseu e Menezes, 2014, p. 365).

Dessa forma, a descrição do processo de obtenção do modelo matemático usado pelo autor faz uso de elementos da geometria de Euclides, tais como: parábolas, curva e altura e traça um desenho mental de como a dinâmica dessas observações geradas pela

variável tempo promovem o conhecimento algébrico de funções. Daí, a relevância que a geometria euclidiana tem para o ensino de funções quadráticas na tendência Modelagem Matemática. A proposta metodológica descrita por Carvalho (1993) para o ensino de função quadrática encontra na modelagem matemática a fundamentação para desenvolver uma atividade que envolve um problema real.

O procedimento utilizado para se obter os modelos matemáticos permitiu uma abordagem algébrica de alto padrão que perpassa por diferentes tópicos de álgebra como Progressões Aritméticas e Geométricas e termina com Funções Linear e Quadrática. Desta forma, a constatação do seguinte fato algébrico “A expressão do termo de ordem n da seqüência obtida somando-se os n primeiros termos de uma PA é dada por uma função do segundo grau (cujo termo independente é nulo). Reciprocamente, as diferenças entre os valores sucessivos de uma função do segundo grau, calculados a intervalos regulares, formam uma PA.” Carvalho (1993) permitiu ao autor usar a seguinte representação gráfica, Figura 3.27 que traduz a recíproca do fato algébrico citado acima, na qual a relação entre Progressões e Funções torna-se perceptível através do gráfico da função quadrática.

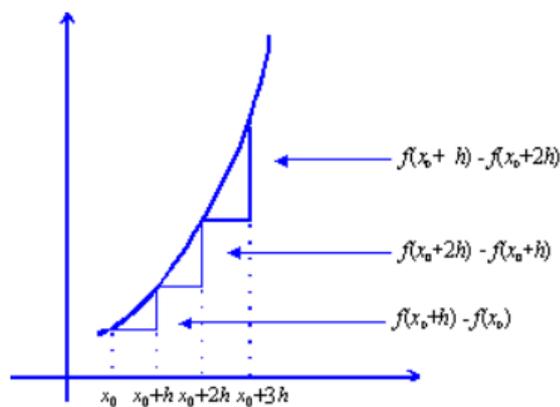


Figura 3.27: Diagrama obtido pela recíproca da observação feita pelo autor. Fonte: Carvalho (1993)

Rodrigues e Mackedanz (2017) usaram modelagem matemática para criar um objeto de aprendizagem denominado espelho parabólico com o propósito de intruzir o estudo de Óptica Geométrica através do conceito de parábola. A orientação dada aos alunos durante a aplicação da proposta metodológica por Rodrigues e Mackedanz (2017) para traçar a parábola, se assemelha à abordagem apresentada por (Lima, 2013, p. 112), que determina a parábola como lugar geométrico. Vejamos:

primeiro, o traçado de um segmento de reta paralelo a uma das bordas do papel e depois, a marcação de um ponto fora desse segmento, numa posição mais ou menos na altura da metade do segmento, a uma distância escolhida pelo grupo. (Rodrigues e Mackedanz, 2017, p.6).

O caráter heurístico da metodologia que faz uso do conhecimento geométrico ao ensinar função quadrática é marcado pela flexibilização das representações feita para o objeto matemático. No estudo de Rodrigues e Mackedanz (2017) tal flexibilização é evidenciada na observação:

"Aqui já podíamos perceber que a ideia da construção da parábola como lugar geométrico de pontos equidistantes teve uma aceitação muito maior pelos alunos do que o conceito livresco, pura e simplesmente. (Rodrigues e Mackedanz, 2017, p.8)

Dessa forma, o modelo matemático foi obtido fazendo-se uso intenso das propriedades geométricas da função quadrática. A observação dessas propriedades permitiu transcender os objetivos da proposta, dando espaço ao debate em torno dos conceitos e definições dos elementos constituintes da parábola, tais como: foco, reta diretriz, reta de simetria, curvas, feixe de retas paralelas, pontos equidistantes e vértice. A mobilização do conhecimento geométrico com o objetivo de criar um modelo que permite aos alunos de se apropriarem de partes significantes do conhecimento de função quadrática, lhe atribui significado tanto prático como teórico. Parte do conhecimento geométrico das parábolas são frequentemente ignorados nos livros didáticos, tratando-os como irrelevantes para o ensino de função quadrática.

3.2.5 Etnomatemática

Numa tentativa de aproximar o conhecimento acadêmico do conhecimento matemático produzido na luta diária, no cotidiano, na realidade vivida por todos os povos e manifestas nos mais diferentes aspectos da vida e da cultura, a Etnomatemática se alinha aos ideais da Educação Matemática propiciando ao processo de ensino aprendizagem subsídios para desenvolvimento de pesquisas que emergem no cotidiano e nas manifestações culturais, sendo um arcabouço para a contextualização e investigação matemática. Conforme D’Ambrósio (2001), a “todo instante, os indivíduos estão comparando, classificando, qualificando, medindo, explicando, generalizando, inferindo e, de algum modo, avaliando, usando os instrumentos materiais e intelectuais que são próprios à sua cultura”. Em nosso levantamento, identificamos apenas um estudo enquadrado nessa tendência.

O trabalho de Zanlorenzi (2017) apresenta a Etnomatemática como a tendência da Educação Matemática que mais se adequa ao problema da construção de uma proposta pedagógica específica para as comunidades ilhéus do litoral paranaense. Após assumir a necessidade de um currículo específico para o povo ilhéus do litoral paranaense, Zanlorenzi (2017) defende a elaboração de uma proposta pedagógica diferenciada para as escolas desse território, que tenha como elementos marcantes, o trato com as especificidades das populações locais bem como sua participação na elaboração dessa proposta em conjunto com especialistas dos mais diversos segmentos da sociedade paranaense. A escolha dos saberes que irão compor o currículo perpassa por dimensões políticas e epistemológicas, configurando uma disputa para transpor os marcos da classe dominante que historicamente dita o currículo a ser adquirido pelas massas.

Zanlorenzi (2017) traça um paralelo entre uma proposta pedagógica articulada com saberes tradicionais das comunidades ilhéus com os saberes acadêmicos formais. Os conteúdos da Base Nacional Curricular Comum só deveriam ser incorporados à proposta curricular diferenciada se estes dialogassem com os saberes locais, num enfoque metodológico que envolvesse a contextualização dos saberes, através de projetos e atividades interdisciplinares. No que tange à Matemática, a proposta de Zanlorenzi (2017) encontra na Etnomatemática a fundamentação privilegiada para sua viabilidade, uma vez que a “Etnomatemática pode ser considerada como uma ação pedagógica que pode auxiliar os alunos de grupos culturais distintos a terem acesso ao discurso matemático acadêmico.”(OREY(2015, p.248). Dessa forma, qualquer metodologia de ensino de função qua-

drática que se molde nos enfoques tradicionais de ensino não faz sentido na proposta pedagógica de Zanlorenzi (2017). O texto não apresenta de que forma esse conteúdo deve ser abordado dentro dessa proposta, mas ressalta que qualquer conteúdo da Base Nacional Curricular Comum precisa dialogar com os saberes locais para que possam ter respaldo no currículo a ser construído. A proposta de Zanlorenzi (2017) dá preferência à geometria no currículo, sobretudo aos enfoques da geometria plana e seus processos métricos, como o cálculo de áreas e perímetros. O presente estudo não apresenta recomendações para se trabalhar com função quadrática, mas sim, com função linear e suas relações entre a geometria euclidiana e a Física, através do estudo do Movimento Retilíneo Uniforme. Zanlorenzi (2017) propõem um currículo que integralize o conhecimento científico com o conhecimento cultural das comunidades ilhéus, no que se refere ao conhecimento matemático. Os conteúdos abordados devem dialogar com o conhecimento cultural, onde a geometria plana de Euclides é o tópico matemático responsável pela geração da proposta didática, conforme quadro metodológico apresentado na Figura 3.28.

Quadro 01. Encaminhamentos Metodológicos			
Conteúdo Básico/Específico	Previsão	Encaminhamentos Metodológicos	Recursos Didáticos
Entes primitivos (ponto, reta e plano). Termos utilizados em geometria.	3 aulas	Começar com uma atividade: desenhe uma figura qualquer e indique nela um ponto, uma reta e um plano. Desenvolver com os alunos, utilizando as figuras em EVA, os conceitos e definições: altura, ângulo, área, aresta, capacidade, diagonal, perímetro, poliedro, polígono, planificação, retas paralelas, retas perpendiculares, retas concorrentes, simetria, vértice, volume e outros que forem surgindo durante as explicações.	Quadro giz figuras recortadas em EVA Pequeno glossário de geometria impresso
Ângulos.	3 aulas	Desenhar um ângulo qualquer, identificar seus elementos (lados e vértice) e explicar sobre a definição de ângulo. Passar a classificação dos ângulos conforme suas medidas, fazendo os desenhos no quadro e utilizando o ângulo reto (90°) como referência.	Quadro giz figuras recortadas em EVA réguas
Triângulos	5 aulas	Utilizando as figuras em EVA, explicar sobre os triângulos. Enfatizar os conceitos de lados, vértices e ângulos. Explicar sobre a classificação dos triângulos quanto à medida dos ângulos: acutângulo, retângulo e obtusângulo; e quanto à medida dos lados: equilátero, isósceles e escaleno. Fazer os desenhos equivalentes no quadro. Demonstrar como se utilizam os esquadros e compasso na construção das figuras geométricas.	Quadro giz figuras recortadas em EVA réguas esquadros compasso papel sulfite
Quadriláteros	3 aulas	Utilizando as figuras em EVA, explicar sobre os quadriláteros notáveis. Fazer os desenhos dos quadriláteros no quadro (quadrado, retângulo, losango, paralelogramo e trapézio) enfatizando suas características e propriedades.	Quadro giz figuras recortadas em EVA réguas esquadros compasso papel sulfite
Plano cartesiano.	15 aulas	Explicações sobre o que é plano cartesiano e suas aplicações. Fazendo um paralelo entre o plano cartesiano e as coordenadas cartesianas estudadas na geografia. Desenhando o plano cartesiano no quadro, localizar um par ordenado deixando bem claro sobre as coordenadas e sobre o eixo horizontal, das abscissas, e o eixo vertical, das ordenadas. Utilizando a localização de pares ordenados no plano cartesiano, desenhar triângulos e quadriláteros sobre o plano cartesiano e fazer explicações sobre o cálculo das áreas das figuras utilizando as equações de cálculo e utilizando a malha de eixos para visualizar as áreas.	Quadro giz figuras recortadas em EVA réguas esquadros compasso papel sulfite papel quadriculado
Funções lineares. Velocidade. Deslocamento.	15 aulas	Utilizando a equação de cálculo de velocidade do MRU, fazer explicações sobre a construção de gráficos utilizando os eixos do plano cartesiano e variáveis que serão calculadas.	Quadro giz réguas esquadros compasso papel quadriculado

Fonte: SEEDPR, 2015, p. 18-20.

Figura 3.28: Quadro metodológico e possíveis diálogos para contextos. Fonte: Zanlorenzi (2017, p. 222)

3.3 Relação com livros didáticos

Trataremos nessa seção de analisar os estudos que apresentam estratégias de ensino elaboradas a partir de livros didáticos. Identificamos nessa categoria os estudos de Andrade

e Saraiva (2012), Lutz (2015) e Meneses e Mariani (2014).

O estudo desenvolvido por Lutz (2015) é organizada em três dimensões: a Epistemológica, a Cognitiva e a Didática. Essa última abrange a análise do material didático usado na escola. Lutz (2015) propôs a sequencia didática a partir da análise de cinco livros didáticos usados nas escolas públicas brasileiras e que foram enviados para apreciação do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD 2015). Os livros analisados foram:

- IEZZI, Gelson. Matemática: ciências e aplicações. Vol. 1. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.
- LEONARDO, Fabio Martins de. Conexões com a Matemática. Vol. 1. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.
- PAIVA, Manoel. Matemática. Vol. 1. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.
- SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. Matemática: Ensino Médio. Vol. 1. 8. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.
- SOUZA, Joamir Roberto de. Novo Olhar: Matemática. Vol. 1. 2. ed. São Paulo: FTD, 2013.

A análise desse material permitiu a Lutz (2015) perceber uma padronização da abordagem do conteúdo Função Quadrática sem grandes diferenciações, com exceção dos livros de Smole e Diniz (2013) e Souza (2013), pois os mesmos sugerem a utilização de softwares, a exemplo do Winplot para explorar os conceitos de função. Da mesma forma, a estratégia de Lutz(2015) utiliza exercícios presentes nos livros didáticos para serem resolvidos com o uso do software Winplot (investigação matemática).

Meneses e Mariani (2014) [26] traçam um paralelo entre a teoria das representações semióticas de Duval, os parâmetros curriculares Nacionais de Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias e o Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio - PNLDEM (BRASIL, 2012). O estudo trata de uma “pesquisa de mestrado realizada com finalidade de investigar as representações semióticas mobilizadas nas atividades propostas no livro didático (LD) Matemática: Contexto e Aplicações de Dante (2010) [12]” (MENESES, 2014). O estudo de Meneses e Mariani (2014) recorre à teoria das representações semióticas de Duval para construir categorias de análise dos registros para o livro didático usado na escola onde se deu a pesquisa. Como foi dito anteriormente, o aspecto geométrico das funções para a semiótica de Duval é relevante apenas para a diversificação das representações desse objeto matemático. Todavia, em consonância com

os Parâmetros Curriculares Nacionais (2012), Meneses e Mariani (2014) reforçam que a abordagem geométrica no ensino de função equilibra o rigor da terminologia algébrica.

Para Andrade e Saraiva (2012), a diversificação dos registros de representação de funções e o estabelecimento de conexões entre esses registros é essencial para o desenvolvimento do conceito de funções. Trabalhando com alunos do primeiro ano (alunos com 15/16 anos de idade) de uma escola de educação básica e secundária de uma região do interior de Portugal, os autores desenvolveram com a turma atividades que tinham como finalidade fornecer dados para a análise de como se dava a compreensão, e o desenvolvimento do conceito de função a partir do uso diversificado dos registros de representações de funções. O estudo de caso foi feito a partir da seleção dos cadernos de duas alunas, com perfil escolar e história de vidas diferentes.

Conforme Andrade e Saraiva (2012), os exercícios propostos para os alunos eram semelhantes aos do livro didático adotado na instituição de ensino. O diferencial consistia na diversificação dos registros de funções, o que dava aos exercícios um valor investigativo, permitindo aos pesquisadores inferirem estratégias de resolução usadas pelos estudantes. As atividades mostraram potencial para assegurar aos alunos a distinção entre o objeto em estudo, isto é, a função e as representações utilizadas por eles, a saber, gráfica, algébrica e tabular.

Capítulo 4

Considerações Finais

Essa pesquisa fez um levantamento das estratégias de ensino de funções quadráticas com a finalidade de tentar compreender de que forma a geometria é abordada nas propostas didáticas presentes na literatura. Avaliamos os estudos em três categorias de análise:

1. “intensidade” do uso da geometria na proposta de ensino;
2. Fundamentação teórica: tendência utilizada na proposta;
3. Relação com livros didáticos.

Verificamos que algumas abordagens ainda carecem de investigações mais específicas, como é o caso de termos identificado apenas um estudo enquadrado na Tendência Etnomatemática, que trata de uma proposta curricular para as comunidades ilhéus paraense.

Nossa pesquisa mostrou também que o conhecimento geométrico abordado em alguns estudos não está claro nas propostas de ensino e outras vezes é abordado sem intencionalidade, apesar de sua relevância para o sucesso da proposta metodológica. Entretanto, na maioria dos estudos percebe-se uma intencionalidade em usar o conhecimento geométrico como amparo cognitivo de grande valia para o processo de ensino e aprendizagem de função quadrática.

Propostas como a que apresentamos nessa pesquisa, pode evitar equívocos epistemológicos tal qual o evidenciada no estudo de Zanlorenzi (2017), onde a proposta Curricular analisada por Zanlorenzi(2017) estabelece que a geometria euclidiana deveria ser usada para contextualizar o conhecimento matemático. Todavia o conteúdo função quadrática não consta no quadro de conteúdos da Grade Curricular por não possibilitar o diálogo

exigido entre os saberes tradicionais locais e o acadêmico. Isso evidencia a ignorância do potencial geométrico que esse conteúdo matemático possui, bem como as possibilidades metodológicas desenvolvidas a partir da abordagem geométrica algumas das quais apresentamos nessa pesquisa.

De igual modo, as metodologias que faz uso de construção de materiais concretos ou objetos de aprendizado devem ser intensificada uma vez que essa é a forma mais fácil de abordar o ensino de função por meio de manipulação de objetos ou fazendo comparação e determinando relações entre as grandezas estudadas. É importante lembrar que em dois estudos que fazem uso de material concreto, analisados nessa pesquisa, a utilização do conhecimento geométrico mostrou-se essencial para a construção desses objetos assim como para o aperfeiçoamento de suas funções. Paralelamente, as metodologias que usam construção de material concreto como abordagem de ensino de função quadrática inexoravelmente faz uso da abordagem geométrica seja no desenvolvimento de protótipos, seja na correção do aspecto físico ou das funções do objeto. Reconhecemos pois, a necessidade de dá continuidade ao desenvolvimento de metodologias que abordem a construção desses objetos de aprendizados.

As metodologias que usam geometria dinâmica se apresentam como uma tendência de ensino para o estudo do comportamento gráfico da função quadrática e com o desenvolvimento dos recursos tecnológicos tendem a ser a ferramenta mais adequada para esse estudo, uma vez que transcendem o paradigma do exercício de esboçar o gráfico e permite a percepção de padrões matemáticos, além de possibilitar a análise do comportamento de famílias de parábolas como nos estudos de SOUZA ET AL.(1996)e SOUZA E SILVA (2006), onde a abordagem geométrica possibilitou achados interessantes decorrentes do comportamento gráfico da função quadrática. Por outro lado, os estudos que defendem uma maior abordagem dos registros de representações semióticas do objeto matemático função quadrática, encontram nos estudos de DUVAL (2003), (2006) e (2011) a fundamentação necessária para aplicar os princípios da Semiótica Perciniana no processo de ensino e aprendizagem de função quadrática, através de sequências didáticas que promovam no aluno a percepção dos símbolos e signos que são essenciais para a construção do conceito de função quadrática.

Acreditamos que nossa pesquisa possibilita ao futuro professor de matemática vislumbrar quão rico é o campo metodológico do ensino de função quadrática e como a

educação matemática tem servido de amparo epistemológico para fomentar estratégias de ensino que promovam a criticidade frente aos problemas vividos no espaço e tempo no qual está inserido o sujeito que se educa. Mais que uma percepção das tendências metodológicas de ensino de função quadrática acreditamos que essa pesquisa possibilita dá continuidade a investigações que corroboram com o melhoramento do ensino de matemática no Ensino Médio, seja através de elaboração de propostas didáticas que contemplem as tendências em educação matemática, seja através de estratégias que intensifiquem a abordagem geométrica, a qual acreditamos auxiliar na elaboração do pensamento algébrico ao passo que consolida o pensamento funcional.

Portanto, defendemos que é preciso mais propostas de investigação com finalidade semelhante a essa aqui apresentada para que se torne claro o caráter didático, pedagógico, heurístico e epistemológico que o conhecimento geométrico sempre representou para o desenvolvimento da matemática e em especial à construção do pensamento algébrico abstrato.

Referências Bibliográficas

- [1] ANDRADE, Jael Miriam e SARAIVA, Manuel Joaquim. Multiplas representacoes: um ontributo para a aprendizagem do conceito de funcao. Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa, July, 2012, Vol.15(2), p.137(33).
- [2] BAHIA. Secretaria da Educação. Orientações curriculares para o ensino médio área: matemática/ Secretaria da Educação. – Salvador: Secretaria da Educação, 2015.
- [3] BAIER, Tânia. Visão de Mundo Ecológica na Educação Matemática: tópicos de Teoria do Caos no estudo da função quadrática. REVEMAT : REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA Vol.11 s/n, 2016.
- [4] BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. Filosofia da educação matemática. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002, p. 77.
- [5] BORGES, Carloman Carlos. A Matemática para Todos. Vol. 1. Feira de Santana: Universidade Estadual de Feira de Santana, 2006.
- [6] BRAGA, Ciro. Função a alma do ensino de matemática. São Paulo: Annablume, Fapesp, 2006.
- [7] BRASIL. Secretaria de Educação Básica. Guia de livros didáticos: PNLDEM 2012: Matemática. Brasília: MEC/SEB/FNDE, 2012.
- [8] BRASIL, Orientações Educacionais Complementares ao Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+). Ciências da Natureza e Matemática e suas Tecnologias. Brasília, MEC, 2006.
- [9] CARNEIRO, José Paulo . Uma Aplicação de Funções Quadráticas. Revista do Professor de Matemática , v. 48, p. 7-12, 2002.

- [10] CARVALHO, Paulo C. Pinto. *Um problemas "domestico"*. RPM - REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA (32), 1993.
- [11] D'AMBRÓSIO, Ubiratan. *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade*. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.
- [12] DANTE, L. R. *Matemática: contexto e aplicações*. – 2. Ed. – São Paulo: Àtica, 2013.
- [13] DINIZ, L. N.; BORBA, M. C. *Leitura e interpretação de dados prontos em um ambiente de modelagem e tecnologias digitais: o mosaico em movimento*. Bolema, Rio Claro, v. 26, n. 43, p. 935-962, ago. 2012.
- [14] DIOGO Meurer de Souza Castro, Ewerton Roosevelt Bernardo da Silva. *A aula do porta-treco*. RPM - REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. (89), 2015.
- [15] FELTES, Cristiana Monique e PUHL, Cassiano Scott. *Gráfico da função quadrática: uma proposta de ensino potencialmente significativa*. Scientia cum Industria, 01 December 2016, Vol.4(4), pp.202-206.
- [16] DUVAL, R. *Gráficos e equações: a articulação de dois registros*. REVEMAT, ISSN 1981- 1322, Florianópolis (SC), v. 6, n. 2, p. 96-112, 2011.
- [17] GHISLENI, Luiza de Paula e BATTISTI, Isabel Koltermann. *A significação do conceito função quadrática por estudantes do 1º ano do ensino médio: uma abordagem histórico-cultural*. ALEXANDRIA (UFSC), vol.11, N.1 2018.
- [18] GITIRANA, Rosilângela Lucena Verônica. *Articulações Internas à Matemática: a Parábola e a Função Quadrática com o Geogebra*. EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA, Vol.16 (51).
- [19] GRAVINA, Maria Alice. *O quanto precisamos de tabelas na construção de gráficos de funções?* RPM - REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. (17), 1987.
- [20] LARA, I. C. M. *Jogando com a Matemática na Educação Infantil e Séries Iniciais*. São Paulo: Rêspel, 2003.
- [21] LOPES, Thiago. *Engenharia didática como metodologia de pesquisa nos projetos publicados no EBRAPEM (2014-2016) - Educação Matemática Pesquisa*, 2018, Vol.20(1).

- [22] LUTZ, Mauricio Ramos. Explorando os coeficientes da função quadrática por meio do software Winplot: Uma experiência com alunos do 2º ano do Ensino Médio. REVEMAT : REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, Vol.10 (2), 2015.
- [23] MACIEL, Paulo e TEREZA, Cardoso. A História do Conceito de Função em Vídeo: uma proposta para a aprendizagem. Bolema, Dec 2014, Vol.28 (50), pp.1348-1367.
- [24] MAIO, Waldemar de. Fundamentos de Neurociência Cognitiva para a compreensão da relação ensino-aprendizagem em Matemática. CAMINHOS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA. Vol.4 (1), 2015.
- [25] MENDES, Felipe e CAMARGO, Mariza de e FORTES, Patrícia Rodrigues e SANTAROSA, Maria Cecília Pereira. O processo de ensino e aprendizagem da função quadrática com o auxílio do software Winplot no ensino médio. REVEMAT : REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA Vol.12 (2), 2017.
- [26] MENESES, Leonel Ricardo Machado e MARIANI, Rita de Cássia Pistóia. Função Afim e Quadrática: Representações Mobilizadas Nas Atividades Propostas no Livro Didático Matemática: Contexto e Aplicações. CAMINHOS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA. Vol.2 (1), 2014.
- [27] MELO, Gercilio da Rocha e Rehfeldt, Márcia Jussara Hepp. Explorando funções afins e quadráticas por meio do software KmPlot com alunos do Ensino Médio. REMAT Vol.2 (1), 2016.
- [28] OLIVEIRA, Alan Gomes de e DORINI, Fabio Antonio. O uso do ambiente de geometria dinamica como subsidio para caracterização de funções quadraticas. Professor de Matemática Online, N.1, VOLUME 1, ISSN 2319-023X, 2013.
- [29] OREY, D. C. Insubordinações Criativas Relacionadas com a Ação Pedagógica do Programa Etnomatemática. In: D'AMBROSIO, B. S.; LOPES, C. E. (Orgs) Ousadia Criativa nas Práticas de Educadores Matemáticos. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2015. – (Coleção Insubordinação Criativa)
- [30] ORTIZ, J. P. Aproximação Teórica à realidade do jogo. In: MURCIA, J. A. M.(Org.). Aprendizagem Através do Jogo. Porto Alegre: Artemed, 2005, p.9-28.

- [31] PATERLINI, Roberto Ribeiro. *tecnicas de maximos e minimos* RPM - REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. (35), 1994.
- [32] PEREIRA, J e UEHARA, F e Núñez, I. *ANÁLISE PEDAGÓGICA DAS PROVAS DISCURSIVAS DE MATEMÁTICA E QUÍMICA DO VESTIBULAR DA UFRN*. 2012, Vol.28(3), pp.172-183.
- [33] PETTICREW, M.; ROBERTS, H. *Systematic reviews in the social sciences: a practical guide*. [S.l.]: Blackwell Pub., 2006. ISBN 9781405121118.
- [34] PRODANOV, Cleber Cristiano. *Metodologia do trabalho científico [recurso eletrônico] : métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico / Cleber Cristiano Prodanov, Ernani Cesar de Freitas. – 2. ed. – Novo Hamburgo: Feevale, 2013.*
- [35] RAMOS, Maria Luisa Perdigão Diz e CURI, Edda. Erros na Resolução de Inequações: consequências de dificuldades relativas a conteúdos dos Ensinos Fundamental e Médio. *ACTA SCIENTIAE: REVISTA DE ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA*. Vol.16 (3), 2014.
- [36] ROCHA, Lúcia Andréia de Souza; POFFAL, Cristiana Andrade e MENEGHETTI, Cinthya Maria Schneider. A Utilização de Softwares no Ensino de Funções Quadráticas. *Revista Ciência e Natura*, 2015, Vol.37p.19-36.
- [37] RODRIGUES, Marco Aurélio Torres e MACKEDANZ, Luiz Fernando. Produção de espelhos parabólicos e construção do conceito de função polinomial de 2º grau. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 2017, Vol.40 (1), p.1-13.
- [38] SILVA, Karina da, e ALMEIDA, Lourdes de. Caminhos do Significado em Atividades de Modelagem Matemática: um olhar sobre os interpretantes. *Bolema*, Aug 2015, Vol.29(52), pp.568-592.
- [39] SMOLE, K. et al. *Jogos de Matemática: de 1º e 3º ano*. Porto Alegre: Artmed, 2008. (Cadernos do Mathema – Ensino Médio).
- [40] SOUZA, A. R. de, e SILVA, G. A. da. Desenvolvimento e análise de uma metodologia para o ensino da função quadrática utilizando os softwares 'parábola' e 'oficina de funções'. *ZETETIKÉ* Vol.14 (1), 2006.

- [41] SOUZA, Aguinaldo R. *Vertices de famílias de parábolas* RPM - REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. (41), 1996.
- [42] STRAPASON, Lísie Pippi Reis. e BISOGNIN, Eleni. Jogos Pedagógicos para o Ensino de Funções no Primeiro Ano do Ensino Médio. *Bolema*. Vol.27 (46), 2013.
- [43] THIEL, Afrânio Austregésilo; BARBOSA, Thiago Henrique das Neves e MORETTI, Mércles Thadeu *Função quadrática: linguagem matemática e a representação de um pensamento* REVEMAT : REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA Vol.13 (2), 2018.
- [44] ULIANA, Marcia Rosa. Inclusão de Estudantes Cegos nas Aulas de Matemática: a construção de um kit pedagógico. *Bolema*, Aug 2013, Vol.27(46), pp.597-612.
- [45] VISEU, Floriano ; MENEZES, Luis. Desenvolvimento do conhecimento didático de uma futura professora de matemática do 3. ciclo: o confronto com a sala de aula na preparação e análise de tarefas de modelação matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 2014, Vol.17(3), p.347(29).
- [46] ZORZAN, Adriana Salete Loss. Ensino-aprendizagem: Algumas tendências na educação matemática. *Ciências Humanas*. Vol.8 (10) p. 77 - 93 Jun 2007.